Twierdzenie o podziale odcinków w czworokącie

Joanna Sendorek

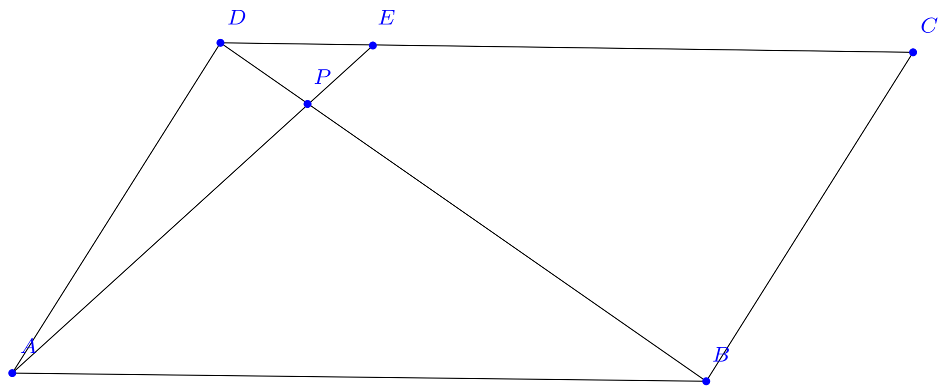
Spis treści

1 Wstęp

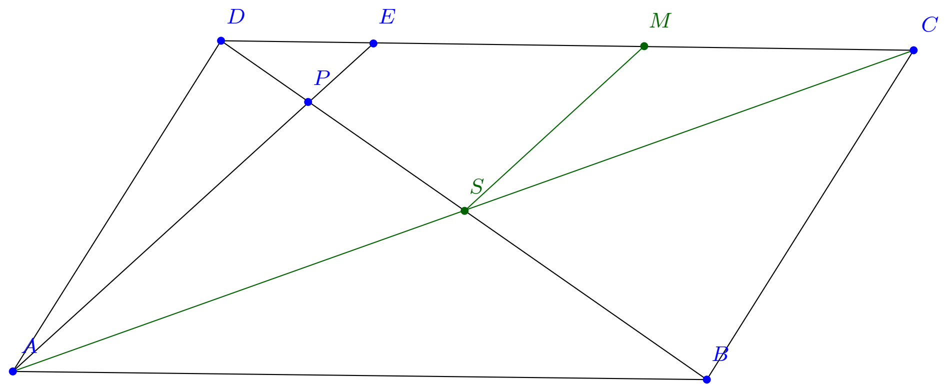
W swojej pracy zbadałam zagadnienie podziału odcinków w czworokącie. Przeczytawszy artykuł pt. „twierdzenie o odcinkach w czworokącie” starałam się uogólnić rozważone w nim problemy i udowodnić przez przeprowadzenie rozumowania dla dowolnego czworokąta, postawioną w artykule hipotezę. Tak więc w swojej pracy nie opieram się na konkretnych wartościach liczbowych podziału poszczególnych odcinków, a stosuję ogólne nazewnictwo. Dzięki temu udało mi się zbadać jak dzielą się poszczególne odcinki w dowolnym równoległoboku, trapezie równoramiennym, a wreszcie w dowolnym czworokącie, przechodząc stopniowo od jednego punktu podziału przez dwa do czterech. Na końcu pracy badając podziały dla czterech punktów i równoległoboku stawiam hipotezę, która okazuje się prawdziwa, a dowód przeprowadzam z użyciem twierdzenia Menelaosa. Nazywam wyprowadzoną zależność twierdzeniem o podziale odcinków w czworokącie.

2 Stosunki odcinków w czworokątach

Problem 1. Na początek rozważmy prosty przypadek. Mamy równoległobok $ABCD$, na którego przekątnej BD leży punkt P, taki, że $\frac{|BD|}{|DP|} = n$. Niech E będzie punktem przecięcia prostej AP z bokiem CD. Zastanówmy się jaki będzie stosunek $\frac{|DE|}{|EC|}$?



