

NIEZWYKŁA MATEMATYKA

Opracowała Magdalena Gajda

***Praca na Konkurs Prac Matematycznych
Kraków 2013***

***Publiczna Szkoła Podstawowa im. Św. Stanisława
Szczepanowskiego BM w Sterkowcu.
32-826 Sterkowiec, ul. Sosnowa 20
Klasa VI
Nauczyciel: Dorota Libera***

***Dla mojej Kochanej Babci
za to, że zawsze mi pomaga
i nigdy nie pozwala
poddać się bez walki.***

Spis treści

<i>Wstęp</i>	<i>4</i>
<i>O powierzchniach i brzegu kartki</i>	<i>5</i>
<i>Moje eksperymentowanie.....</i>	<i>7</i>
<i>O zastosowaniu wstęgi Möbiusa</i>	<i>10</i>
<i>Podsumowanie</i>	<i>12</i>
<i>Bibliografia</i>	<i>13</i>
<i>Opinia nauczyciela</i>	<i>14</i>

Wstęp

W Konkursie Prac Matematycznych biorę udział pierwszy raz. Dużo myślałam o tym, co ciekawego mogłabym zaprezentować rówieśnikom. Ponieważ oglądałam kiedyś program o wstędze Möbiusa i ten temat mnie zainteresował, to postanowiłam „zarazić” nim innych. Informacje o wstędze Möbiusa razem z ciekawymi eksperymentami znalazłam też w książce pt. „Ścieżki matematyki” i w Internecie. Dla mnie temat jest ciekawy i można się tym dobrze bawić. Jest to i ciekawe, i łatwe.

Wstęga Möbiusa nazwana tak od niemieckiego matematyka jest obiektem szczególnym w topologii. Topologia (zwana początkowo geometria situs, „geometrią położenia” lub analysis situs, „analizą położenia”) w elementarnej wersji jest nauką badającą te właściwości geometryczne, które nie zmieniają się przy przekształceniach takich jak rozciąganie, skręcanie albo obroty. Do własności takich należy na przykład liczba otworów jakie znajdują się w danej bryle geometrycznej.

O powierzchniach i brzegu kartki.

Najczęściej po sklejeniu paska papieru spodziewamy się, że mamy na taśmie dwie strony i dwa brzegi. I tak jest gdy połączymy pasek zwyczajnie. Wystarczy jednak przed sklejeniem obrócić kartkę i wtedy okaże się rzecz interesująca. Pasek zaczyna dziwnie się zachowywać. Kartka będzie miała jedną stronę i jedną krawędź. Można to sprawdzić malując wybraną powierzchnię.

Zróbmy dwa kółka, przy czym jedno z nich sklejamy po jednym półobrocie.



Co się stanie jeżeli na każdym z nich narysujemy linię bez odrywania ręki? Otóż stanie się tak, że na zwykłej wstędze linia będzie z jednej strony, a na drugiej wstędze, inaczej sklezionej (czyli wstędze Möbiusa) linia biegnie z obu stron choć nie przerywaliśmy rysowania pisakiem po kartce. Oznacza to, że wstęga przez to szczególne sklejenie stała się jednostronna.

Ile krawędzi ma wstęga Möbiusa?

Z mojego doświadczenia, które przeprowadziłam wynika, że wstęga Möbiusa ma jedną krawędź.

Co się stanie gdy zrobimy dwa półobroty? Ile jest teraz stron, a ile krawędzi?

Teraz są dwie krawędzie i dwie strony.

Liczba obrotów o 180 stopni	Liczba stron kartki
1	1
2	2
3	1
4	2
5	1
6	2
...	

WNIOSEK: Gdy mamy nieparzystą liczbę obrotów przed sklejeniem to wstęga ma tylko jedną stronę, a gdy są parzyste liczby obrotów – wstęga ma dwie strony.

