Szkoła Podstawowa nr 151 w Krakowie

Barbara Doncer

CO ŁĄCZY SPACER PO MOSTACH I GRY LOSOWE, CZYLI GRAFY W WIELU ODSŁONACH

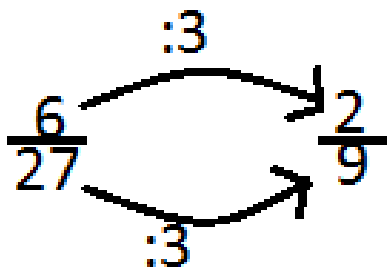
opiekun: mgr Wiesława Kałużny

Kraków, 2014r.

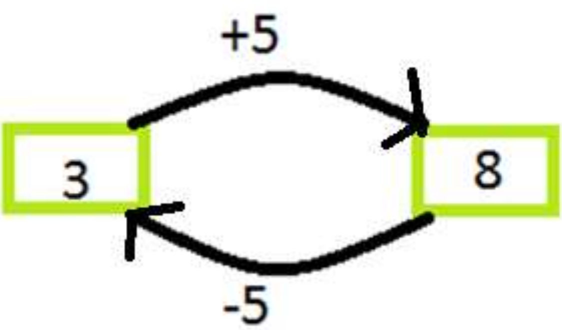
Wstęp

Jak rozstrzygnąć, kto ma większe szanse na zwycięstwo w grach losowych, jak zaplanować spacer po rynku, tak aby iść tylko raz przez każdą z odchodzących od niego ulic, jak narysować kopertę bez odrywania ręki od kartki papieru, jak wyznaczyć najkrótszą drogę do celu? W odpowiedziach na wszystkie te pytania bardzo pomocny okazuje się **GRAF –** przedmiot niniejszej pracy. Grafy poznałam już w pierwszej klasie szkoły podstawowej. Pomagały mi wówczas ilustrować zadania z treścią na dodawanie i odejmowanie liczb w zakresie 10. Wyglądało to mniej więcej tak:

Obecnie, w klasie szóstej, korzystam z analogicznie wyglądającego grafu, ilustrującego rozszerzanie oraz skracanie ułamków, np.:

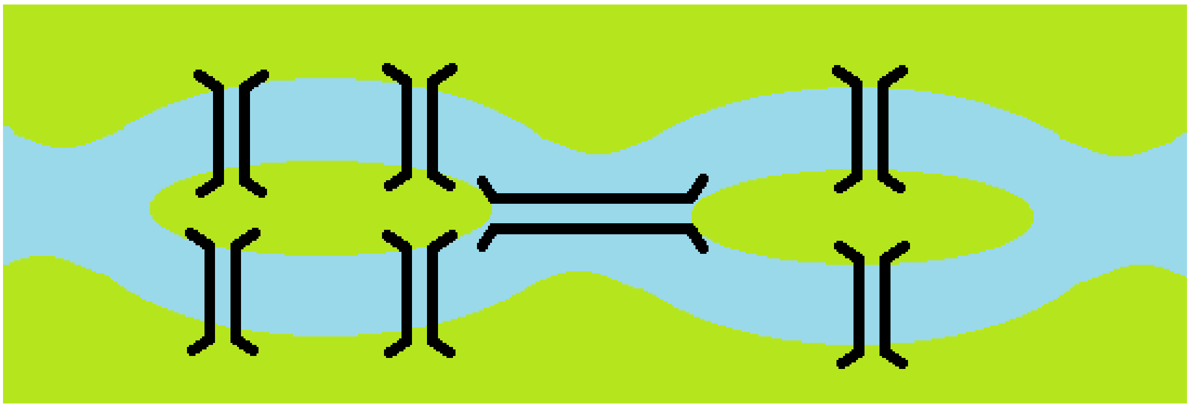


Sądziłam, że to jedyna forma grafu, dlatego zaintrygowało mnie, gdy Pani ucząca mnie matematyki napomknęła, że grafy mogą mieć bardzo różną postać. Grafy odsłoniły przede mną całe swe bogactwo i zainspirowały do napisania tej pracy. Wszystkie zawarte w niej zadania i rysunki opracowałam i wykonałam samodzielnie, opierając się na literaturze źródłowej.

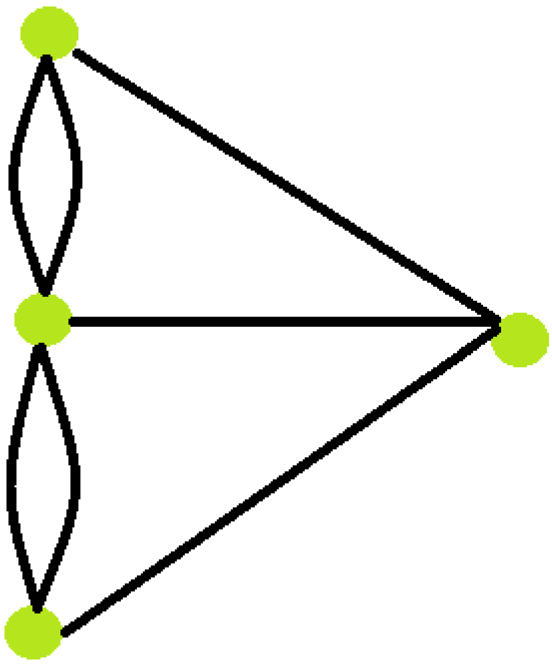


Historia grafów

Rozwój teorii grafów zapoczątkował w 1736 roku Leonard Euler. Pomysł wziął się od problemu z mostami królewieckimi w Królewcu, który obecnie należy do Rosji i nosi nazwę Kaliningrad. Przez Królewiec płynęła rzeka, w której rozwidleniach znajdowały się dwie wyspy. Zbudowano siedem mostów, tak że jeden z nich łączył obie wyspy, pozostałe zaś łączyły wyspy z brzegami rzeki (zob. rysunek). Mieszkańcy Królewca zadawali sobie pytanie: Czy możliwe jest przejście przez wszystkie mosty w taki sposób, aby przez każdy przejść tylko raz i powrócić do punktu wyjścia?



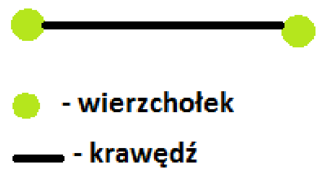
Sytuację opisaną wyżej możemy przedstawić w formie grafu:

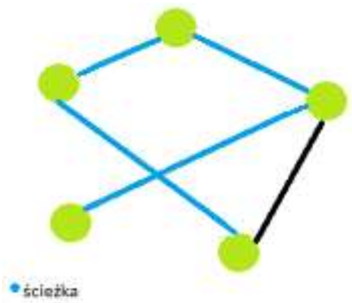


Aby odpowiedzieć na pytanie mieszkańców Królewca, musimy zastanowić się, czy graf jest unikursalny (por. str. 16).