Narysujmy drugą przekątną (AC) i oznaczmy punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ jako S. Poprowadźmy teraz prostą przechodzącą przez punkt S i równoległą do prostej AE i oznaczmy jej punkt przecięcia z bokiem CD przez M.



Z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|DE|}{|EM|} = \frac{|DP|}{|PS|} = \frac{\frac{1}{n} \cdot |BD|}{\frac{1}{2}|BD| - \frac{1}{n}|BD|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{(2-n)} = \frac{2}{n-2} \tag{1}$$

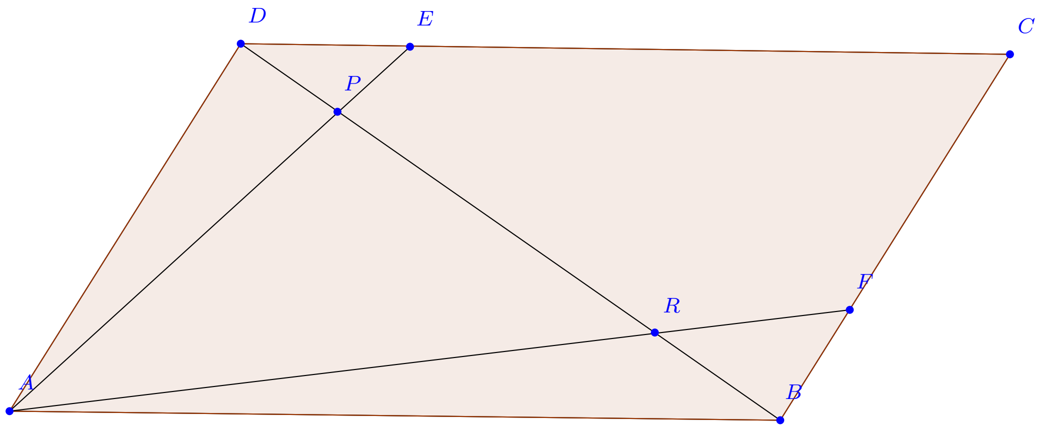
$$\frac{|CM|}{|ME|} = \frac{|CS|}{|SA|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad |CM| = |ME| \tag{2}$$

Z faktów (1) i (2) mamy:

$$\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{|DE|}{|EM| + |MC|} = \frac{|DE|}{2|EM|} = \frac{2}{2(n-2)} = \frac{1}{n-2} \tag{3}$$

Widzimy więc, że stosunek $\frac{|DE|}{|EC|}$ w danym równoległoboku zależy tylko od wyboru punktu P.

Problem 2. Dodajmy jeszcze jeden punkt, nazwijmy go R, taki, że $\frac{|BD|}{|BR|} = m$. Zastanówmy się jaka będzie wartość $\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|CE|}{|ED|}$?

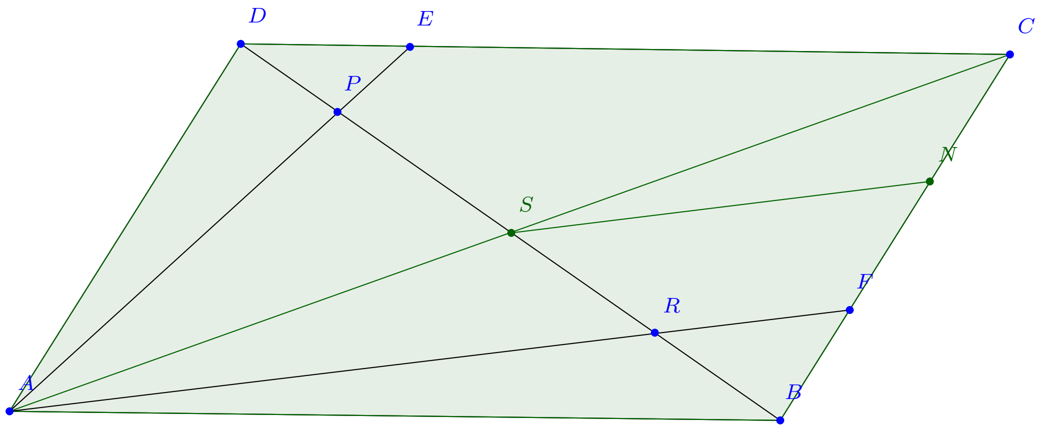


Z rozwiązania poprzedniego problemu mamy:

$$\frac{|CE|}{|ED|} = n - 2 \tag{4}$$

Analogicznie wyznaczymy $\frac{|BF|}{|FC|}$.

