O OKRĘGACH STYCZNYCH

V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego w Krakowie

Jakub Luśtyk

Spis treści.

	Wprowadzenie	3
1.	Co to są okręgi Soddy'ego	4
2.	Konstrukcja trzech wzajemnie stycznych okręgów	8
3.	Konstrukcja okręgu stycznego do trzech pozostałych	9
4.	Promienie okręgów	11
5.	Różne położenia okręgów	12
6.	Trójkąt Soddy'ego o bokach całkowitych	14
7.	Uogólnienie dla czworościanu	15
8.	Co to jest Soddy Hexlet	19
9.	Okręgi Forda	22
	Bibliografia	23
	Źródła Internetowe	23

Wprowadzenie

Niniejsza praca przedstawia zależności zachodzące pomiędzy okręgami stycznymi. Autor, wykorzystując treści zawarte w artykułach [1] i [2], opisał zawarte w nich problemy, a także uogólnił sytuację na przestrzeń trójwymiarową.

Praca została podzielona na części. Na początku pracy przedstawiono różne konfiguracje okręgów stycznych i ich konstrukcje. W dalszej części został opisany sposób wyprowadzenia wzoru na promienie okręgów. Na końcu pracy czytelnik może przeczytać o wielu ciekawych zależnościach zachodzących pomiędzy okręgami stycznymi.

1. Co to są okręgi Soddy'ego ?

Okręgi Soddy'ego to okręgi styczne do trzech innych wzajemnie stycznych. Przeważnie istnieją dwa takie okręgi: jeden styczny wewnętrznie i drugi zewnętrznie (sytuacje w których tak nie jest pokażemy w dalszych rozdziałach).

Wraz z tymi okręgami związane jest pewne twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Kartezjusz-Soddy)

Jeżeli mamy trzy okręgi styczne ze sobą, każdy do dwóch pozostałych i czwarty styczny do nich to:

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = k_1^{\ 2} + k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2} + k_4^{\ 2}$$

Gdzie $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = \{1,2,3,4\}$, r_i -promień okręgu stycznego do pozostałych

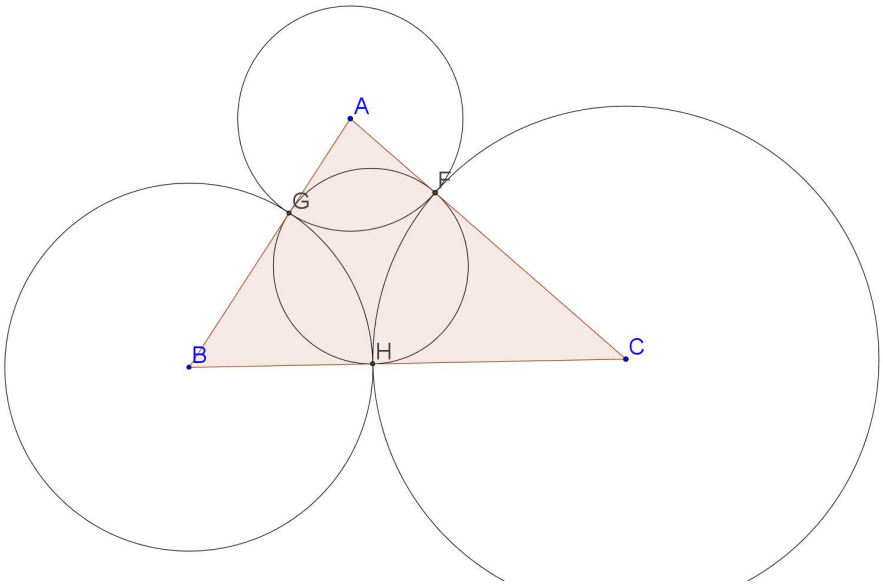
Zależność tę odkrył w 1643 roku Kartezjusz i opisał ją w liście do księżniczki Elżbiety Czeskiej, córki Elżbiety Stuart i Fryderyka V.

Twierdzenie Kartezjusza odkrył na nowo w 1936 roku przez Fredericka Soddy'ego.

Na jego cześć dwa okręgi styczne do danych trzech są nazywane okręgami Soddy'ego.

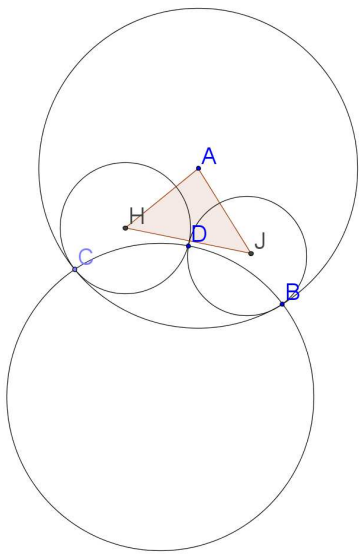
Teraz przeprowadzę dowód tego twierdzenia.

Dowód:



Rys. a

W pierwszym przypadku okręgi są styczne zewnętrznie (Rys. a), w drugim wewnętrznie (Rys.b). Dowód w obydwu przypadkach przeprowadzany jest w podobny sposób.

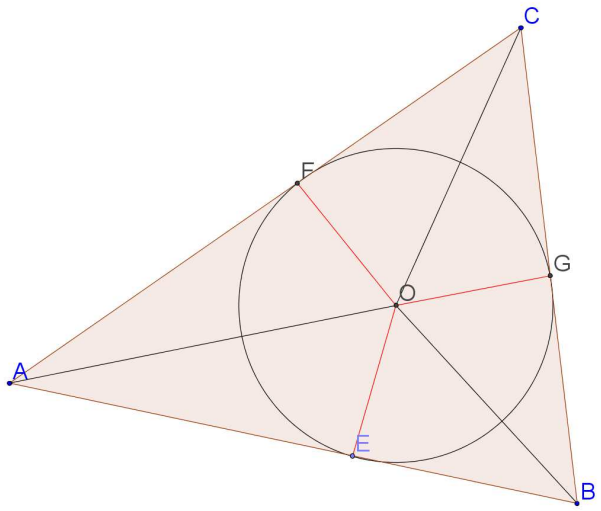


Rys. b

Niech A, B, C będą środkami okręgów stycznych.

Dla każdych trzech stycznych okręgów możemy stworzyć nowy okrąg przechodzący przez ich punkty styczności. Jeżeli koła są ze sobą styczne zewnętrznie (rys. a) to powstały okrąg jest wpisany w trójkąt ABC. Niech: $s-a=r_2$, $s-b=r_3$, $s-c=r_4$, x_1-promień okręgu wpisanego w trójkąt.

Wyznaczmy teraz ten promień.



