Zasada szufladkowa Dirichleta

Julia Furtak
Patrycja Wykrent
Klasa IVa

Zespół Szkolno-Gimnazjalny nr 2 w Kętach
Opiekun: dr Katarzyna Wadoń-Kasprzak

Spis treści

Wstęp

W tym konkursie bierzemy udział po raz pierwszy. Tematem naszej pracy jest Zasada Szufladkowa Dirichleta. Wybrałyśmy ją dlatego, że bardzo zaciekawiły nas jej tajemnice. Nie jest tak skomplikowana jak się wydaje – wręcz przeciwnie. Jest bardzo prosta i interesująca. Zachęcamy naszych rówieśników do przeczytania naszej pracy. Temat 1, 2 napisałyśmy razem, temat 3 Patrycja Wykrent, temat 4 napisała Julia Furtak, a temat 5 i 6 również napisałyśmy razem. W ostatnim rozdziale napisałyśmy własne zadania z rozwiązaniami, do których można zastosować zasadę szufladkową Dirichleta.

Zajmowanie się tematem Zasady Szufladkowej sprawiało nam wiele przyjemności. Zachęcamy do przeczytania naszej pracy.

1.Postać Dirichleta

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet urodził się w Düren 18 lutego 1805 r. zmarł w Getyndze 5 maja 1859 r. Był niemieckim matematykiem francuskiego pochodzenia, wykładowcą uniwersytetów we Wrocławiu, Berlinie i Getyndze. Jego prace dotyczą teorii liczb, szeregów liczbowych, analizy matematycznej, rachunku wariacyjnego i fizyki teoretycznej. Jest autorem *Zasady szufladkowej*.

2.Co to jest zasada szufladkowa?

Najprościej mówiąc, jest to rodzaj rozumowania, które rozstrzyga, w pewnych przypadkach, problemy o istnieniu. Nie są to rozstrzygnięcia o charakterze ilościowym. Zasada ta w wersji poglądowej głosi: Jeżeli mamy n szufladek i m przedmiotów ($m>n$) i przedmioty te rozmieścimy w n szufladkach, to istnieje szufladka zawierająca więcej niż jeden przedmiot. Często używamy zasady szufladkowej w postaci uogólnionej. Mianowicie: Jeśli mamy m przedmiotów i n szufladek oraz $m > n$ x k, gdzie k jest liczbą naturalną, to przy dowolnym rozmieszczeniu tych przedmiotów w szufladkach istnieje szuflada z co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

Z pozoru wydaje się to dziecinnie oczywista wprost zasada. Oczywiście można wymyślić wiele bardzo prostych zastosowań. Dla przykładu:

- Wśród trzech różnych liczb naturalnych są zawsze 2 parzyste lub 2 nieparzyste (przedmioty - to liczby; szufladki – parzystość, nieparzystość)

- Wśród pięciu liczb naturalnych pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia przez 4 (przedmioty – to liczby; szufladki - reszty: 0, 1, 2, 3)

- Wśród dowolnych 10 liczb naturalnych znajdą się dwie z tą samą cyfrą jedności (przedmioty – liczby; szufladki – 0, 1, …, 9,)

3.Zasada szufladkowa w geometrii

Zadanie 1.

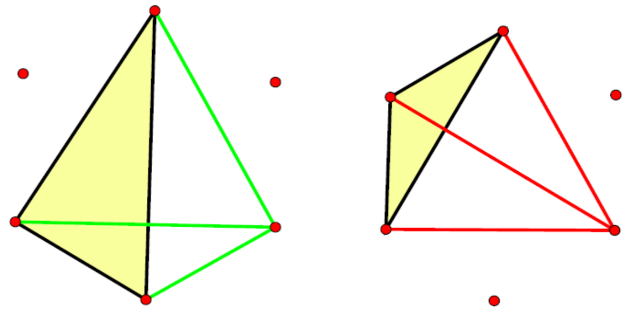
Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.

Rozwiązanie:
Istotnie, wystarczy popatrzeć na trójkąt równoboczny o boku 1. Dwa z jego wierzchołków muszą być, na mocy zasady szufladkowej, tego samego koloru.

Zadanie 2.

Udowodnij, że w gronie 6 osób, pewne 3 osoby się znają, albo pewne 3 się nie znają.

