Michał Popiel

Opowieść o zwykłych rzeczach, czyli moja matematyka

I znowu mamy nowy dzień…

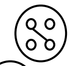
Mam na imię Michał i opowiem Wam o swoim zwykłym dniu.
Jest godz. 7^{00}. Otwieram szafę i widzę 7 bluz, 3 koszule i 6 par spodni.
I pierwsza myśl, ile mam możliwości ubrania się?

1) *Zakładam bluzę lub koszule i do tego spodnie*
   10·6=60
2) *Zakładam bluzę i koszulę i spodnie*
   7·3·6 =126

I ogólnie:
Gdybym miał n bluz, k koszul i s spodni to możliwości byłoby …..

1) (n+k)·s
2) n·k·s

Dziś wybieram koszulę. No tak , od rana prześladuje mnie pech – urwał się guzik!
I kolejne pytanie: Na ile sposobów mogę go przyszyć (tak, aby szycia nie pokrywały się, liczę tylko „szycia” na wierzchu)?

Jedno „szycie” np. 	6 możliwości
Dwa „szycia” np. 	15 możliwości
Trzy „szycia”	20 możliwości
cztery „szycia”	15 możliwości
Pięć „szyć”	6 możliwości
Sześć „szyć”	1 możliwości
Zatem razem	63 możliwości

I pojawiają się następne pytania:

1. Ile będzie możliwości przyszycia przy innej liczbie dziurek?
2. Czy ułożenie dziurek na guziku ma znaczenie dla ilości szyć?
3. Czy przyszyciem jest też połączenie dziurki z „brzegiem”?

Szkoda, że rano jest tak niewiele czasu… A tyle pytań rodzi się w głowie…
Zakładam, że nie przyszywam guzików w ten sposób, że łączę dziurkę z „brzegiem”, a same dziurki są rozmieszczone tak, że tworzą wierzchołki wielokąta foremnego- ułożenie dziurek nie ma znaczenia. Szycia nie mogą się pokrywać .

Badam zagadnienie dla guzików z inną ilością dziurek.

Dla 1 dziurki – 0 możliwości
Dla 2 dziurek – 1 możliwość
Dla 3 dziurek – 7 możliwości

Liczba szyć	Dla 5 dziurek	Dla n dziurek
1 szycie	5·4/2=10	n· (n-1)/2=x
2 szycia	10·9/2!= 45	x· (x-1)/2!
3 szycia	10·9·8/3!	x· (x-1) · (x-2)/3!
s szyć		**x· (x-1) ·…· (x-(s-1))/s!**

Gdybym zdecydował, że szycia mogą się nakładać na siebie to dla n dziurek i s szyć wzór byłby taki: x^s

Czas już wychodzić do szkoły, ale nasuwa się jeszcze jedno pytanie:
„ Na ile sposobów mogę zapiąć koszulę?”
Mam 7 guzików:

1) Nie zapinam żadnego
2) Zapinam 1 guzik – 7 możliwości
3) Zapinam 2 guziki - 7·6=42 możliwości

Ogólnie:
Rozważania sprowadzają się do obliczeń wcześniejszych.
Zatem dla n guzków, z czego chcę zapiąć z guzików mamy n·(n-1)·…·(n-(z-1))/z!

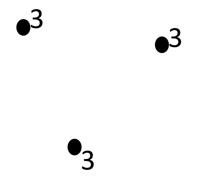
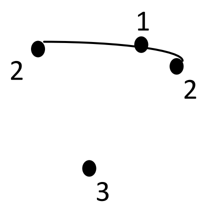
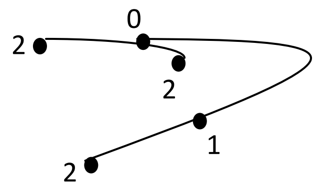
Hmm, jeszcze pyszne śniadanie… Ciekawe, co dziś serwuje kuchnia? Widzę, że dziś do wyboru są: szynka, sałata, pomidor, rzodkiewka, ogórek i żółty ser. Zawsze zjadam kanapki z 3 różnymi produktami. Jednak nie lubię, gdy na jednej kanapce jest ogórek i pomidor. Kanapka z samych warzyw też nie jest mile widziana/zjadana.