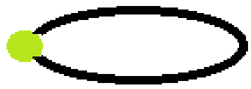
Podstawowe pojęcia

Trzy podstawowe pojęcia z teorii grafów to:

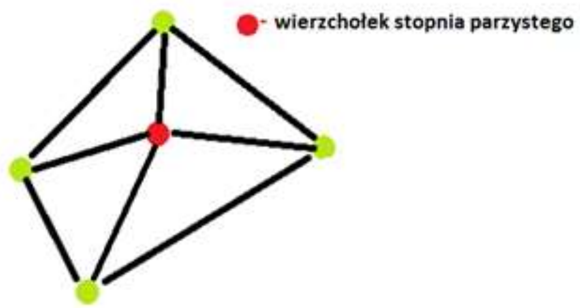




Ścieżka to ciąg krawędzi między dwoma wierzchołkami.



Pętla to krawędź łącząca wierzchołek z nim samym.



Wierzchołek stopnia parzystego to wierzchołek, od którego odchodzi parzysta liczba krawędzi.

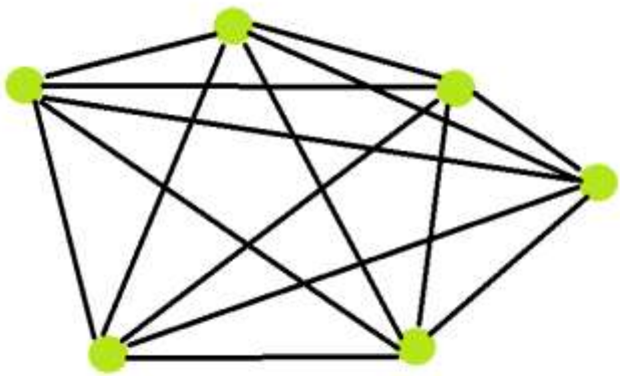
Wierzchołek stopnia nieparzystego to wierzchołek, od którego odchodzi nieparzysta liczba krawędzi.

Typy grafów

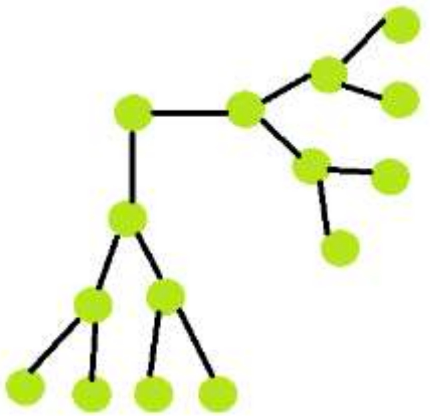
Wyróżniamy kilka typów grafów:

- grafy puste - grafy, w których wierzchołki nie są połączone ze sobą krawędziami

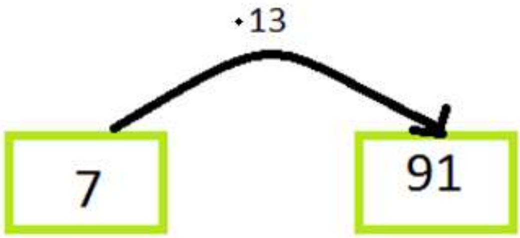
- grafy pełne - grafy, w których każdy wierzchołek jest połączony z wszystkimi innymi wierzchołkami

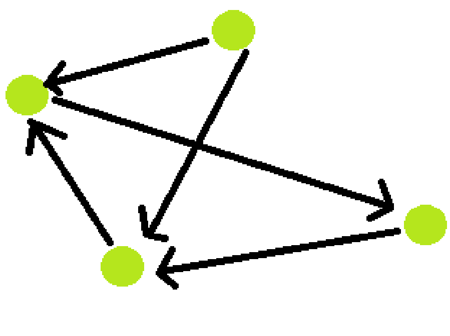


- drzewa - grafy, w których z każdego wierzchołka drzewa można dotrzeć do innego wierzchołka tylko w jeden sposób

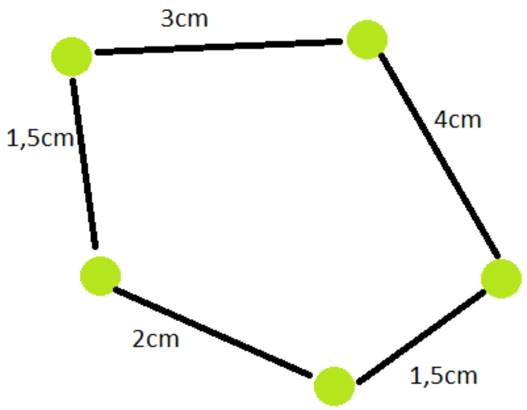


- grafy skierowane - grafy, w których krawędzie zakończone są strzałkami

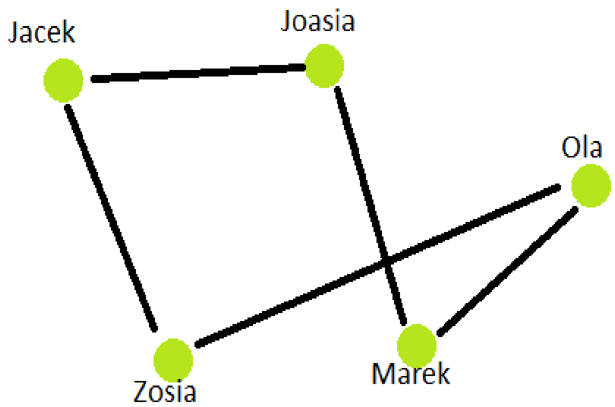




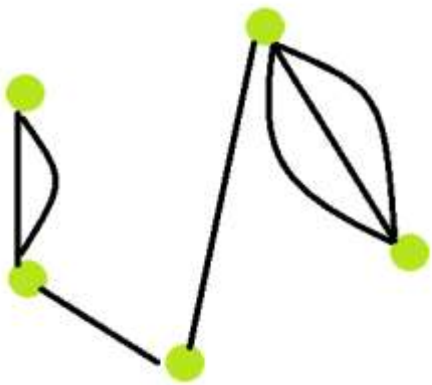
- grafy ważone - grafy, w których każdej krawędzi grafu przypisana jest jakaś wartość, która może oznaczać np. odległość między punktami (miejscowościami, itd.)