Poprowadźmy prostą przechodzącą przez punkt S i równoległą do prostej AF oraz oznaczmy jej punkt przecięcia z bokiem BC przez N.



Stosując znów twierdzenie Talesa mamy:

$$\frac{|BF|}{|FN|} = \frac{|BR|}{|RS|} = \frac{|BD| \cdot \frac{1}{m}}{\frac{1}{2}|BD| - \frac{1}{m}|BD|} = \frac{2}{m-2} \tag{5}$$

$$\frac{|CN|}{|FN|} = \frac{|CS|}{|SA|} = 1 \implies |CN| = |FN| \tag{6}$$

Z faktów (5) i (6) mamy:

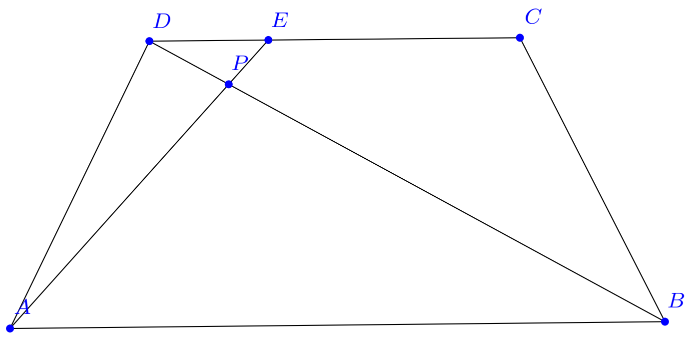
$$\frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|FL|(\frac{2}{m-2})}{2|FL|} = \frac{1}{m-2} \tag{7}$$

Z (4) i (7):

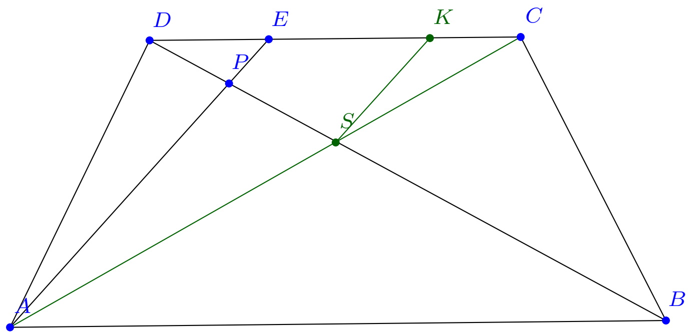
$$\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{1}{m-2} \cdot (n-2) = \frac{n-2}{m-2} \tag{8}$$

Spróbowałam teraz nieco uogólnić nasze zadanie przeprowadzając podobne rozumowanie dla trapezu równoramiennego o znanym stosunku w jakim dzielą się przekątne.

Problem 3. Mamy trapez równoramienny $ABCD$ o przekątnych przecinających się w punkcie S. Niech znany będzie stosunek $x = \frac{|BS|}{|SD|}$. Niech P będzie punktem leżącym na przekątnej BD takim, że $\frac{|BD|}{|DP|} = n$. Poprowadźmy prostą AP a jej punkt przecięcia z bokiem CD oznaczmy przez K. Zastanówmy się ile wyniesie stosunek $\frac{|DE|}{|EC|}$?



Poprowadźmy prostą przechodzącą przez punkt S, równoległą do PE i przecinającą bok CD w punkcie E.