Rozwiązanie:
Ustawmy wszystkie sześć osób w wierzchołkach sześciokąta. Jeśli X zna się z osobą Y (zakładamy, że wtedy Y zna się z osobą X, tj. X i Y znają się nawzajem), to łączymy wierzchołki odpowiadające tym osobom odcinkiem koloru zielonego, a jeśli osoby te nie znają się, to odcinkiem koloru czerwonego. Rozważmy dowolną osobę X. Z punktu X musimy poprowadzić 5 odcinków, z których każdy jest koloru zielonego albo czerwonego. Ponieważ odcinków jest 5, a możliwych kolorów 2, to na mocy zasady szufladkowej pewne trzy z tych pięciu odcinków muszą być jednakowego koloru (patrz rysunek na następnej stronie).



Przyjrzyjmy się trójkątom oznaczonym na rysunku żółtym kolorem.

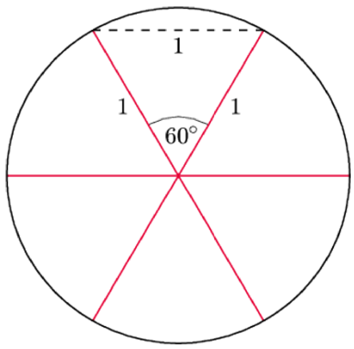
Przypadek 1.
Z punktu X „wychodzą” co najmniej 3 odcinki koloru zielonego. Jeśli jeden z boków żółtego trójkąta jest koloru zielonego, to zawsze umiemy wskazać trójkąt o bokach zielonego koloru (zawsze znajdziemy 3 osoby, które znają się nawzajem). Natomiast, jeśli żaden z nich nie jest koloru zielonego, to wszystkie trzy jego boki są koloru czerwonego (mamy 3 osoby, które nie znają się nawzajem).

Przypadek 2.
Z punktu X „wychodzą” co najmniej 3 odcinki koloru czerwonego. Jeśli jeden z boków żółtego trójkąta jest koloru czerwonego, to zawsze umiemy wskazać trójkąt o bokach czerwonego koloru (zawsze znajdziemy 3 osoby, które nie znają się nawzajem). Natomiast, jeśli żaden z nich nie jest koloru czerwonego, to wszystkie trzy jego boki są koloru zielonego (mamy 3 osoby, które znają się nawzajem).

Zadanie 3.

W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od zbudowania szuflad. Podzielmy koło na sześć przystających wycinków.



Zauważmy, że odległość dowolnych dwóch punktów należących do tego samego wycinka jest równa co najwyżej 1. Mamy 6 wycinków (to są nasze szuflady) i 7 punktów (przedmioty), zatem w co najmniej jednym wycinku leżą dwa punkty – a więc odległość między nimi nie przekracza 1 i teza zadania jest spełniona.

Zadanie 4.
Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 rożnych państw. Ambasadorowie tych państw siedli przy stole w sposób losowy tak, że żaden z nich nie zajął odpowiedniego miejsca. Wykaż, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

Rozwiązanie:
Dla każdego ze 100 ambasadorów istnieje dokładnie jedno właściwe ustawienie stołu spośród 100 możliwych. Skoro wyjściowa sytuacja nie jest dobra dla nikogo, to któreś z pozostałych 99 ustawień musi być odpowiednie dla przynajmniej dwóch osób.

4. Zasada szufladkowa w arytmetyce

Zadanie 1.

Wykaż, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, których cyfry jedności są równe.

Rozwiązanie

Mamy 10 możliwych cyfr jedności (od 0 do 9), niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich 11 danych liczb. Wówczas, z zasady szufladkowej Dirichleta, do pewnej szufladki trafią przynajmniej dwie liczby, a to właśnie było do udowodnienia.

Zamiast mówić o cyfrach jedności, można sformułować to samo zadanie w nieco inny sposób:

Zadanie 1'.

Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 10.

Korzyścią z takiego przeformułowania jest możliwość uogólnienia naszego rozwiązania także na reszty z dzielenia przez inne liczby. W tym celu warto zauważyć, że przy dzieleniu przez dodatnią liczbę całkowitą n, jest n możliwych reszt: $0,1,2,\ldots,n-1$.

Zadanie 2.

Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 liczb nieparzystych.

Rozwiązanie

Rozmieszczamy dane liczby w dwóch szufladkach: *parzyste* i *nieparzyste*. Ponieważ mamy więcej niż 500x2 liczb, to w pewnej szufladce znajdzie się co najmniej 500+1 z nich.

5. Zasada szufladkowa w kombinatoryce

Zadanie 1.