- grafy etykietowane - grafy, w których każdy wierzchołek posiada swoją nazwę

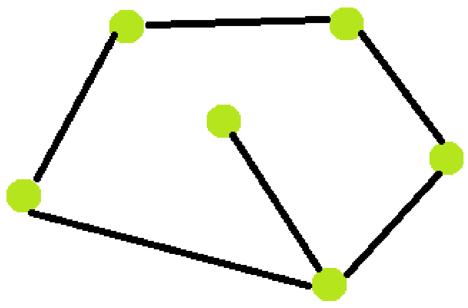


- multigrafy - grafy, w których wybrane dwa wierzchołki mogą być połączone dowolną liczbą krawędzi

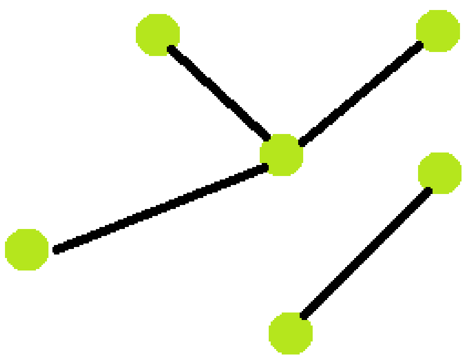


- grafy spójne to grafy, w których dwa dowolne wierzchołki można połączyć ścieżką.

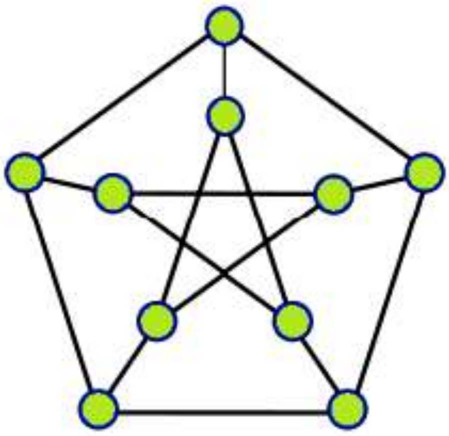
/źródło: wikipedia.pl/



- grafy niespójne - grafy, w których nie da się połączyć dwóch dowolnych wierzchołków ścieżką



- graf regularny - graf, w którym wszystkie wierzchołki mają taki sam stopień



/źródło: wikipedia.pl/

Zadania na grafach

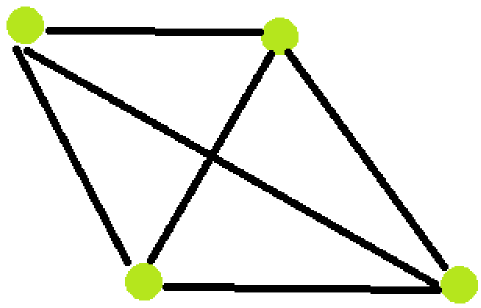
Wszystkie zadania zawarte w tym podrozdziale opracowałam samodzielnie. Mają one na celu ukazanie bogactwa form grafów i różnorodności problemów, które można rozwiązywać przy ich pomocy. Nie było natomiast moim zamiarem stworzenie zadań o wysokim poziomie trudności.

Zad.1

Czy można stworzyć graf pełny z czterema wierzchołkami?

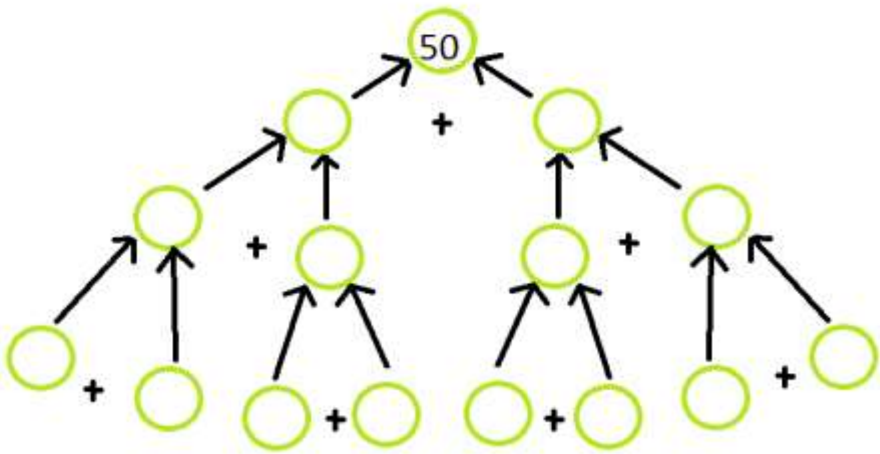
Odp.

Tak, oczywiście. Graf pełny da się stworzyć przy dowolnej liczbie wierzchołków.



Zad.2

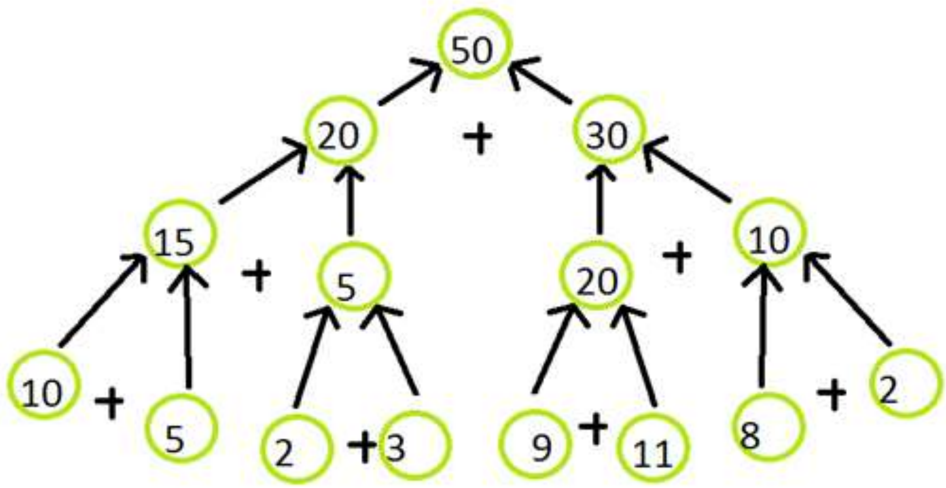
Uzupełnij graf.



Zauważmy, że zadanie to ma wiele rozwiązań.

Odp.

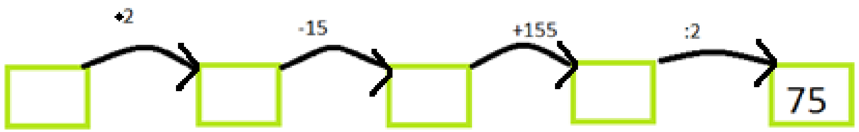
Np.



Zauważmy, że zadanie to ma wiele rozwiązań.

Zad.3

Uzupełnij graf.



Odp.