Moje eksperymentowanie

Zabawa w przecinanie sklejonej kartki, też może przynieść nieoczekiwane efekty. Pomysły tych eksperymentów zaczerpnęłam z książki. Postanowiłam jednak samodzielnie zbadać, do czego zaprowadzą mnie postawione tam pytania.

Pierwsza ciekawostka – jedno cięcie.

Ile kółek otrzymamy gdy rozetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż linii środkowej? Ci, którzy nie rozcinając jej powiedzieliby, że to będą dwa kółka pomylili się. Bo po jej przecięciu otrzymamy jedno kółko, ale za to dwa razy dłuższe.

Ile mamy na nim stron? Dwie.

Robiąc wstęgę Möbiusa zrobiliśmy jeden półobrót paska przed sklejeniem. Zrobimy teraz dwa półobroty.

Ciekawe co się stanie po rozcięciu tej wstęgi po całej długości? Po jej rozcięciu otrzymamy dwie złączone ze sobą małe wstęgi.

Druża ciekawostka – dwa cięcia.

Zróbmy teraz, sklejjąc szersze paski, dwie wstęgi. Z jednego paska zróbmy wstęgę Möbiusa, a drugą sklejjemy po jednym pełnym obrocie. Co się stanie, gdy zrobimy dwa równoległe rozcięcia wzdłuż obu wstęg?

Ze wstęgi Möbiusa zrobiły się dwie – jedna duża, druga mała. A z tej wstęgi, która była sklejona po jednym pełnym obrocie zrobiły się trzy wstęgi – jedna szeroka i dwie wąskie. Przeplatają się one ze sobą.

Trzecia ciekawostka – trzy cięcia.

Wstęga z jednym całym obrotem	Wychodzą 4 związane ze sobą takie same wstęgi.
Wstęga Möbiusa	Wychodzą 2 tak samo długie i tak samo szerokie wstęgi.

Czwarta ciekawostka – cztery cięcia.

Wstęga Möbiusa	Powstały 3 wstęgi różnej długości.
Wstęga z 1 całym obrotem	Powstały 4 takie same wstęgi związane ze sobą.

Piąta ciekawostka – otwór we wstędze.

Zróbmy nacięcie w pasku, z którego skleimy wstęgę Möbiusa, i przewlekamy przez rozcięcie jeden koniec paska przed sklejeniem. Teraz kończymy rozcinanie paska. Co się stało? Zrobiła się z niej jedna, dwa razy dłuższa wstęga.

Szósta ciekawostka – łączone wstęgi.

Rozcięcia podwójnej wstęgi mogą być też interesujące. Przygotowujemy dwa kółka – jedno zwykłe, a drugie wstęgę Möbiusa. Sklejamy je, przeplatając pod kątem prostym. Co się stanie, gdy rozetniemy oba paski wzdłuż środka? Powstały trzy wstęgi. Dwie takie same i jedna dwa razy dłuższa.

Na zakończenie dwa eksperymenty.

Z dwóch pasków będą zwykłe obręcze (nie wstęgi). Sklejamy je ze sobą pod kątem prostym. Następnie rozcinamy każdą obręcz wzdłuż środkowej linii. Otrzymamy – niespodzianka – kwadratową ramkę.

Teraz skleamy pod kątem prostym dwie czerwone wstęgi, jedną prawostronnie i jedną lewostronnie skręconą, a następnie rozcinamy je wzdłuż środka. Co otrzymujemy?



Mamy splecione ze sobą dwa serca.

O zastosowaniu wstęgi Möbiusa.

Weźmy na przykład wręczanie sportowcom medali. Dekoruje się ich szarfami zrobionymi właśnie na sposób wstęgi Möbiusa. Gdyby np. medale umieszczano na zwykłych wstęgach, to zamiast ułożyć się gładko na szyi odstawałyby jak obroże dla psów.