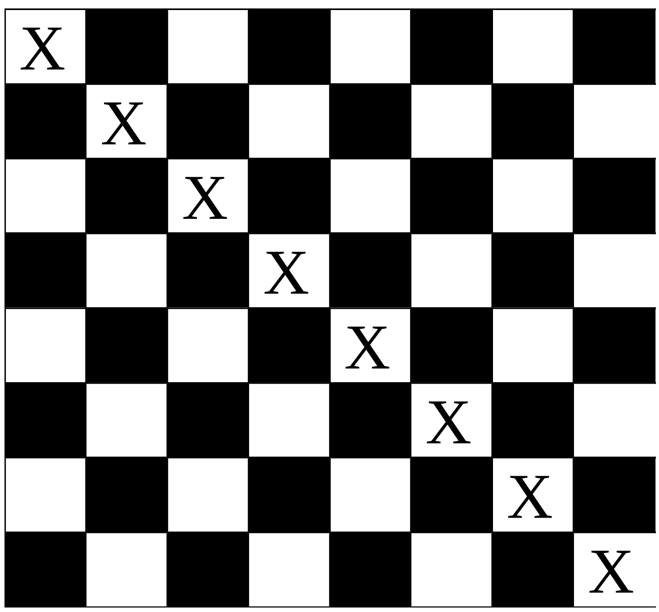
W grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie osoby, które urodziły się w tym samym miesiącu.

Rozwiązanie:
Weźmy bowiem 12 szufladek z nazwami miesięcy i „wkładajmy" do nich osoby, które urodziły się w danym miesiącu. Ponieważ osób jest 13, a szufladek 12, to w jednej z nich muszą być co najmniej dwie osoby.

Zadanie 2.

Jaką maksymalną liczbę wież można ustawić na szachownicy 8 x 8 tak, aby żadne dwie się nie biły?

Rozwiązanie:



8 wież łatwo każdy z Was ustawi, np, na jednej z przekątnych. Gdybyśmy chcieli ustawić więcej niż 8 wież, to co najmniej dwie znajdowałyby się w tej samej kolumnie i biłyby się.

Zadanie 3.
W oparciu o zasadę szufladkową nietrudno wykazać, że wśród mieszkańców Warszawy co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Rozwiązanie:
Rzeczywiście, liczba włosów na głowie człowieka nie przekracza 500 000, natomiast liczba mieszkańców Warszawy przekracza 1 000 000.
Weźmy 500 000 szufladek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 500 000 i wkładajmy do szufladki o danym numerze osoby, które mają taką liczbę włosów na głowie, jak numer szufladki. Ponieważ osób jest ponad 1 000 000, a szufladek 500 000, z naszej zasady wynika, że w jednej lub więcej szufladkach musi się znaleźć więcej niż jedna osoba.

Zadanie 4.
Mamy 20 worków i 20 kotów. Dla każdego worka i każdego kota ustalamy cenę, przy czym worek może kosztować od 2zł 10gr do 4zł, a kot od 10zł do 12zł, a ceny są wielokrotnościami 1gr. Czy można tak ustalić cenę worków i kotów, aby każdy zestaw ,,kot+ worek" był w innej cenie?

Rozwiązanie:
Cena zestawu ,,kot+worek" jest z zakresu od 12zł 10gr do 16zł. Możliwych cen jest 1600-1209=391, natomiast samych zestawów ,,kot+worek" jest 20x20=400. Jest więcej zestawów niż

możliwych cen, więc pewne 2 zestawy mają tę samą cenę.

Zadanie 5.

W klasie jest 37 uczniów. Uzasadnij, że przynajmniej 4 z nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Rozwiązanie:

Szuflady to miesiące. Jest 37=3x12+1 uczniów przyporządkujemy 12 miesięcy to w pewnej szufladzie ,,będzie" 3+1 uczniów. Więc przynajmniej 4 uczniów urodziło się w tym samym miesiącu.

6. Nasze własne przykłady zadań

Zadanie 1.
Są 4 klatki, 4 czarne koty i 5 rudych kotów. Udowodnij, że w każdym wariancie rozmieszczenia kotów w klatkach będzie przynajmniej jedna klatka, w której będą co najmniej 2 koty tego samego koloru.