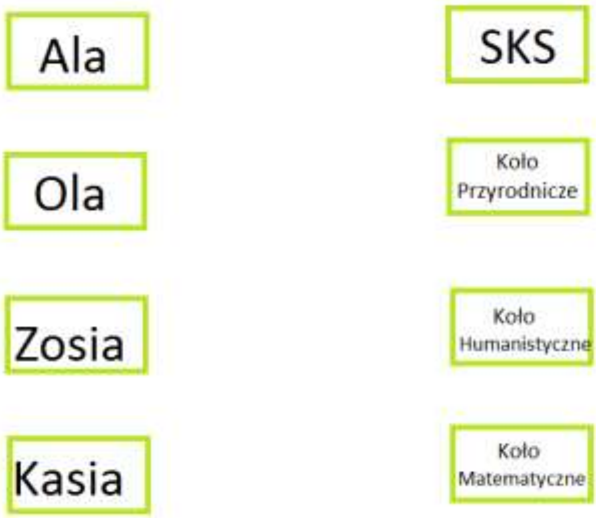
Zadanie to, w przeciwieństwie do poprzedniego, posiada jedno rozwiązanie.

Zad.4

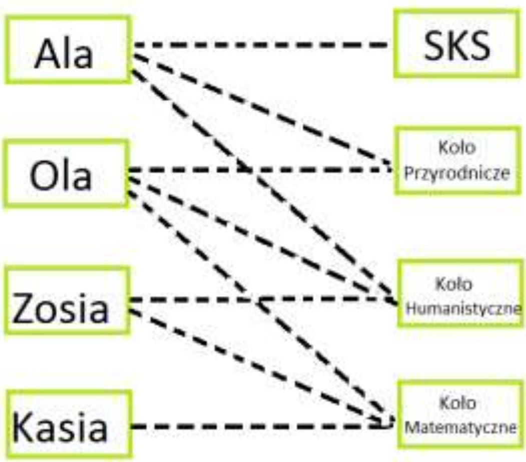
W szkole, do której uczęszczają Ala, Ola, Zosia oraz Kasia organizowane są 4 koła: humanistyczne, matematyczne, przyrodnicze oraz SKS. W każdym kole pozostało po 1 miejscu, więc dziewczynki, które chcą na nie chodzić, muszą się rozdzielić. Ala ma zamiar przyłączyć się do koła przyrodniczego, humanistycznego lub na SKS, Ola do przyrodniczego, humanistycznego lub matematycznego, Zosia do humanistycznego lub matematycznego, zaś Kasia do matematycznego. Czy mogą się podzielić tak, aby każda była zadowolona, a jeśli tak, to jak?

Odp.

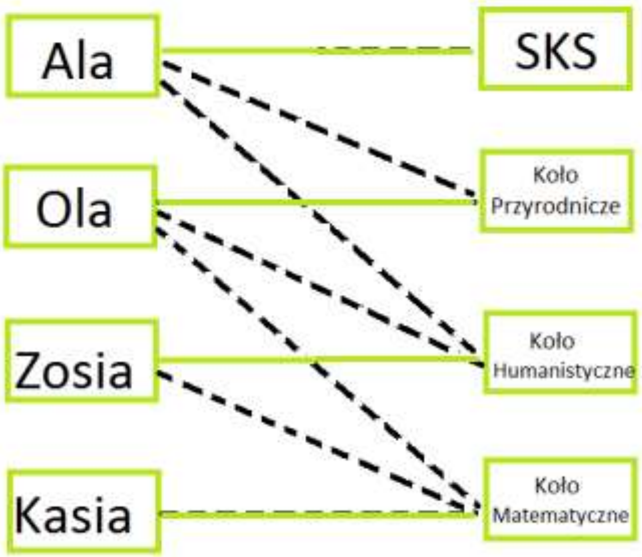
Dane zawarte w treści zadania możemy zilustrować w postaci grafu etykietowanego.



Zaznaczmy wszystkie możliwe sytuacje.



Oto graf, na którym pozostawiono tylko wybrane krawędzie:



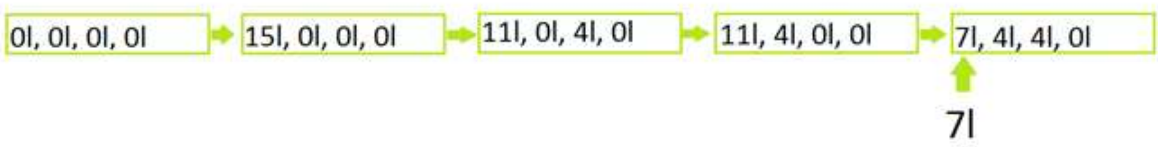
Z danych wynika, że Ala może uczęszczać na SKS, Ola na koło przyrodnicze, Zosia na koło humanistyczne, zaś Kasia na koło matematyczne.

Zad.5

Jak odmierzyć 7l wody za pomocą butelek o pojemnościach: 15l, 12l, 4l, 2l. Czy jest to możliwe?

Odp.

Rozwiązanie zadania zilustruję na grafie:

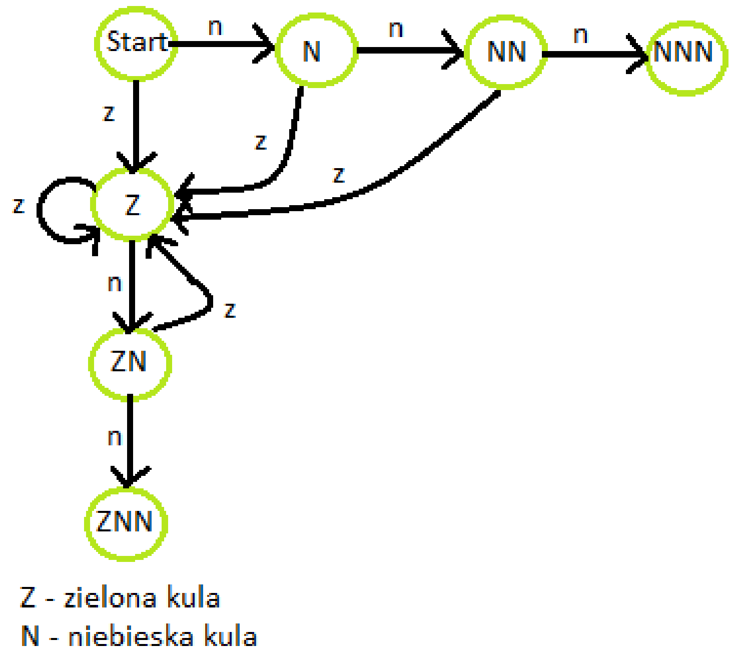


Zauważmy, że aby odmierzyć 7l wody, wystarczy, abyśmy mieli do dyspozycji naczynia o pojemności 15l i 4l. Wtedy wystarczyłoby napełnić wodą butelkę o pojemności 15l i odlać z niej dwukrotnie 4l wody (odmierzając wodę butelką o pojemności 4l). Oczywiście, po pierwszym odmierzeniu wody należałoby ją wylać.