Z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|DE|}{|EK|} = \frac{|DP|}{|PS|} = \frac{\frac{1}{n} \cdot |BD|}{|BD| - |BS| - |DP|} = \frac{\frac{1}{n} \cdot |BD|}{|BD| - \frac{1}{n}|BD| - |BS|} \tag{9}$$

Oprócz tego mamy:

$$\begin{aligned} |BS| &= |SD| \cdot x & |BS| &= (|BD| - |BS|) \cdot x \\ |BS|(1+x) &= |BD| \cdot x & |BS| &= \tfrac{|BD| \cdot x}{1+x} \end{aligned} \tag{10}$$

Podstawiając (10) do (9) otrzymujemy:

$$\frac{|DE|}{|EK|} = \frac{\frac{1}{n} \cdot |BD|}{|BD| - \frac{1}{n}|BD| - |BD|\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} - \frac{x}{1+x}} = \frac{1+x}{n-1-x} \tag{11}$$

Ponownie z twierdzenia Talesa mamy:

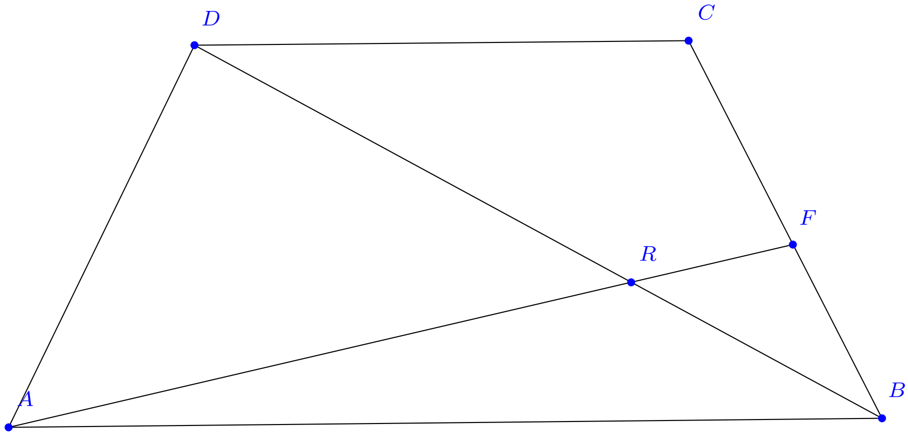
$$\frac{|CK|}{|EK|} = \frac{|CS|}{|SA|} = \frac{1}{x} \implies |CK| = \frac{1}{x}|EK| \tag{12}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{|DE|}{|EC|} = \frac{|DE|}{|EK| + |CK|} = \frac{|DE|}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)|EK|} &= \frac{1+x}{n-1-x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1+x}{n + \frac{n}{x} - 2 - \frac{1}{x} - x} \end{aligned} \tag{13}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy ogólniejszy wynik niż dla równoległoboku. Po podstawieniu $x = 1$ (w równoległoboku przekątne dzielą się na połowy) otrzymujemy ten sam wynik co poprzednio.

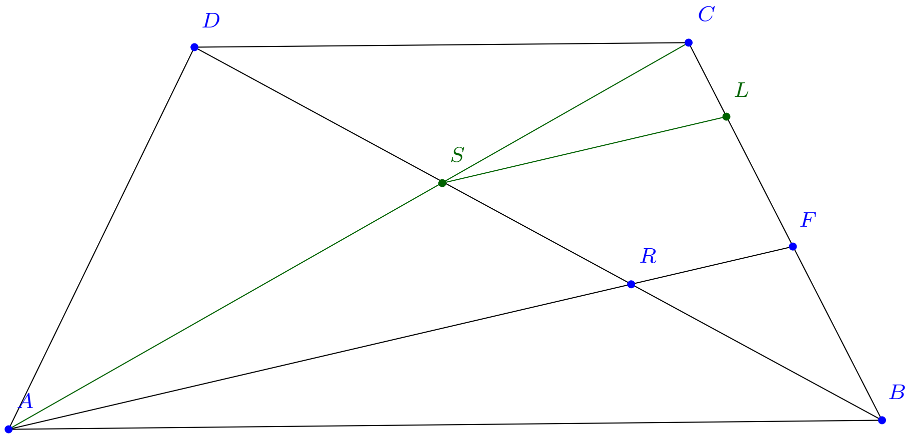
Problem 4. Możemy teraz podobnie jak w równoległoboku wprowadzić drugi punkt podziału. Dodajmy więc punkt R taki, że $\frac{|BD|}{|BR|} = m$. Niech punkt przecięcia prostej AR z bokiem BC będzie punktem F. Z poprzedniego problemu mamy dane $\frac{|BS|}{|SD|} = x$. Spróbujmy obliczyć $\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|EC|}{|DE|}$.