Czy taśmociągi mogłyby mieć coś wspólnego ze wstęgą Möbiusa? Moim zdaniem wstęga Möbiusa jest jakimś pomysłem dla taśmociągu. Przez swoją zamiennność transportowany materiał przesuwany będzie po całej powierzchni taśmy. Zużycie takiego taśmociągu jest więc jednakowe.

Podobnie ma się sprawa z dawnymi taśmami filmowymi. W kinematografii taśma filmowa w kształcie wstęgi Möbiusa pozwala na wielokrotną emisję filmu bez konieczności wymiany szpuli z taśmą. Taśmy te są przy tym jakby ochronione, przez sposób ich założenia, przed nierównym niszczeniem.

Wstęga Möbiusa została też użyta jako symbol recyklingu. Ten znaczek wyraża, że można daną rzecz (np. papier, szkło itp.) wykorzystać wiele razy. Właśnie poprzez recykling, ze starej zużytej rzeczy robi się zupełnie nową, gotową do ponownego użycia.



Istnieją książki sklejone w kształt wstęgi Möbiusa, które można czytać w kółko zaczynając z dowolnego miejsca.

*Wstęga Möbiusa jest wykorzystana w matematyce w symbolu nieskończoności, poza tym jest często elementem sztuki – wykorzystywana do tworzenia biżuterii, rzeźb, a nawet w projektach architektów. Na przykład architekci holenderscy chcą już w przyszłym roku postawić pierwszy budynek wykonany w całości w drukarce przestrzennej. Ma on mieć właśnie kształt **wstęgi Möbiusa**.*



Podsumowanie

W mojej pracy starałam się pokazać, jak dobrze można się bawić przy wstędze Möbiusa. Ta niezwykła powierzchnia, ma jedną stronę i jedną krawędź. Na początku badałam, jaki jest skutek wykonywania kolejnych obrotów przed sklejeniem kartki i co się dzieje, przy rozcinaniu wstęgi na różne sposoby. Następnie zaprezentowałam różne zastosowania i wykorzystania wstęgi Möbiusa.

Przy okazji badań nad wstęgą poznałam nowe nazwisko niemieckiego matematyka Möbiusa, dziwne określenie „topologia” i to, co było z tym związane.

Polecam ten temat innym uczniom i myślę, że moi rówieśnicy też mogą mieć świetną zabawę.

Bibliografia:

- *N. Langdon, Ch. Snape, Ścieżki matematyki, GWO Gdańsk 1998*
- *<http://www.matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/zastosowania-wst%C4%99gi-m%C3%B6biusa>*
- *<http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka#Topologia>*
- *gimjedlicze.cba.pl/Pliki/Wstega.ppt*
- *zsniedlin.wodip.opole.pl/publikacje/*
- *<http://prezi.com/tahenk8oic0i/wstega-mobiusa/>*
- *<http://www.geekweek.pl/aktualnosci/15233/powstanie-budynek-z-drukarki-3d>*

Opinia nauczyciela

Magdalena jest uczennicą bardzo pilną. Wykazuje zdolności matematyczne, stawia trafne pytania. Zawsze aktywnie uczestniczy w zajęciach, chętnie po lekcjach pomaga rówieśnikom tłumacząc im niezrozumiałe zadania. Brała udział w konkursach matematycznych takich jak Małopolski Konkurs Matematyczny, Międzynarodowy Konkurs KANGUR, Międzypowiatowy Konkurs Matematyczny dla klas V oraz w konkursach organizowanych w szkole „Myślenie jest w cenie”, „Po rozum do głowy”. Często rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności.

Temat i sposób, w jaki Magda przedstawiła go w swojej pracy może zainteresować uczniów na zajęciach pozalekcyjnych. Opracowany materiał, szczególnie w części „Moje eksperymentowanie” zawiera własne dociekania matematyczne uczennicy, choć pewne sugestie oraz wskazówki pochodziły z podanych źródeł.

Dorota Libera