Zad.6

Dwaj koledzy postanowili zagrać ze sobą w następującą grę. Z pudełka, które zawiera zielone i niebieskie kule, będą losować z zamkniętymi oczami ze zwracaniem kulę tak długo, aż albo wylosowana zostanie pod rząd kula zielona, niebieska i niebieska – wtedy zwycięży Maciek – albo kula niebieska zostanie wylosowana trzy razy z rzędu – wówczas wygra Jacek. Który z chłopców ma większe szanse na wygraną?

Zilustruję sytuację opisaną w treści zadania na grafie.

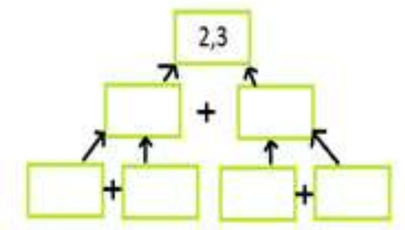


Odp.

Większe szanse ma Maciek. Marek może wygrać tylko wtedy, gdy od razu pod rząd zostaną wyciągnięte trzy niebieskie karteczki.

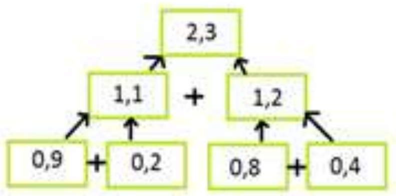
Zad.7

Uzupełnij graf.



Odp.

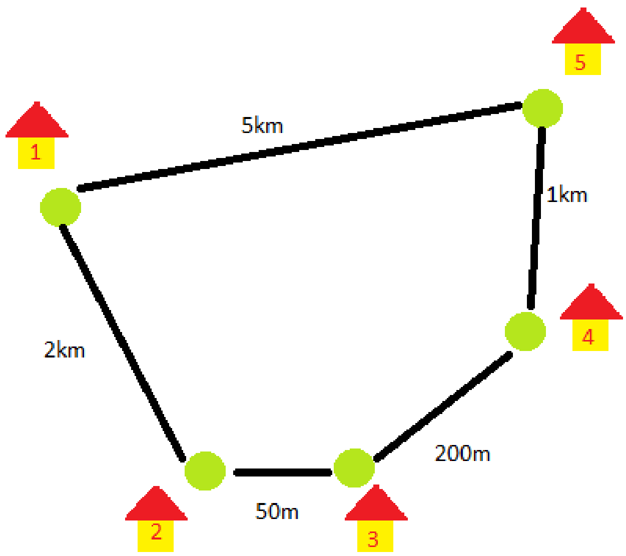
Np.



Tu, podobnie jak w zadaniu 2, rozwiązanie nie jest jednoznaczne.

Zad.8

Mieszkańcy domu nr 2 i nr 5 oraz nr 2 i nr 1 postanowili się odwiedzić. Jaką najkrótszą drogę muszą przebyć mieszkańcy domu nr 2, aby odwiedzić mieszkańców domu nr 5? A jaką najkrótszą drogę muszą przebyć mieszkańcy domu nr 2, aby odwiedzić mieszkańców domu nr 1?



Zauważmy, że najkrótsza droga między domami nr 1 i nr 2 wynosi 2km, zaś długość najkrótszej drogi między domami nr 2 i nr 5 wynosi 200m + 1km + 50m = 200m + 1000m +50m = 1250m = 1km 250m.

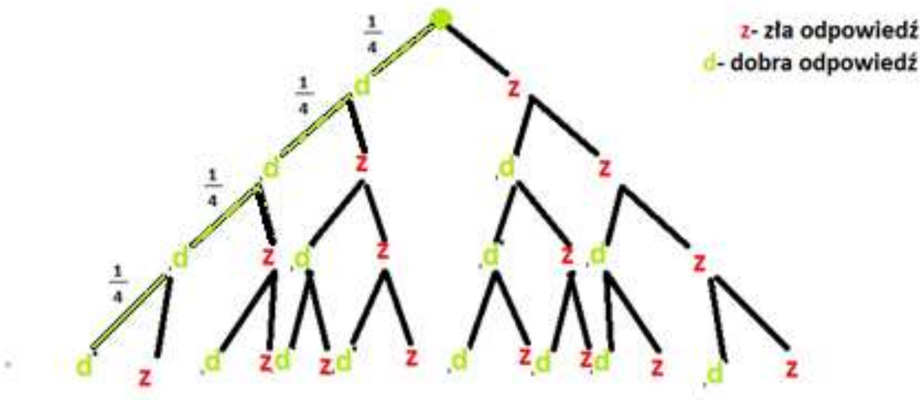
Odp.

Mieszkańcy domu nr 2, aby odwiedzić mieszkańców domu nr 5, muszą przebyć 2km, zaś aby odwiedzić mieszkańców domu nr 1 muszą przebyć 1km250m.

Zad.9

Antek pisze w szkole niezapowiedzianą kartkówkę. Składa się ona z 4 pytań z 4 odpowiedziami (a, b, c ,d). Do każdego pytania tylko jedna odpowiedź jest poprawna. Chłopiec zupełnie nic nie umie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie jego odpowiedzi będą poprawne?

Zilustruję sytuację opisaną w treści zadania na grafie.



$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$$

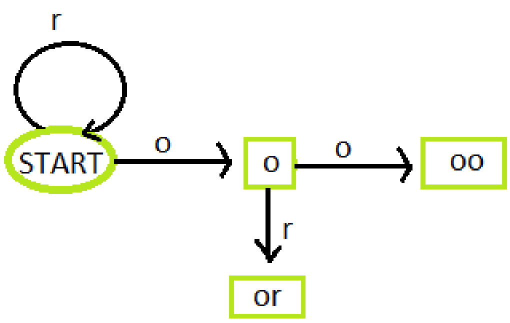
Odp.

Prawdopodobieństwo, że wszystkie odpowiedzi Antka będą poprawne wynosi $\frac{1}{256}$.

Zad.10

a) Ola i Julka rzucają jedną monetą. Jeśli wypadnie ciąg: orzeł, reszka - wygrywa Ola. Jeśli natomiast wypadnie ciąg: orzeł, orzeł – wygrywa Julka. Która z dziewczynek ma większe szanse na wygraną?

Zilustruję sytuację opisaną w treści zadania na grafie.