Rys.19

$$P_{ABC}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{ACO}$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$r = \frac{2P_{ABC}}{a+b+c}$, korzystając ze wzoru Herona na pole trójkata otrzymujemy:

$$r = \frac{2 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2s} = \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{4s^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{r_2 r_3 r_4}{r_2 + r_3 + r_4}}$$

Jeżeli k_1 oznacz krzywiznę okręgu to $k_1 = x_1^{-1}$, w podobny sposób za k_1 podstawmy $\frac{1}{r_1}$ itd.

W ten oto sposób dostajemy:

$$k_1^2 = \frac{1}{x_1^{\,2}} = \frac{1}{\frac{r_2 r_3 r_4}{r_2 + r_3 + r_4}} = \frac{r_2 + r_3 + r_4}{r_2 r_3 r_4} = \frac{1}{r_3 \cdot r_4} + \frac{1}{r_2 \cdot r_4} + \frac{1}{r_2 \cdot r_3} = k_3 k_4 + k_2 k_3 + k_4 k_2$$

Jeżeli jeden okrąg zawiera dwa inne koła (rys. b) to nowy okrąg jest styczny do trójkąta ABC. Niech $s = r_2$, $s - c = r_3$, $s - b = r_4$, x_1-promień okręgu dopisanego do boku trójkąta. wtedy:

$$x_1 = \sqrt{\frac{r_2 r_3 r_4}{r_2 - r_3 - r_4}}$$

Podobnie otrzymujemy: $k_1^{\,2} = k_3 k_4 - k_2 k_3 - k_4 k_2$

Jeżeli za $k_2 = -r_2^{-1}$ to otrzymamy: $k_1^{\,2} = k_3 k_4 + k_2 k_3 + k_4 k_2$

Analogicznie wybieramy trzy inne okręgi otrzymując:

$$k_2^{\,2} = k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_3 k_4$$

$$k_3^{\,2} = k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4$$

$$k_4^{\,2} = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3$$

Cztery dodatkowe okręgi też są styczne więc:

$$K_1^{\,2} = K_3 K_4 + K_2 K_3 + K_4 K_2$$

$$K_2^{\,2} = K_1 K_3 + K_1 K_4 + K_3 K_4$$

$$K_3^{\,2} = K_1 K_2 + K_1 K_4 + K_2 K_4$$

$$K_4^{\,2} = K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3$$

Okrąg może też być prostą o krzywiźnie 0. Jednak w tym przypadku warunki i tak są spełnione. Istnieje najwyżej jeden taki okrąg, więc jeden okrąg musi mieć największy promień (na którym znajdują się trzy pozostałe) wtedy : $\sum_{i=1}^{4} K_i$, $\sum_{i=1}^{4} k_i > 0$

$$(\sum_{i=1}^{4} K_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} K_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{4} k_i^{\ 2} = (\sum_{i=1}^{4} k_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} K_i = \sum_{i=1}^{4} k_i$$

$$-k_1^{\ 2} + (k_2 + k_3 + k_4)^2 = -k_1^{\ 2} + k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2} + k_4^{\ 2} + 2K_1^{\ 2} = 2K_1(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = 2K_1(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$
$$\Rightarrow -k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2K_1$$

Permutując indeksy otrzymujemy:

$$k_1 - k_2 + k_3 + k_4 = 2K_2$$

$$k_1 + k_2 - k_3 + k_4 = 2K_3$$

$$k_1 + k_2 + k_3 - k_4 = 2K_4$$

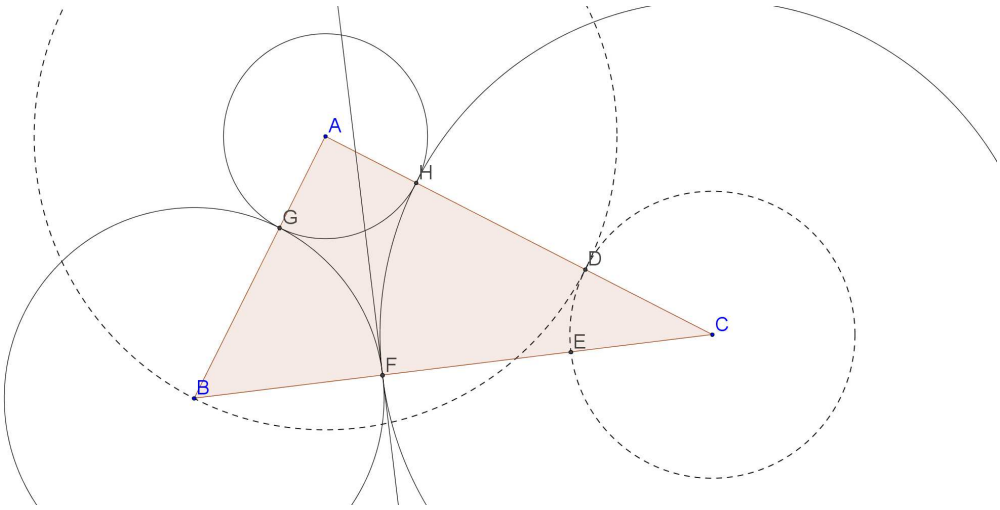
Dodając kwadraty czterech równań otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{4} K_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{4} k_i^{\ 2}$$

W końcu:

$$2\sum_{i=1}^{4} k_i^{\ 2} = (\sum_{i=1}^{4} k_i)^2$$

2. Czy dla każdego trójkąta można zbudować trzy wzajemnie styczne okręgi o środkach w jego wierzchołkach ?



Rys. 1

Odpowiedź brzmi tak, ponadto istnieje dokładnie jedna taka trójka okręgów.

Oto konstrukcja:

1) Narysuj dowolny trójkąt o wierzchołkach A, B, C.

2) Skonstruuj okrąg o środku A i promieniu AB.

3) Punkt przecięcia okręgu z odcinkiem AC oznacz przez D.

4) Skonstruuj okrąg o środku C i promieniu CD.

5) Punkt przecięcia okręgu z odcinkiem BC oznacz przez E.

6) Skonstruuj symetralną odcinka BE, która przetnie ten bok w punkcie F.

7) Narysuj okrąg o środku B i promieniu BF, który przetnie bok AB w punkcie G.

8) Narysuj okrąg o środku A i promieniu AG, który przetnie bok AC w punkcie H.

9) Narysuj okrąg o środku C i promieniu CH.

Dowód poprawności konstrukcji:

Należało skonstruować trzy okręgi styczne tak aby ich promienie spełniały zalezność:

$r_1 + r_2 = a$, $r_1 + r_3 = c$, $r_3 + r_2 = b$

Wiemy, że $|AB| = |AD| = a$

$|CD| = |CE| = c - a$ oraz $|BE| = b - (c - a) = b - c + a$

Symetralna dzieli odcinek na dwie równe części, więc $|BF| = |FE| = \frac{b-c+a}{2}$.