Rozwiązanie:

I wariant

1	2	3	4
$\underline{Cz}$	Cz	Cz	Cz
$\underline{R}$	R	R	R
$\underline{R}$			

II wariant

1	2	3	4
$\underline{Cz}$	$\underline{Cz}$	$\underline{R}$	$\underline{R}$
$\underline{Cz}$	$\underline{Cz}$	$\underline{R}$	$\underline{R}$
	$\underline{R}$		

III wariant

1	2	3	4
$\underline{Cz}$	Cz	$\underline{R}$	$\underline{R}$
$\underline{Cz}$	R	$\underline{R}$	$\underline{R}$
$\underline{Cz}$			

IV wariant

1	2	3	4
$\underline{Cz}$	Cz	Cz	$\underline{R}$
$\underline{Cz}$	R	R	$\underline{R}$
$\underline{R}$			

V wariant

1	2	3	4
$\underline{R}$	R	$\underline{Cz}$	Cz
$\underline{R}$	Cz	$\underline{Cz}$	R
$\underline{R}$			

W każdym wariancie rozmieszczenia wynika, że w jednej klatce będą co najmniej 2 koty tego samego koloru (wyróżniłyśmy to podkreśleniem).

Zadanie 2.
Mam 49 książek i chcę je rozmieścić na 12 półkach. Ile książek będzie znajdowało się na jednej półce?

Rozwiązanie:
Z zasady tej wynika, że na jednej półce znajdą się co najmniej cztery książki.

Zadanie 3.
W sklepie ogrodniczym właściciele sprzedali 62 duże choinki, a przewieźli je w 31 samochodach. Ile choinek zostało przewiezionych w jednym samochodzie?

Rozwiązanie:
Z zasady Dirichleta wynika, że w jednym samochodzie zostały przewiezione przynajmniej 2 choinki.

Zadanie 4.
W klasie jest 23 uczniów i 19 szafek na książki . Ilu uczniów będzie musiało dzielić szafki z kolegą lub koleżanka?

Rozwiązanie:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
👤 👤	👤 👤	👤 👤	👤 👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤	👤

Z zasady szufladkowej wynika, że przynajmniej 4 osoby będą dzieliły szafkę z kolegą lub koleżanką.

Zadanie 5.
W szpitalu pracuje 8 lekarzy i 8 pielęgniarek. Na nocnym dyżurze jest zawsze 1 lekarz i 1 pielęgniarka. Pracujący lekarze mają od 25 do 60 lat, przy czym każdy kolejny lekarz, począwszy do najmłodszego, jest o 5 lat starszy od poprzedniego. Wiek pielęgniarek kształtuje się pomiędzy 21 a 35 lat (i są to same liczy nieparzyste).
Czy można tak ustawić nocne dyżury w szpitalu, aby na każdym był lekarz i pielęgniarka o innej sumie wieku ?
Rozwiązanie:

Wiek lekarzy:	25	30	35	40	45	50	55	60
Wiek pielęgniarek:	21	23	25	27	29	31	33	35

Rozwiązanie:
Wiek pary: lekarz + pielęgniarka kształtuje się od 46 lat (25 + 21) do 95 lat (60 + 35).
Ilość możliwych par to: 8 x 8 = 64
Ilość możliwych wyników stanowiących sumę wieku pary: lekarz + pielęgniarka to 46 (jest 18 wyników, z których każdy raz się powtarza) 64>46
Jest więcej możliwych zestawień lekarza i pielęgniarki, niż możliwych do uzyskania liczb, stanowiących sumę ich wieku.
Zatem w szpitalu nie można ustawić nocnych dyżurów w taki sposób, aby na każdym pracował lekarz i pielęgniarka o innej sumie wieku. Więc z zasady szufladkowej wynika, że jest 18 dyżurów, w których wiek lekarza i pielęgniarki co najmniej raz się powtarzają.

Literatura

Dr Edward Stachowski, mgr Anna Zalewska *Zbiór zadań z matematyki* wydawnictwo *Ostoja*, Warszawa 1990

Zbigniew Bobiński, Piotr Nędzyński, Mirosław *Uscki Koło matematyczne w szkole podstawowej* wydawnictwo *Aksjomat* Toruń 2008

Kwadrat Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów nr 6, wrzesień 2012

Zasada szufladkowa Dirichleta V Warsztaty Matematyczne I LO – wrzesień 2011

http://pl.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

http://mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0209/kroliki.pdf

Opinia o uczennicach

Julia oraz Patrycja są uczennicami bardzo pilnymi. Wykazują zdolności matematyczne. Zawsze aktywnie uczestniczą w zajęciach. Brały udział w konkursach matematycznych takich jak Międzynarodowy Konkurs KANGUR, Ogólnopolski Konkurs Oxford. Często rozwiązują zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności. Temat i sposób, w jaki przedstawiły go w swojej pracy może zainteresować uczniów na zajęciach pozalekcyjnych. Opracowany materiał zawiera również własne przykłady zadań matematycznych uczennic.