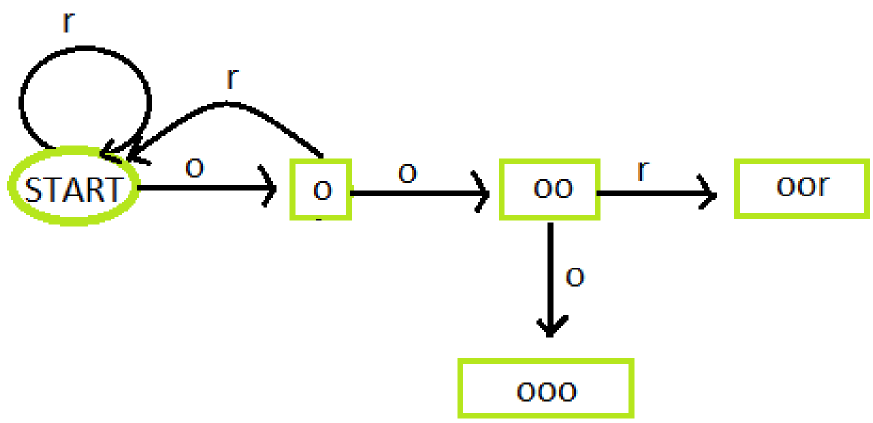
Na grafie widać, że gdy wyrzucimy reszkę, cały czas wracamy do punktu wyjścia. Gdy zaś wyrzucimy orła, do końca gry pozostał nam już na pewno tylko jeden rzut. Jeśli wypadnie reszka – wygrywa Ola, jeśli zaś wypadnie orzeł – wygrywa Julka. Z tego wynika, iż szanse dziewczynek wynoszą po 50%.

Odp.

Dziewczynki mają równe szanse na wygraną.

b) Czy dziewczynki miałyby równe szanse na wygraną, gdyby Ola wygrywała przy ciągu: orzeł, orzeł, reszka, a Julka przy ciągu: orzeł, orzeł, orzeł?

Zilustruję sytuację opisaną w treści zadania na grafie.



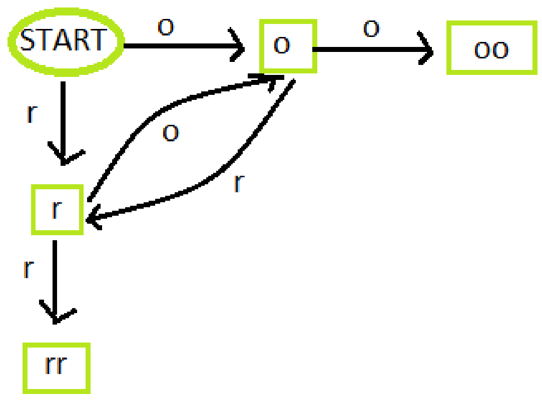
Na grafie widać, iż póki nie wyrzucimy dwóch orłów, cały czas cofamy się na start. Gdy orzeł zostanie już dwukrotnie wyrzucony, ostatni rzut decyduje o rozstrzygnięciu gry. Można wywnioskować, że szanse dziewczynek rozkładają się po 50%.

Odp.

Dziewczynki mają równe szanse na wygraną.

c) A jaki byłby rozkład szans przy założeniu, że jeśli wypadnie ciąg: orzeł, orzeł – wygrywa Ola, a jeśli wypadnie ciąg: reszka, reszka – wygrywa Julka?

Zilustruję sytuację opisaną w treści zadania na grafie.



Na grafie można dostrzec geometryczną symetrię.

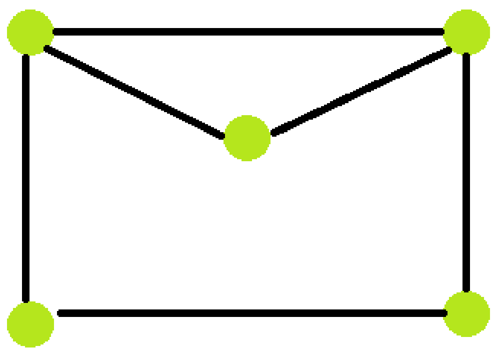
Odp.

Dziewczynki mają równe szanse na wygraną.

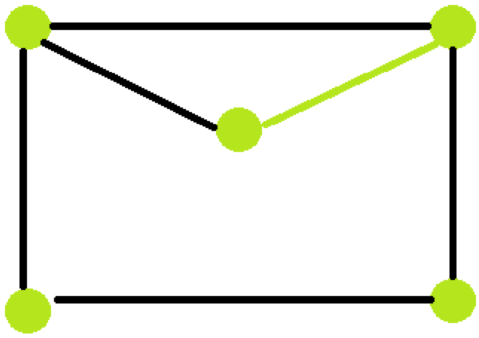
Graf unikursalny

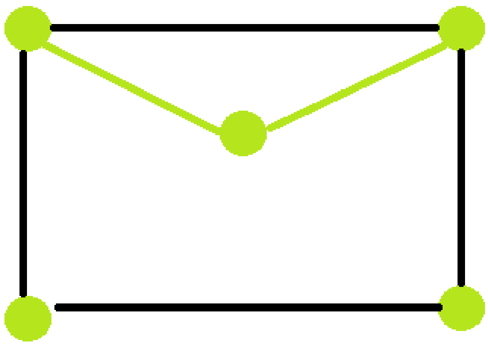
Graf unikursalny to taki, który można narysować „nie odrywając ołówka od kartki papieru". O grafie unikursalnym mówimy wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki są stopnia parzystego lub występują dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

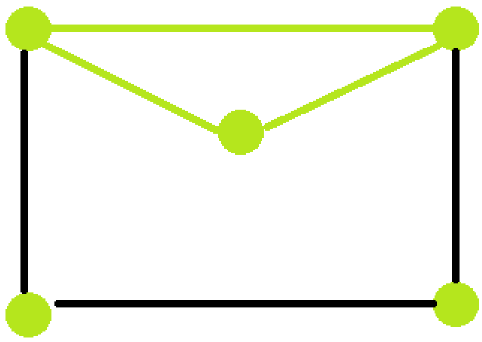
Jednym z najbardziej znanych grafów unikursalnych jest graf zwany „kopertą". Ma on dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

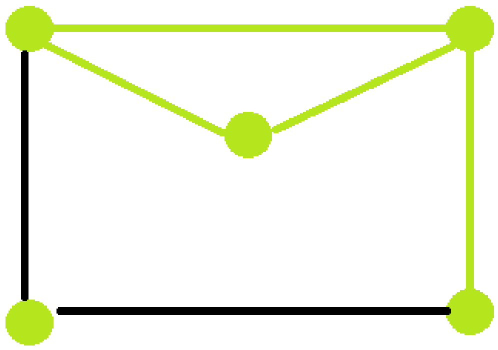


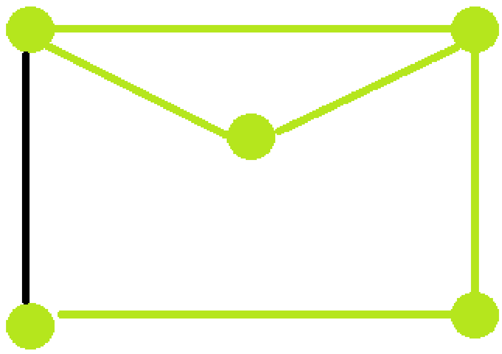
A oto sposób narysowania powyższego grafu bez odrywania ręki od kartki papieru:

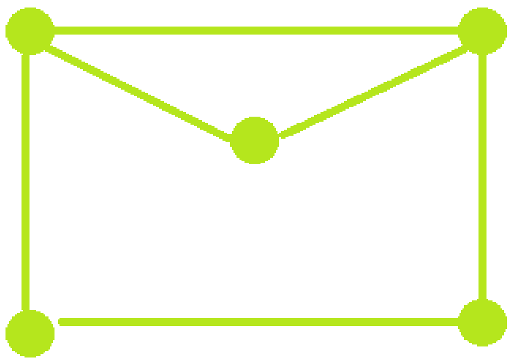




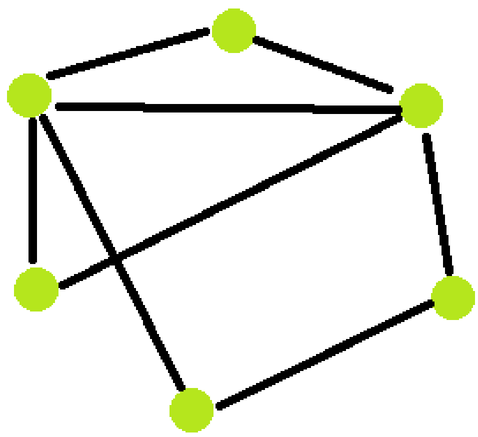




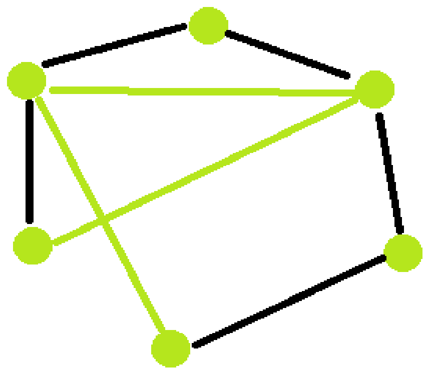


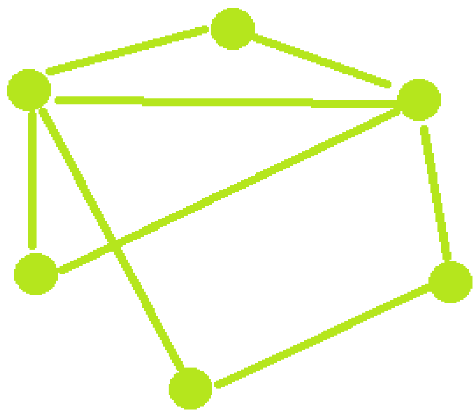


W tym przypadku mamy z kolei przykład grafu o wszystkich wierzchołkach stopnia parzystego.



Graf ten możemy narysować w następujący sposób:





Wracając do pytania mieszkańców Królewca naświetlonego na str. 2, możemy stwierdzić, że graf, za pomocą którego zobrazowaliśmy problem, nie jest unikursalny, gdyż wszystkie jego wierzchołki są stopnia nieparzystego. Niestety, nie da się więc przejść wszystkich królewieckich mostów, przechodząc przez każdy tylko raz.

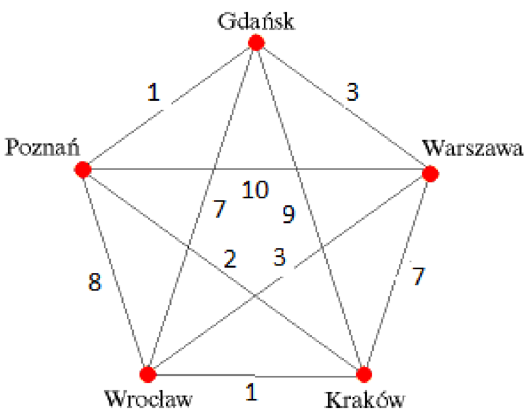
Cykl Hamiltona

Cykl Hamiltona to ścieżka przechodząca przez wszystkie (poza początkowym) wierzchołki grafu dokładnie jeden raz i kończąca się w wierzchołku startowym.

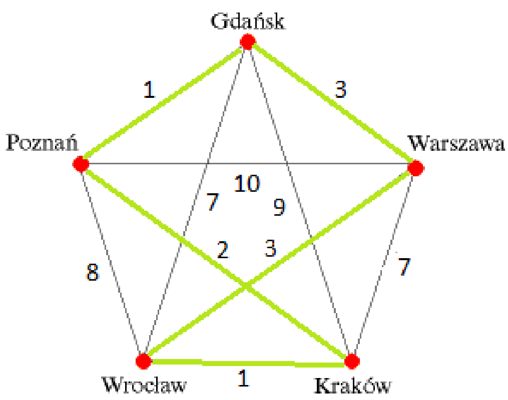
Na postawie tak sformułowanej definicji nie możemy określić jednoznacznie, na których grafach można wykonać ten cykl. Na dwóch grafach unikursalnych przedstawionych w poprzednim podrozdziale da się wykonać Cykl Hamiltona. Na tej podstawie wywnioskowałam, że cykl ten można wykonać na grafie unikursalnym.

Problem komiwojażera

Komiwojażer chce odwiedzić pewną liczbę miast i wrócić do punktu wyjścia. Problem polega na tym, iż chce on znaleźć najkrótszą trasę. Np.:



Załóżmy, że komiwojażer wyrusza z Gdańska i chce odwiedzić Warszawę, Kraków, Wrocław i Poznań, a następnie wrócić do punktu wyjścia (w tym przypadku jest to Gdańsk). Po przyjrzeniu się grafowi widać, iż najkrótsza droga będzie wyglądała następująco:



Gdańsk →Poznań→Kraków→Wrocław→Warszawa→Gdańsk

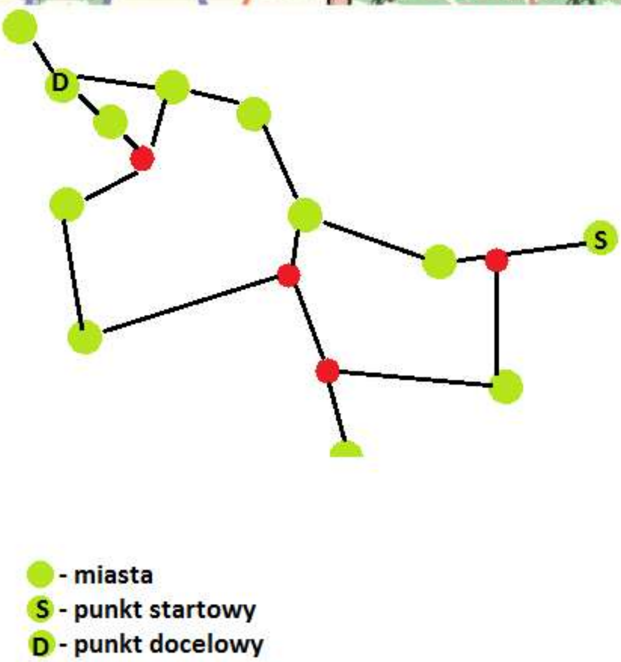
1+2+1+3+3=10

Odp.