Z czego wynika, że $r_2 = \frac{b-c+a}{2}$, a $r_1 = a - \frac{b-c+a}{2}$.

Wyliczając r_3 dostajemy $r_3 = |CF| = c - a + \frac{b-c+a}{2}$. Konstrukcja będzie poprawna jeżeli

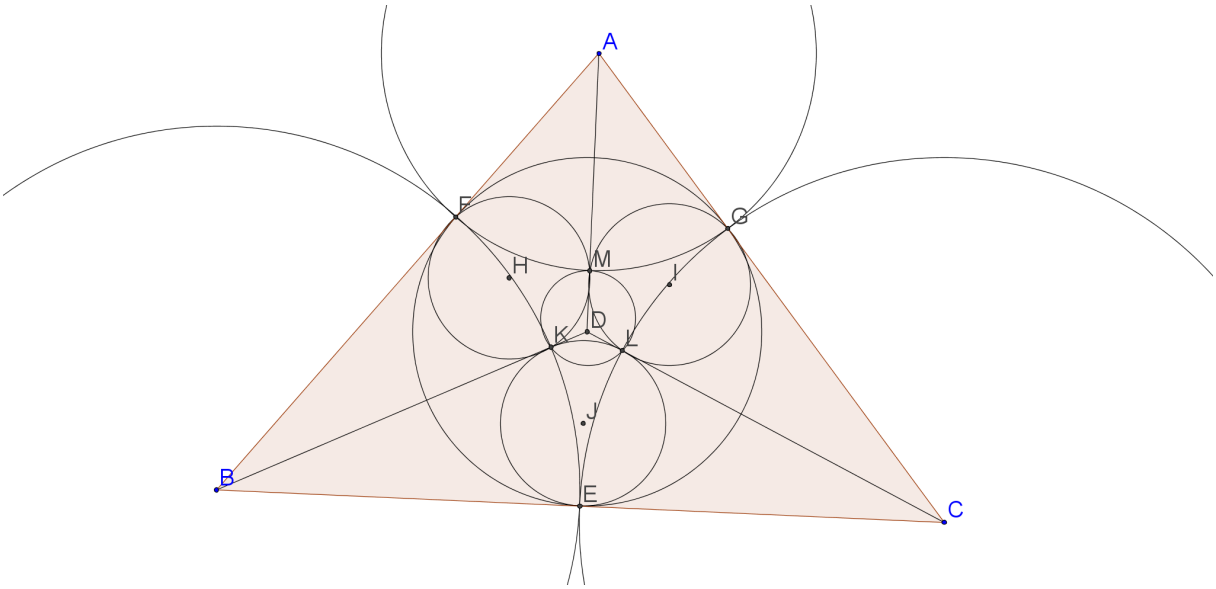
$r_3 + r_1 = |AC| = c$. Dodając otrzymujemy: $r_1 + r_3 = a - \frac{b-c+a}{2} + c - a + \frac{b-c+a}{2} = c$, więc

konstrukcja jest poprawna.

Można też zauważyć że punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z jego bokami wyznaczają trzy okręgi styczne. W każdy trójkąt można wpisać tylko jeden okrąg, więc dla każdego trójkąta istnieje tylko jedna taka trójka okręgów.

3. Jak skonstruować (jeśli to możliwe) okrąg styczny do trzech pozostałych.

a) Okrąg wewnętrzny zawsze możemy skonstruować.



Rys. 2

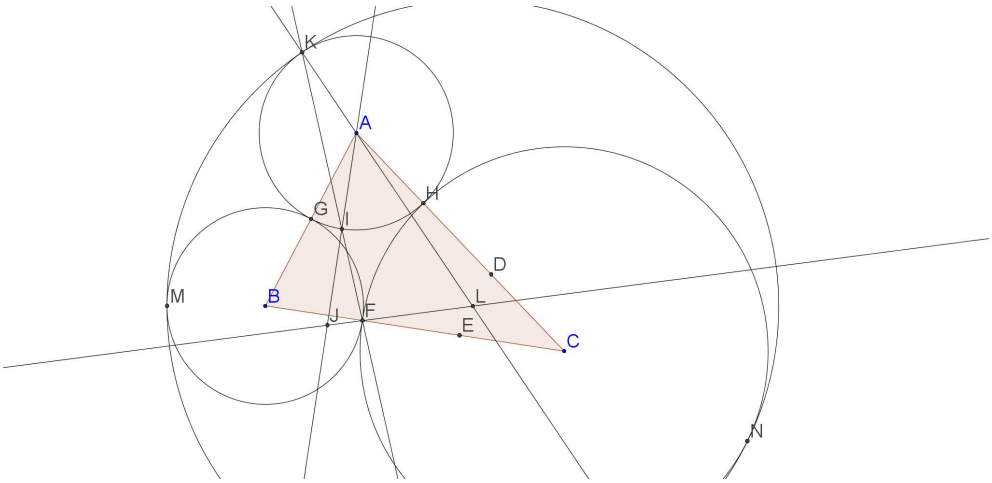
1) Połącz środki okręgów stycznych, które utworzą trójkąt ABC.
2) Skonstruuj okrąg wpisany w trójkąt.
3) Połącz środek okręgu z wierzchołkami trójkąta.
4) W powstałe trójkąty: OAB, OAC i OCB wpisz okręgi.
5) Przez punkty styczności powstałych okręgów przeprowadź okrąg.

6) W ten oto sposób otrzymaliśmy okrąg styczny zewnętrznie.

Dowód poprawności konstrukcji:

Okrąg wpisany w trójkąt OBC wyznacza punkty styczności trzech okręgów o środkach w wierzchołkach trójkąta. W ten sposób dostajemy okrąg o środku w punkcie O i styczny do okręgów B i C. W analogiczny sposób dostajemy okrąg styczny odpowiednio do okręgów B i A oraz C i A. Z tego wynika, że ten okrąg jest styczny do trzech okręgów o środkach A, B i C.

b) Okrąg zewnętrzny możemy skonstruować wyłącznie wtedy, kiedy nie istnieje wspólna prosta styczna do każdego z okręgów.



Rys. 3

1) Połącz środki okręgów stycznych, które utworzą trójkąt ABC.
2) Narysuj prostą prostopadłą do odcinka BC przechodzącą przez punkt A.
3) Punkt przecięcia prostej z okręgiem o środku A, leżący bliżej BC oznacz przez I.
4) Punkty styczności okręgów to G, H, F.
5) Skonstruuj odcinek IJ=IA.
6) Narysuj prostą przechodzącą przez punkty F, I i przecinającą okrąg o środku A w punkcie K.
7) Narysuj prostą KA i prostą JF, które przetną się w punkcie L.
8) Narysuj okrąg o środku L i promieniu LK.