Ile różnych kanapek mogę sobie przygotować? Ciekawe…
Oznaczam: sz – szynka, żs – żółty ser,
„sz+żs” 4 kanapki
„sz-żs” 4·3/2 -1 5 kanapek (ponieważ nie chcę tej i z ogórkiem i pomidorem)
„żs-sz” 4·3/2 -1 5 kanapek (ponieważ nie chcę tej i z ogórkiem i pomidorem)
Zatem razem mam 14 różnych kanapek do wyboru.

Czas śniadania niepowrotnie przeminął. Teraz raźno maszeruję do szkoły.
Czas przywitać się z kolegami. Szybko ustalam, że jeśli wszyscy moi koledzy są dziś w szkole (cała klasa liczy 26 osób), to będzie:
moich powitań – 25
wszystkich powitań w klasie – 26·25/2
I ogólnie: dla n-osobowej klasy powitań będzie $n\cdot(n-1)/2$

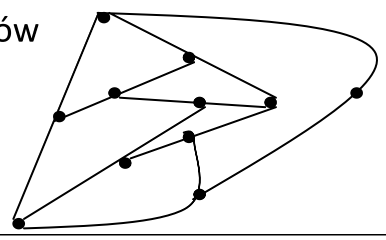
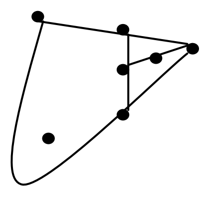
Matematyki na matematyce nie będę opisywał. Ale na przerwach też się nie nudzę. Kolega pokazał mi grę „Kropki”. W grę grają 2 osoby. Najpierw na kartce stawia się 3 kropki. Następnie gracze po kolei łączą 2 dowolne kropki i na nowej linii stawiają następną kropkę. Linie nie mogą przecinać się z innymi liniami. Nie mogą też zaczynać i kończyć się na tej samej kropce.
Od razu pojawiają się pytania:

1) Czy gra zawsze się skończy?
2) Jak grać, aby wygrać ?

Początek gry	**Po pierwszym ruchu**	**Po drugim ruchu**
		

Aby lepiej się rozważało grę zastosowałem pomysł pisania liczb przy kropkach. Oznaczają one liczbę możliwych do wykonania linii wychodzących z tej kropki.

1) Gra zawsze się skończy, ponieważ suma liczb przy kropkach po każdym ruchu zmniejsza się o 1.

Maksymalna liczba ruchów	Minimalna liczba ruchów
8 ruchów 	 4 ruchy

2) Aby wygrać stosuję następującą zasadę:
gdy zaczynam, wtedy jeśli ilość nie użytych połączeń powinna być nieparzysta;
gdy jestem drugi, wtedy jeśli ilość nie użytych połączeń powinna być parzysta.

Podobnie można „rozpracować” grę, gdy zmieni się liczba kropek na początku rozgrywki.

W drodze do domu myślę już tylko o frykasach, które przygotowuje dla mnie mama.
Obiad jest jak zwykle tak pyszny, że nawet nie myślę o matematyce. Potem jeszcze obowiązek, czyli zadanie domowe i w końcu czas wolny!

Najpierw rozgrywka z młodszym 6 – letnim bratem w SUPERFARMERA.
I pytanie: czy moja znajomość matematyki daje mi przewagę w tej grze?
Przecież autorem tej gry jest Karol Borsuk, znany polski matematyk.
Wspominając poprzednie nasze rozgrywki, wiem, że brat ma spore szanse wygrania.
Po dzisiejszej przegranej postanowiłem jednak przeliczyć to i owo.
Przeanalizowałem kostki.
Po pierwsze jest to dwunastościan foremny- bryła platońska. Autor miał do wyboru pięć tego typu brył. Dlaczego taki wielościan wybrał? Najwyraźniej, czworościan foremny i ośmiościan foremny miały za mało ścian, a dwudziestościan foremny musiałby być dość duży, aby na ścianach zmieściły się rysunki. Ponadto, trudno odróżnić, która ściana jest równoległa do podstawy.

zwierzę	Ilość ścian z tym rysunkiem i szansa jego wyrzucenia			
	Czerwona kostka		Żółta kostka	
Królik	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
Owca	2	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{4}$
Świnia	2	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{12}$
Koń	1	$\frac{1}{12}$	0	0
krowa	0	0	1	$\frac{1}{12}$
Lis	1	$\frac{1}{12}$	0	0
wilk	0	0	1	$\frac{1}{12}$