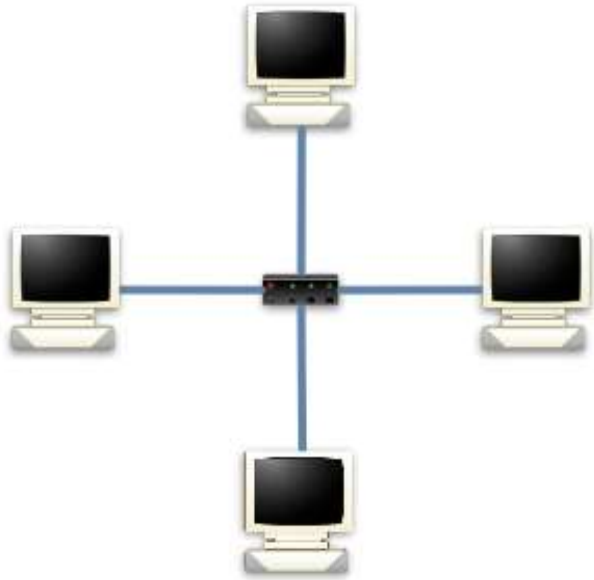
Komiwojażer pokona drogę równą 10 jednostek długości.

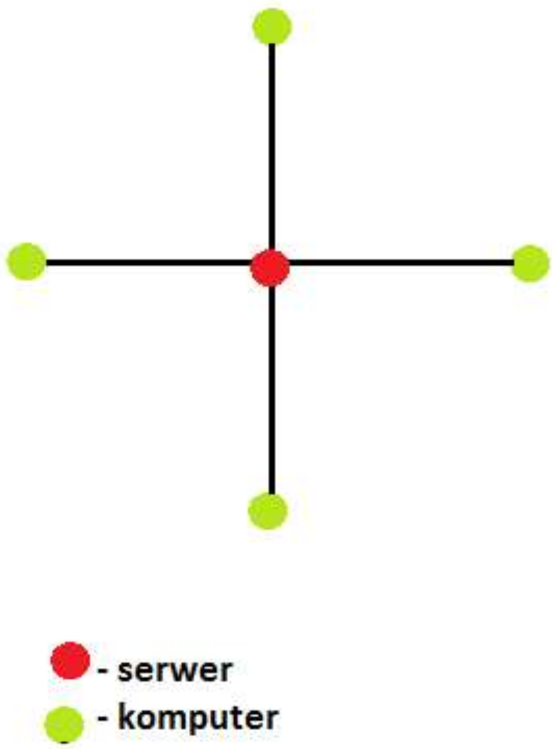
Inne zastosowania grafów:

- mapy – aby dowiedzieć się, jaką najkrótszą drogą można dostać się z jednej miejscowości do drugiej, wykorzystujemy graf, którego wierzchołki będą odpowiadały miejscowościom, a krawędzie drogom.

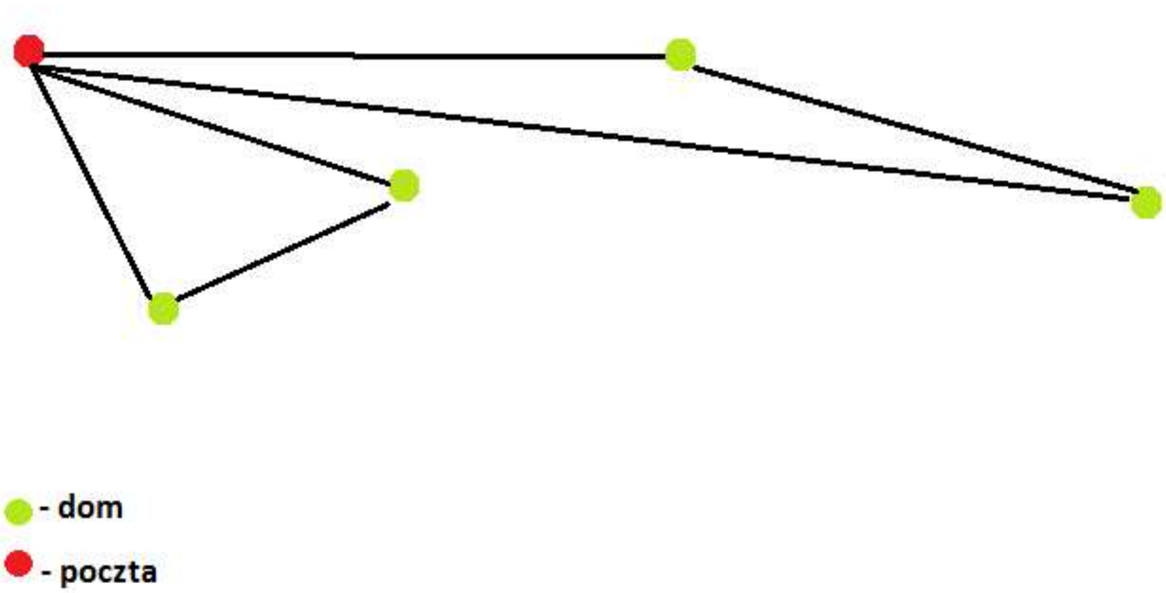


- sieci – sieć komputerowa zbudowana jest z komputerów, które przesyłają między sobą informacje. Komputery w danej sieci są reprezentowane przez wierzchołki grafu, a połączenia między nimi przez krawędzie.





- praca doręczyciela – listonosz musi przejść przez wszystkie domy, a następnie wrócić na pocztę. W wyborze optymalnej drogi pomoże mu graf.



Podsumowanie

Przedłożona praca porusza jedynie niewielką część zagadnień związanych z teorią grafów i jej możliwymi zastosowaniami. Moim celem było wyjaśnienie podstawowych pojęć i zobrazowanie ich przy pomocy prostych przykładów. Prezentowane zadania miały unaocznić różnorodność i przydatność grafów w rozwiązywaniu problemów – nie tylko natury czysto matematycznej, ale również tych z życia codziennego.

Wykaz literatury źródłowej:

Komitet Organizacyjny przy Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Miniatury Matematyczne, Toruń 2000.

Płocki, Adam, Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach, Bielsko-Biała 1997.

Steinhaus, Hugo, Kalejdoskop matematyczny, Warszawa 1954.

Wilson, Robin J., Wprowadzenie do teorii grafów, Warszawa 2000.

www.edu.i-lo.tarnow.pl

www.mini.pw.edu.pl

www.wikipedia.pl

Spis treści