4. Promienie okręgów

Wiemy już jak wyznaczyć krzywizny okręgów stycznych do trzech pozostałych, ale istnieje także inny wzór na długości ich promieni zależny od promieni okręgów: wpisanego i opisanego na trójkącie i od długości jego boków.

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta ABC, s połową obwodu, a r_1, r_2, r_3 są promieniami okręgów stycznych, wtedy:

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$a = r_2 + r_3 \quad b = r_3 + r_1 \quad c = r_1 + r_2$$

$$r_1 = s - a \quad r_2 = s - b \quad r_3 = s - c$$

Jeżeli P jest polem trójkąta, to korzystając ze wzoru Herona na pole trójkąta otrzymujemy:

$$P = \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}$$

Promień okręgu wewnętrznego :

$$x = \frac{P}{4R + r + 2s}$$

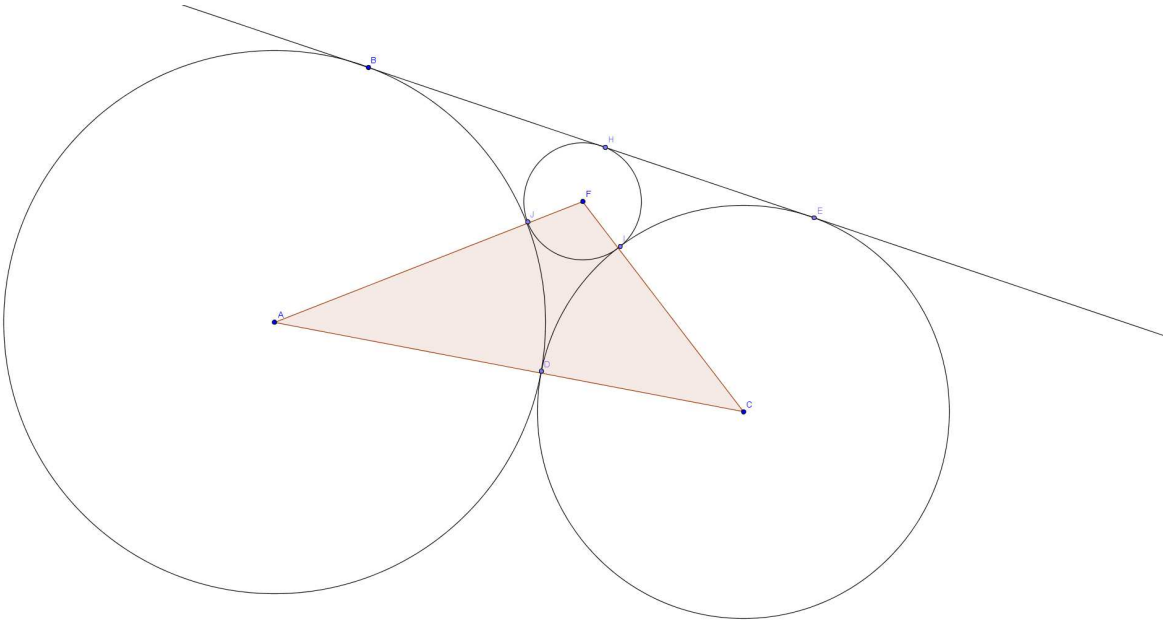
Promień okręgu zewnętrznego :

$$x_1 = \frac{P}{4R + r - 2s}$$

5. Różne położenia okręgów.

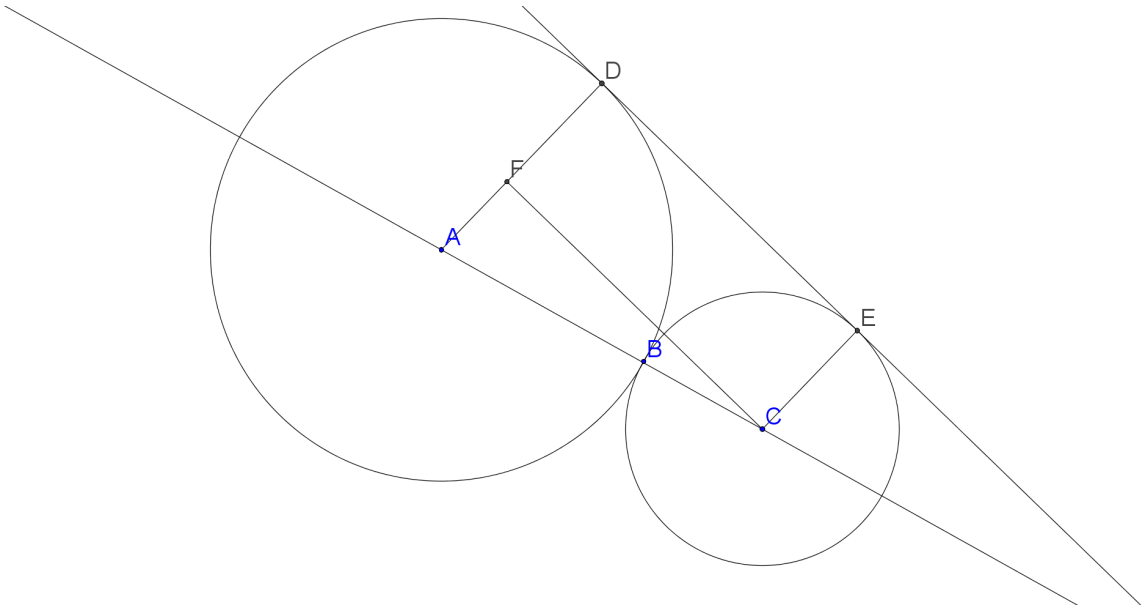
Rozważmy teraz różne konfiguracje okręgów zależne od długości promieni okręgów.

a) dla $4R + r = 2s$ okrąg zewnętrzny jest prostą, a $x = \dfrac{P}{4R + r + 2s} = \dfrac{P}{4s} = \dfrac{r}{4}$



Rys.3

Promienie okręgów stycznych wynoszą $s - a$, $s - b$, $s - c$.



Rys.4

Wyznaczymy teraz długość wspólnej stycznej do dwóch okręgów o promieniach a i b

Oznaczmy przez $|AD| = a$, $|CE| = b$, $|AF| = a - b$, $|AC| = a + b$, $|DE| = |FC|$.