W rozwiązaniu poprzedniego problemu otrzymaliśmy:

$$\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{n-1-x}{1+x} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{1} \tag{14}$$

Poprowadźmy prostą SL równoległą do FR i niech punkt L leży na boku CB.



Korzystając z zależności (11) z rozwiązania poprzedniego problemu, analogicznie mamy:

$$\frac{|BF|}{|FL|} = \frac{1+x}{m-1-x} \tag{15}$$

Z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|CL|}{|LF|} = \frac{1}{x} \implies |CL| = \frac{1}{x} \cdot |LF| \tag{16}$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|BF|}{|FL|+|CL|} = \frac{|BF|}{|FL|\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+x}{m-1-x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \tag{17}$$

Z (14) i (17) mamy:

$$\frac{|BF|}{|FC|} \cdot \frac{|EC|}{|DE|} = \frac{(1+x)}{(m-1-x)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{(n-1-x)}{(1+x)} \tag{18}$$

Czyli

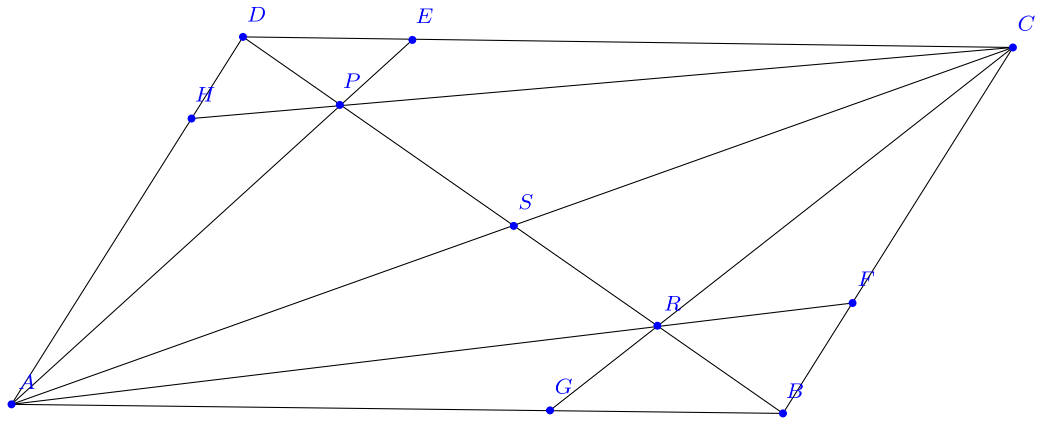
$$\frac{|EC|}{|DE|} \cdot \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{(n-1-x)}{(m-1-x)} \tag{19}$$

Otrzymany wynik znowu potwierdza uzyskany wcześniej dla równoległoboku.

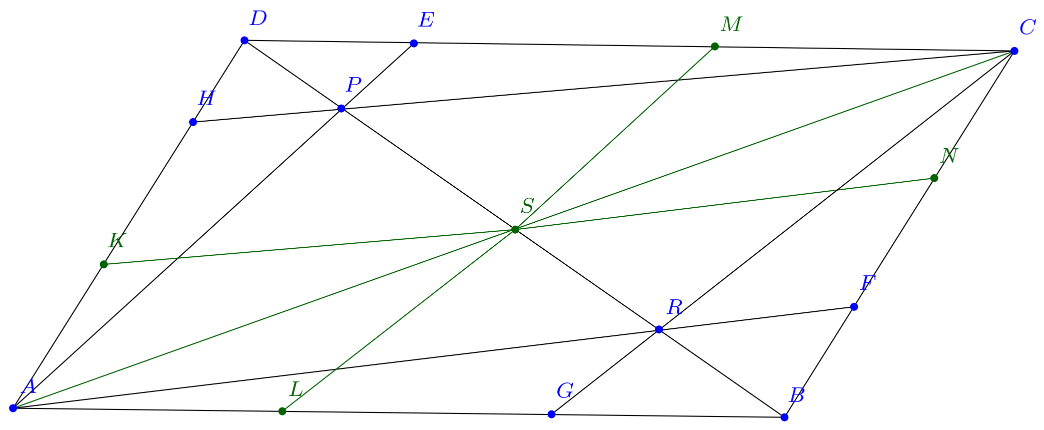
Problem 5. Wróćmy teraz na chwilę do równoległoboku i przeprowadźmy rozumowanie dla czterech punktów podziału.