Zatem przy rzucie dwiema kostkami mam:

	k	k	k	k	k	k	o	o	ś	ś	ko	l
k												
k												
k	$\frac{36}{144}=\frac{1}{4}$ szansa wyrzucenia pary królików											
k												
k												
k												
o							$\frac{6}{144}=\frac{1}{24}$					
o												
o												
ś									$\frac{2}{144}=\frac{1}{72}$			
kr												
w												$\frac{1}{144}$

Przebieg gry bardzo zmienia wyrzucenie wilka lub lisa.
Wyrzucenie wilka i lisa to $\frac{1}{144}$.
Wyrzucenie wilka, bez lisa to $\frac{11}{144}$.
Wyrzucenie lisa bez wilka to $\frac{11}{144}$.
Zatem razem $\frac{23}{144}$, około $\frac{1}{6}$. Zatem średnio co 6 rzut wypada lis lub wilk. Rzutów jest w tej grze bardzo dużo, więc w grze duże znaczenie ma „szczęście”.
Tabela pomaga mi zaplanować kilka strategii. Chcę wypróbować grę prawie samymi królikami – liczba kartoników z królikami mnie ogranicza, szczególnie, gdy gra więcej osób.

Teraz czas tylko dla mnie i dla … matematyki.
Przede mną leży pasek papieru. Czy w nim też jest zaklęta matematyka ?
Ile i jakie zagięcia powstaną, gdy będę ten pasek składał na pół?
Jaki będzie układ zgięć po 7 zgięciach, po n- zgięciach?

I sposób
Moje oznaczenia
zagięcie „w górę” ∨ - oznaczam go ↑
zagięcie „w dół” ∧ - oznaczam go ↓
Wykonuję 1 złożenie. Powstaje ↑
Wykonuję 2 złożenia – Powstaje ↓ ↑ ↑
Wykonuje 3 złożenia – powstaje ↓↓↑↑↓↑↑

Zauważam, że te zagięcia, które były wcześniej wykonane zostają w tym samym miejscu, między nimi na zmianę pojawiają się zagięcia „w dół „ i „ w górę”, zawsze pierwsze jest „w dół”

Liczba złożeń kartki																																Liczba zagięć
1 złożenie																↑																2^0
2 złożenia								↓								↑								↑								2^0+2^1
3 złożenia				↓				↓				↑				↑				↓				↑				↑				2^0+2^1
4 złożenie		↓		↓		↑		↓		↓		↑		↑		↑		↓		↓		↑		↑		↓		↑		↑		
5 złożeń	↓	↓	↑	↓	↓	↑	↑	↓	↓	↓	↑	↑	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↑	↓	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↑	↑	↓	↑	↑	
n-złożeń																																$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}$

Nie jest trudno ustalić układ zagięć dla np. 7 zagięć, jest jedynie pracochłonne. Należy najpierw ustalić wcześniejsze układy.
Natomiast ustalenie liczby zagięć dla n złożeń nie jest trudne.

II sposób
Chcę znaleźć „lepszy sposób” ustalenia zagięć dla n złożeń.
Zauważam, że znaki po prawej stronie środka (↑) powstają w wyniku obrotu lewej strony o 180 stopni względem tego środka .
Zatem będę zajmował się tylko znakami po lewej od środka.
Zauważam, że następujące ułożenie ↓↓↑ pojawia się na zmianę w tej postaci i , odwrócone o 180 ^{0} względem znaku następującego po nim. Między takimi „trójkami” znajdują się znaki „ na szarym tle” i są one kolejnymi znakami z układanego właśnie ciągu.

Uff, udało się ! Ogarnia mnie euforia! Jakie to wspaniałe uczucie!

Wieczór zostawiam na inne zainteresowania: historia, szachy, …
No, i może jakaś pyszna kolacja? W końcu jutro zacznę nowy dzień. I kto wie, może znowu odkryję matematykę tam, gdzie dziś jej nie dostrzegłem. <u>Tyle, ile zwykłych rzeczy wokół mnie, tyle też jest matematyki.</u>