Korzystając z twierdzenia pitagorasa otrzymujemy: $|AF|^2 + |FC|^2 = |AC|^2$

$$(a-b)^2 + |FC|^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + |FC|^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$|FC|^2 = 4ab$$

$$|DE| = 2\sqrt{ab}$$

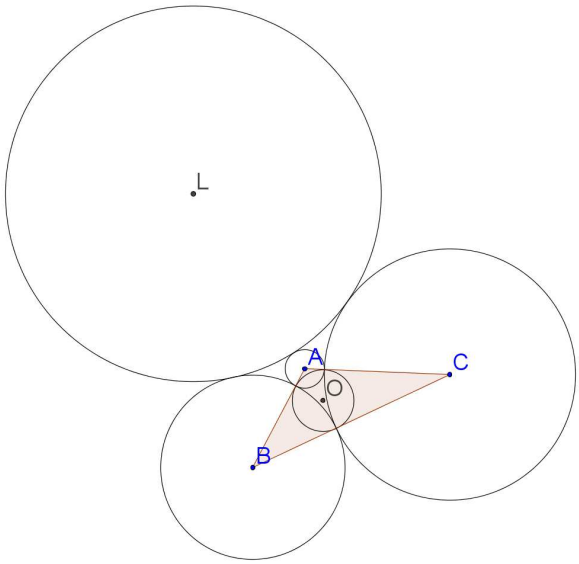
Wykorzystując to dla każdej pary trzech okręgów stycznych dostajemy:

$$2\sqrt{(s-a)(s-b)} = 2\sqrt{(s-a)(s-c)} + 2\sqrt{(s-c)(s-b)}$$

Po przekształceniu:

$$\frac{1}{\sqrt{s-c}} = \frac{1}{\sqrt{s-a}} + \frac{1}{\sqrt{s-b}}$$

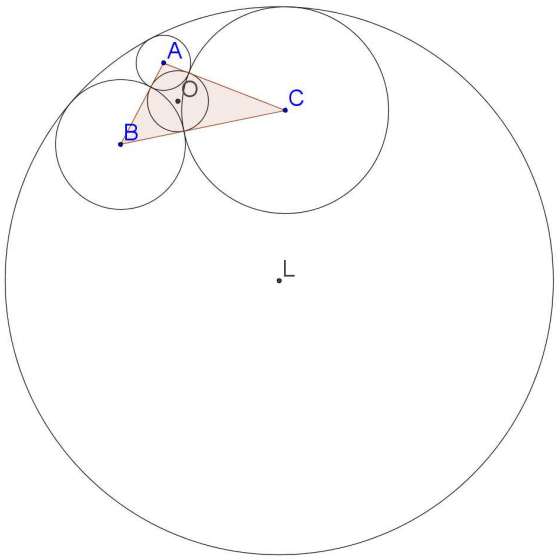
b) dla $4R + r < 2s$ promień okręgu jest ujemny, ponieważ $x_1 = \dfrac{P}{4R + r - 2s} < 0$



Rys.5

W takiej sytuacji okrąg zewnętrzny o środku L staje się styczny zewnętrznie do pozostałych okręgów.

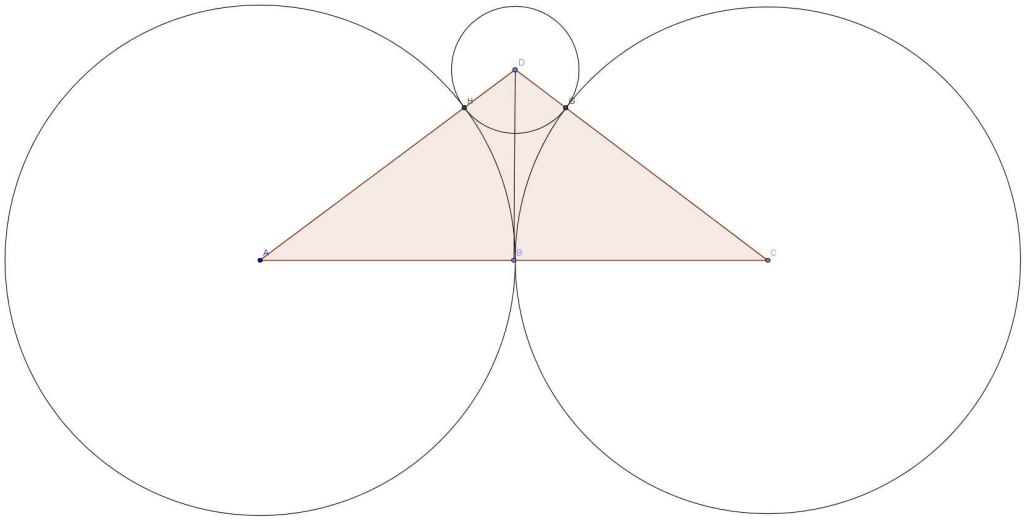
c) dla $4R + r > 2s$ promień okręgu jest dodatni, ponieważ $x_1 = \dfrac{P}{4R + r - 2s} > 0$



Rys.6

6. Trójkąty Soddy'ego o bokach całkowitych

Sprawdźmy czy istnieje równoramienny trójkąt Soddy'ego o całkowitych długościach boków.



Rys.7

Załóżmy, że $a \le b \le c$ oraz $a = b$,wtedy $s = a + \frac{c}{2}$. Korzystając z równości

$\frac{1}{\sqrt{s-c}} = \frac{1}{\sqrt{s-a}} + \frac{1}{\sqrt{s-b}}$ otrzymujemy: $\frac{1}{\sqrt{s-c}} = \frac{2}{\sqrt{s-a}}$. Stąd $\frac{a}{c} = \frac{5}{8}$, więc długości boków trójkąta wynoszą odpowiednio 5, 5, 8.

Czy trójkąt Soddy'ego zawsze jest trójkątem ?

Jeżeli dany jest trójkąt prostokątny o bokach $a \le b \le c$, wtedy $R = \frac{c}{2}$ oraz $r = s - c$. Jeżeli dodatkowo $4R + r = 2s$, to $c = a + b$. Z czego wynika, że to nie może byś trójkąt, więc jest to łamana.

7. Uogólnienie dla czworościanu

Twierdzenie 1 (Kartezjusz-Soddy)

Jeżeli mamy cztery kule styczne zewnętrznie ze sobą i piątą styczną do każdej z nich (są dwie takie kule) to: $\frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)^2 = k_1^{\ 2} + k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2} + k_4^{\ 2} + k_5^{\ 2}$

Gdzie $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = \{1,2,3,4,5\}$, r_i -promień kuli

Wyznaczając z równania promieni kul stycznych otrzymujemy:

$$k_5 = \frac{1}{2}[k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4) - k_1^{\ 2} - k_2^{\ 2} - k_3^{\ 2} - k_4^{\ 2}}]$$

Sprawdźmy czy analogicznie kula styczna wewnętrznie może być płaszczyzną.
Aby tak było jej krzywizna musi być równa 0, czyli $k_5 = 0$. W ten sposób otrzymujemy równanie:

$$0 = \frac{1}{2}[k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4) - k_1^{\ 2} - k_2^{\ 2} - k_3^{\ 2} - k_4^{\ 2}}]$$