Mamy więc dany równoległobok $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie S. Niech P będzie takim punktem na przekątnej BD, że $\frac{|BD|}{|PD|} = n$, a R takim punktem przekątnej BD, że $\frac{|BD|}{|BR|} = m$. Nazwijmy punkty przecięcia prostych AP, AR, CP, CR z bokami CD, BC, AD, AB odpowiednio przez E, F, G, H.

Obliczmy jaki będzie stosunek $\frac{|AH|}{|HD|} \cdot \frac{|DE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BG|}{|GA|}$.



Poprowadźmy przez punkt S proste równoległe do kolejno AP, AR, CP, CR i oznaczmy punkty przecięcia z bokami CD, BC, AD, AB odpowiednio przez M, N, L, K.



Analogicznie do rozwiązania poprzedniego problemu:

$$\frac{|BG|}{|GL|} = \frac{|BR|}{|RS|} = \frac{\frac{1}{m} \cdot |BD|}{\frac{1}{2} \cdot |BD| - \frac{1}{m} \cdot |BD|} = \frac{2}{m-2} \tag{20}$$

$$\frac{|AL|}{|LG|} = \frac{|AS|}{|SC|} = 1 \implies |AL| = |LG| \tag{21}$$

$$\frac{|BG|}{|GA|} = \frac{|BG|}{|GL| + |AL|} = \frac{|BG|}{2|GL|} = \frac{1}{m-2} \tag{22}$$

analogicznie:

$$\frac{|AH|}{|HD|} = n - 2 \tag{23}$$

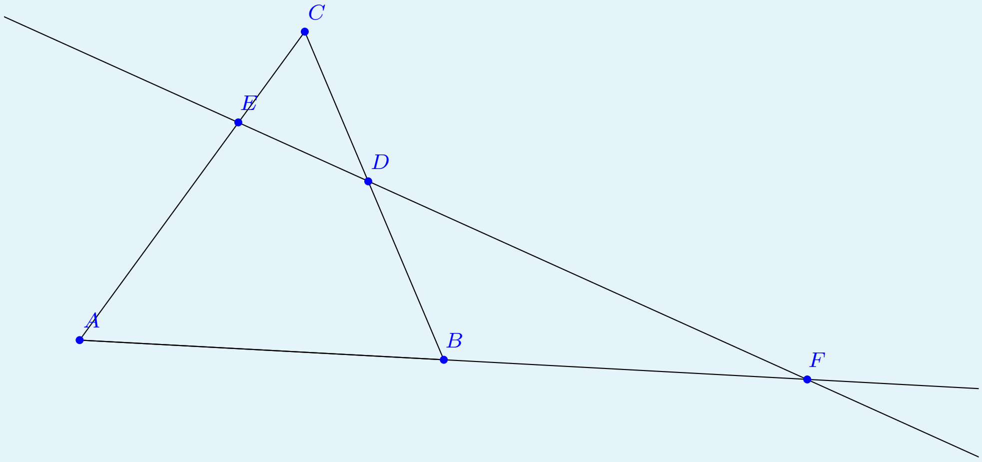
Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{|AH|}{|HD|} \cdot \frac{|DE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BG|}{|GA|} = \frac{m-2}{n-2} \cdot (n-2) \cdot \frac{1}{(m-2)} = 1 \tag{24}$$

Dostaliśmy, więc tym razem wynik nie uzależniony ani od n ani od m. w związku z tym wysnułam hipotezę, że zależność ta zachodzi dla każdego czworokąta. Zanim jednak sprawdzimy czy postawiona hipoteza jest prawdziwa, chciałabym pokazać inny sposób na rozwiązanie tego zadania, również opierający się tylko na szukaniu stosunków poszczególnych odcinków. do rozwiązania tego problemu zastosuję twierdzenie Menelaosa, którego treść przypominam niżej.