Równoważnie:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4) - k_1^{\ 2} - k_2^{\ 2} - k_3^{\ 2} - k_4^{\ 2}}$$

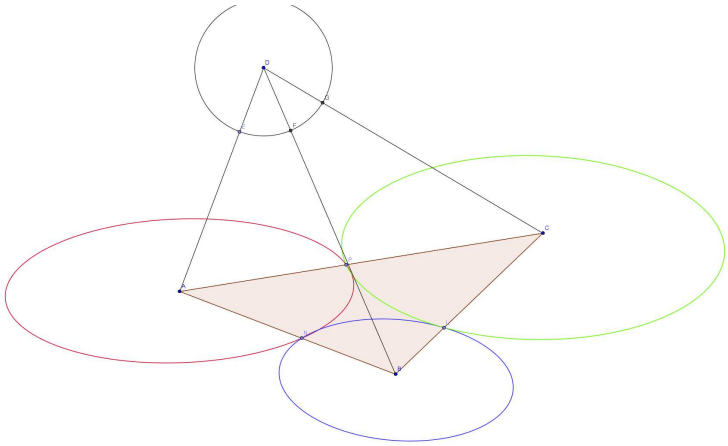
Podnosząc do kwadratu i przekształcając dostajemy:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4$$

Jeżeli krzywizny kul spełniają to równanie to zewnętrzna kula będzie płaszczyzną.

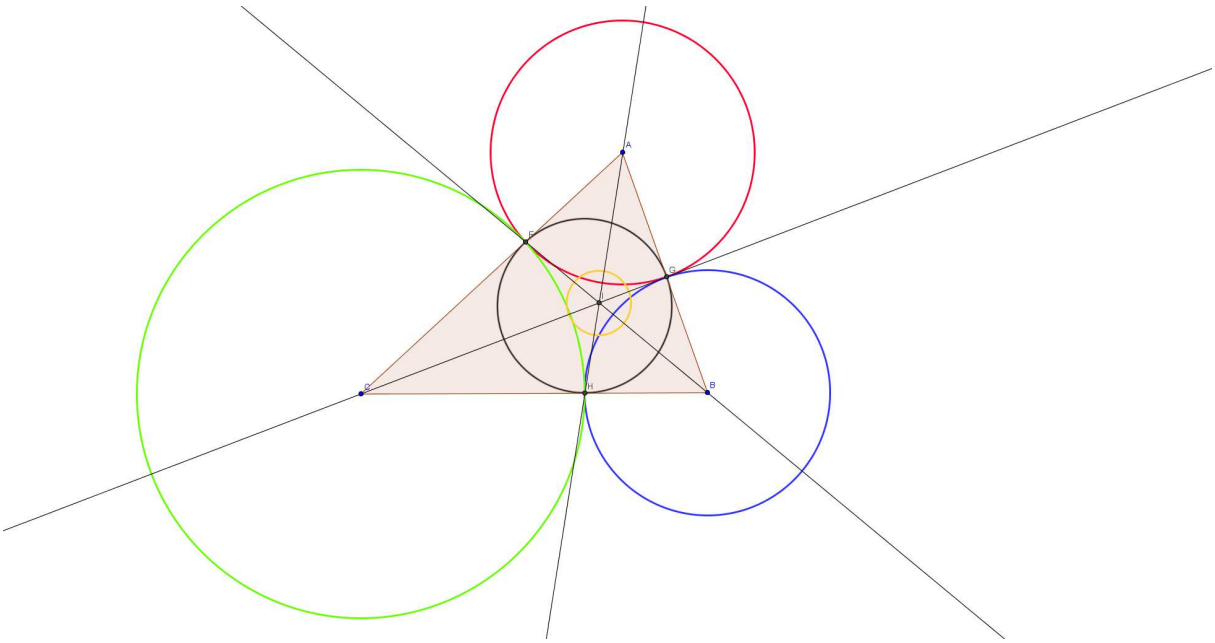
Następne pytanie jakie się nasuwa to jak skonstruować cztery kule styczne, każda o środku w wierzchołku czworościanu ?

Rzuty na każdą ścianę kuli wpisanej w czworościan tworzą okręgi wpisane. Punkty styczności wyznaczają punkty styczności czterech kul.



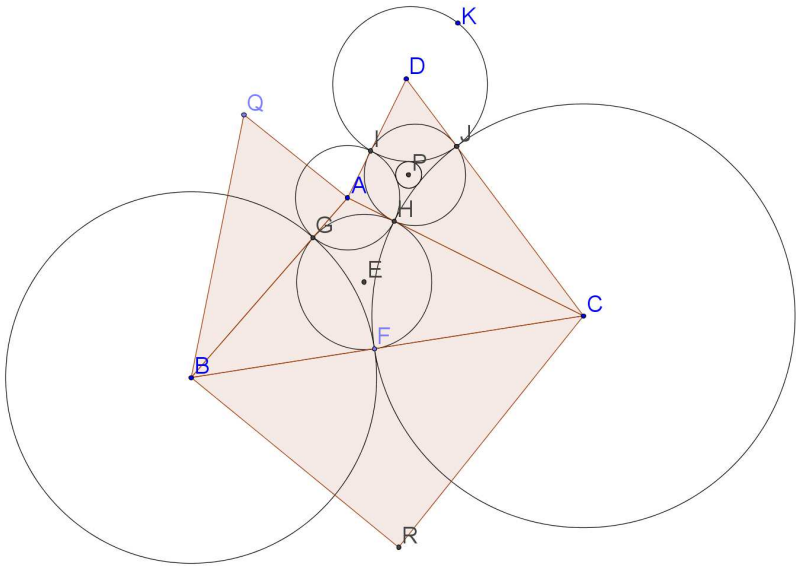
Rys.8

Widok z góry:



Rys.9

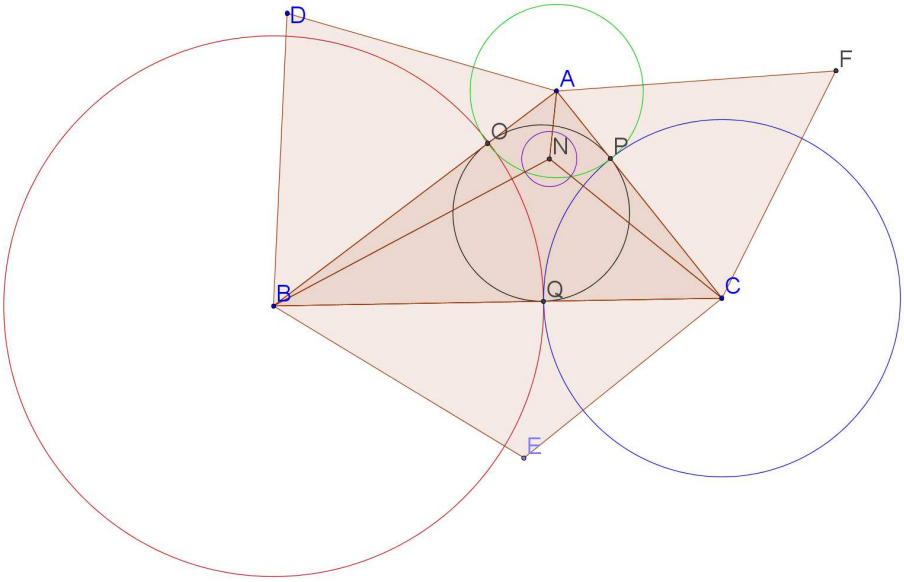
Jak widać rzut środka czwartej kuli na podstawę pokrywa się z środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Rys.10

Na rysunku 10 widać siatkę czworościanu oraz cztery kule styczne, których środki leżą w wierzchołkach A, B, C, D. Jak wyznaczyć promień kuli stycznej zewnętrznie o środku w punkcie P?

Należy na płaszczyźnie rozważyć trójkąt o bokach A, C, D. Tak jak to wyznaczyliśmy wcześniej promień tej kuli jest równy $\frac{P}{4R + r + 2s}$, gdzie P jest jego polem, R - promieniem okręgu opisanego, r - wpisanego, a $2s$ jego obwodem.



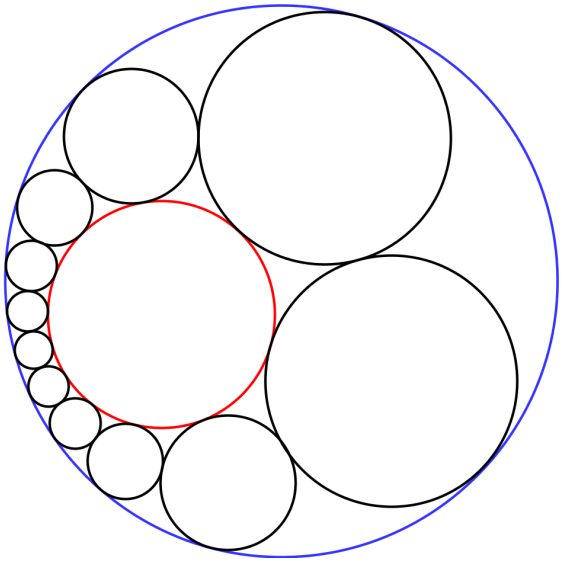
Rys.11

Rysunek 11 przedstawia czworościan o podstawie ABC i wierzchołku N, a także jego siatkę i widok „z góry” czterech kul stycznych.

8. Co to jest Soddy hexlet ?

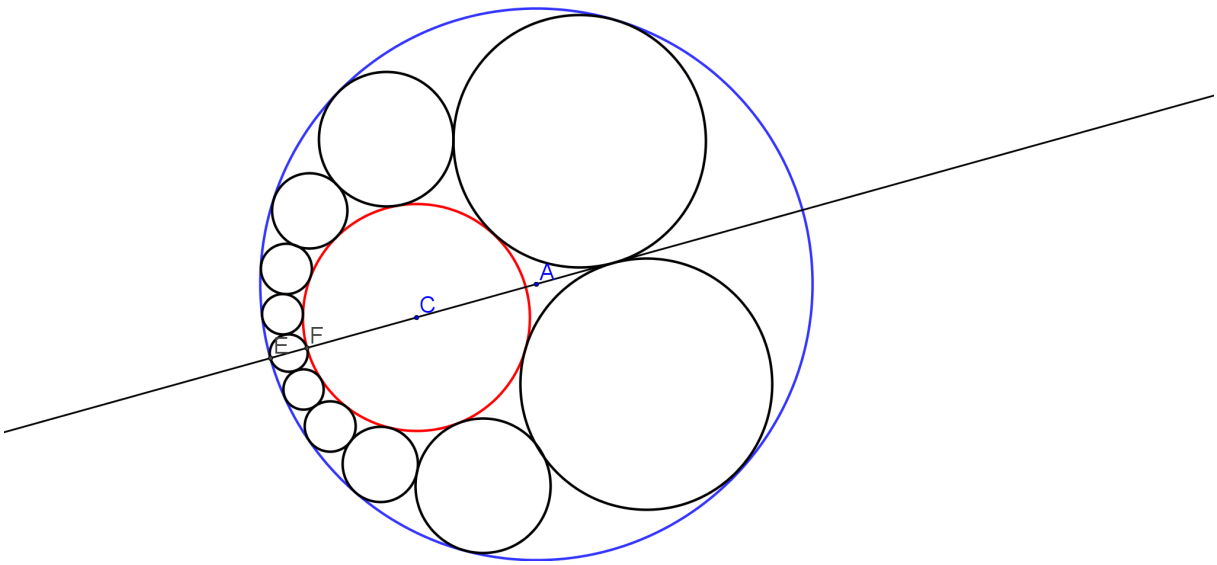
W tym rozdziale zobaczymy ciekawe konfiguracje okręgów stycznych.

Najpierw powiemy co to jest łańcuch Steinera – łańcuch n okręgów stycznych do dwóch podanych, które się nie przecinają. Środki tych okręgów leżą na jednej elipsie lub okręgu, podobnie jak ich punkty styczności.



Rys.13

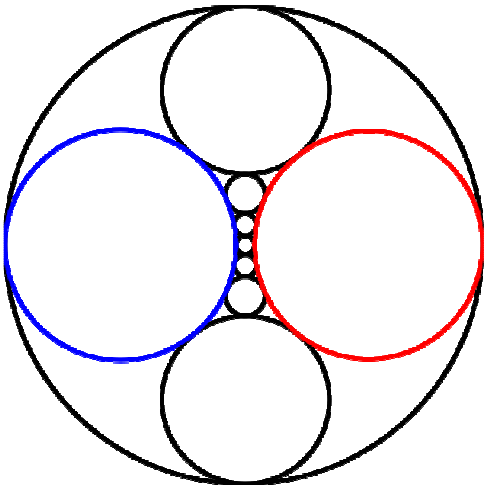
Na rysunku 13 widać dwa okręgi rozłączne w tym jeden zawarty w drugim. Dla takiego ułożenia okręgów zawsze istnieje zamknięty łańcuch Steinera.



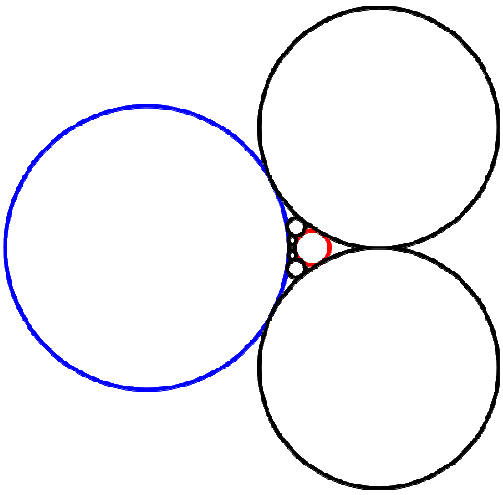
Rys. 14

Jeżeli są narysowane dwa okręgi rozłączne to najpierw rysujemy prostą łączącą ich środki, potem rysujemy okrąg styczny do dwóch pozostałych o średnicy EF, a na końcu konstruujemy okręgi styczne, symetryczne względem prostej AC.

Dane dwa okręgi mogą byś również ułożone w różny sposób tak jak na rysunkach 15 i 16
Na rysunku 15 znajdują się dwa takie same, rozłączne okręgi, dla których łańcuch Steinera jest symetryczny względem prostej zawierającej środki okręgów (czerwonego i niebieskiego). Z kolei na rysunku 16 są także dwa rozłączne okręgi ale różnej wielkości, dla których łańcuch okręgów także jest symetryczny względem prostej zawierającej ich środki.

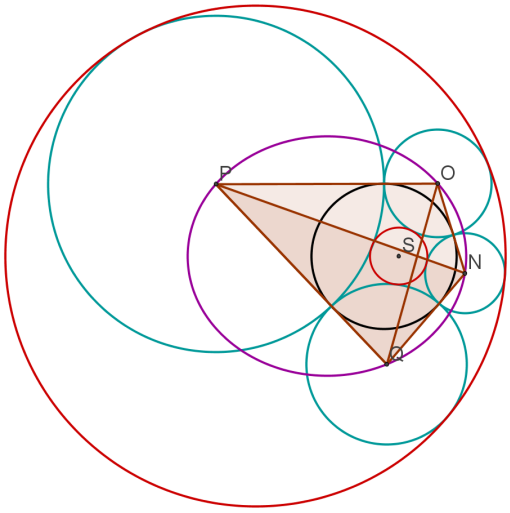


Rys.15



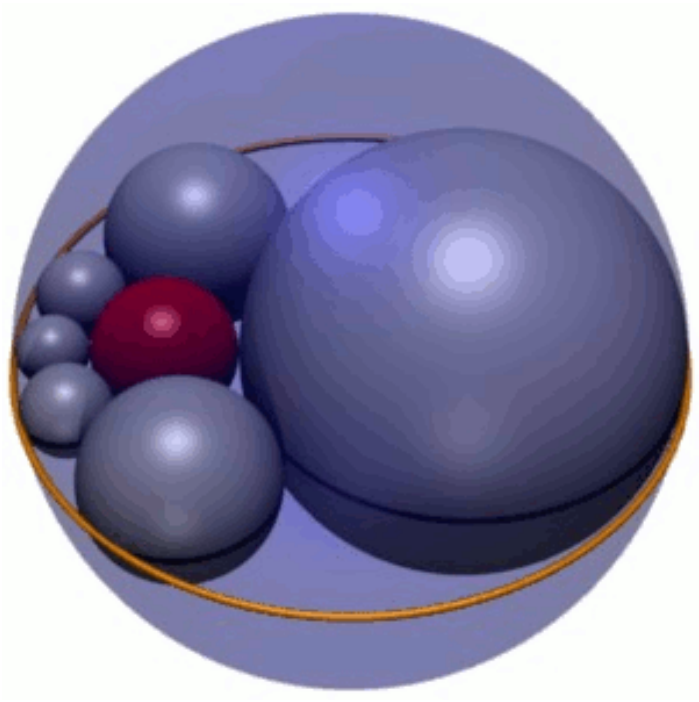
Rys.16

Uogólnieniem takiego położenia okręgów jest właśnie Soddy Hexlet.
Jest to sześć kul, każda styczna to dwóch podanych (jednej w środku i jednej na zewnątrz). Kolejną ciekawą własnością kul stycznych jest to, że ich środki leżą w jednej płaszczyźnie, konkretnie na elipsie (kolor fioletowy), a ich punkty styczności na okręgu (kolor czarny).



Rys. 17

Na rysunku widać rzut czterech kul styczny o środkach w wierzchołkach czworościanu (O, N, P, Q). Na czerwono zaznaczono rzut kul stycznych zewnętrznie i wewnętrznie do pozostałych.

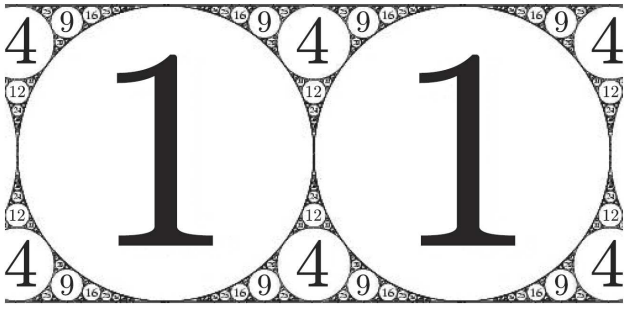


Rys.18

9. Okręgi Forda

Jeszcze inną ciekawą zależność tworzą dwa takie same okręgi (o krzywiznach równych 1) styczne same do siebie i do dwóch prostych.

Krzywizny kolejnych okręgów są kwadratami kolejnych liczb całkowitych.



Rys.19

Pokażmy dlaczego występuje taka zależność.

Wstawiając do równania $\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 = k_1^{\ 2}+k_2^{\ 2}+k_3^{\ 2}+k_4^{\ 2}$ odpowiednio wartości:

$k_1 = 1,\ k_2 = n^2,\ k_3 = 0$.

$$\frac{1}{2}(1+0+n^2+k_4)^2 = 1^2+0^2+n^4+k_4^{\ 2}$$

$$\frac{1}{2}(1+n^4+k_4^{\ 2}+2n^2+2k_4+2n^2k_4) = 1+n^4+k_4^{\ 2}$$

$$2n^2+2k_4+2n^2k_4 = 1+n^4+k_4^{\ 2}$$

$$k_4^{\ 2}-2k_4-2n^2k_4-2n^2+1+n^4 = 0$$

Ostatecznie dostajemy:

$k_4 = (n-1)^2$ lub $k_4 = (n+1)^2$

Bibliografia

[1] Frank M. Jackson, *Soddyian Triangles*, Forum Geometricorum ; 2013 vol. 13, str. 1-6.

[2] Nikolaus Dergiades, *The Soddy circles*, Forum Geometricorum ; 2007 vol. 7, str. 191-197.

Źródła Internetowe:

http://mathafou.free.fr

http://euler.genepeer.com

http://pl.wikipedia.org

http://en.wikipedia.org