Twierdzenie Menelaosa

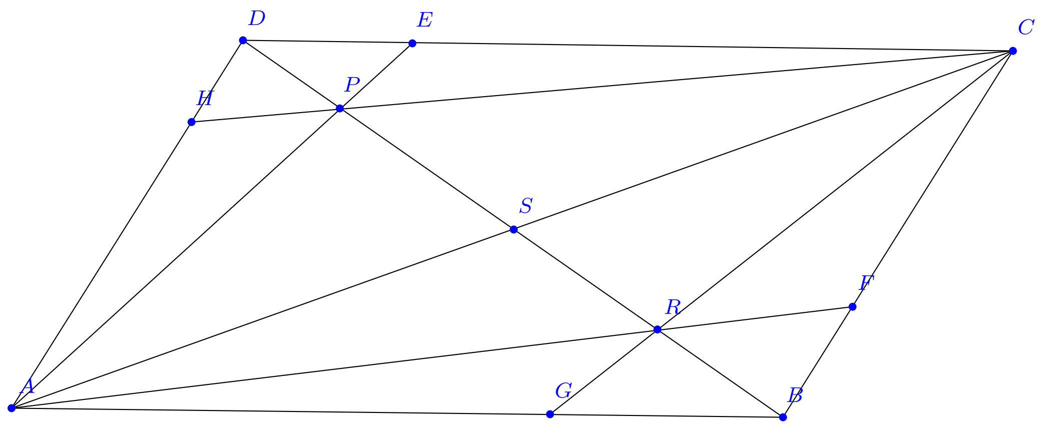
Założenia Mamy trójkąt $\triangle ABC$ i prostą przecinającą bok BC w punkcie D, bok AC w punkcie E, a przedłużenie boku AB w punkcie F.



Teza

$$\frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CD|}{|DB|} \cdot \frac{|BF|}{|FA|} = 1$$

Sposób drugi



Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta $\triangle ASB$ i prostej CG mamy:

$$\frac{|GA|}{|BG|} \cdot \frac{|BR|}{|RS|} \cdot \frac{|SC|}{|CA|} = 1 \tag{25}$$

Wiemy też, że:

$$\frac{|SC|}{|CA|} = \frac{1}{2} \tag{26}$$

oraz z (20) mamy:

$$\frac{|BR|}{|RS|} = \frac{2}{m-2} \tag{27}$$

Z (26) i (27) mamy:

$$\frac{|GA|}{|BG|} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{m-2}{2} = m-2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BG|}{|GA|} = \frac{1}{m-2} \tag{28}$$

Analogicznie z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta $\triangle CSD$ i prostej AE mamy:

$$\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{1}{n-2} \tag{29}$$

dla trójkąta $\triangle ASD$ i prostej CH mamy:

$$\frac{|AH|}{|HD|} = n - 2 \tag{30}$$

dla trójkąta $\triangle CSB$ i prostej AF mamy:

$$\frac{|CF|}{|FB|} = m - 2 \tag{31}$$

Z faktów (28), (29), (30), (31) ponownie otrzymujemy:

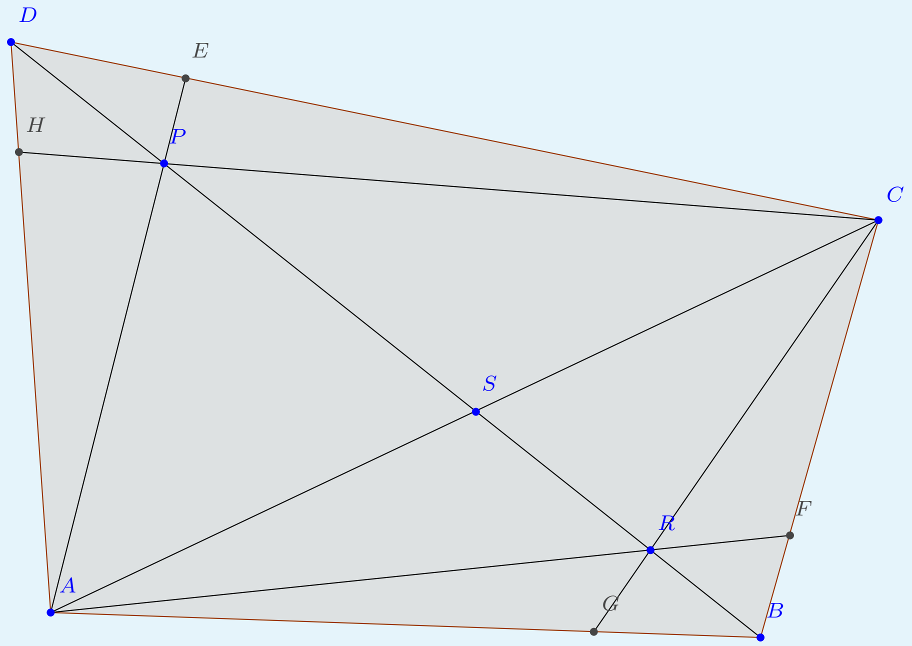
$$\frac{|AH|}{|HD|} \cdot \frac{|DE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BG|}{|GA|} = \frac{m-2}{n-2} \cdot (n-2) \cdot \frac{1}{(m-2)} = 1 \tag{32}$$

Teraz wróćmy do naszej hipotezy i sprawdźmy czy dla każdego czworokąta zachodzi podana zależność.

3 Twierdzenie o podziale odcinków w czworokącie

Twierdzenie o podziale odcinków w czworokącie

Założenia Dany jest czworokąt $ABCD$ o przekątnych przecinających się w punkcie S. na przekątnej BD obrano punkty P i R przez które następnie poprowadzono proste AP, CP, AR i CR, które przecięły kolejno boki CD, AD, BC i AB odpowiednio w punktach E, H, F, G.



Teza

$$\frac{|AH|}{|DE|} \cdot \frac{|DE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BG|}{|GA|} = 1$$

Dowód. Ponownie korzystając z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta $\triangle ASB$ i prostej CG mamy:

$$\frac{|GA|}{|BG|} \cdot \frac{|BR|}{|RS|} \cdot \frac{|SC|}{|CA|} = 1 \implies \frac{|BG|}{|GA|} = \frac{|BR|}{|RS|} \cdot \frac{|SC|}{|CA|} \tag{33}$$

Analogicznie z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta $\triangle CSD$ i prostej AE mamy:

$$\frac{|EC|}{|DE|} \cdot \frac{|DP|}{|PS|} \cdot \frac{|SA|}{|CA|} = 1 \implies \frac{|DE|}{|EC|} = \frac{|DP|}{|PS|} \cdot \frac{|SA|}{|CA|} \tag{34}$$

dla trójkąta $\triangle ASD$ i prostej CH mamy:

$$\frac{|AH|}{|HD|} \cdot \frac{|DP|}{|PS|} \cdot \frac{|SC|}{|CA|} = 1 \implies \frac{|AH|}{|HD|} = \frac{|PS|}{|DP|} \cdot \frac{|CA|}{|SC|} \tag{35}$$

dla trójkąta $\triangle CSB$ i prostej AF mamy:

$$\frac{|FB|}{|CF|} \cdot \frac{|BR|}{|RS|} \cdot \frac{|SA|}{|CA|} = 1 \implies \frac{|CF|}{|FB|} = \frac{|RS|}{|BR|} \cdot \frac{|CA|}{|SA|} \tag{36}$$

Z faktów (33), (34), (35), (36) mamy:

$$\frac{|AH|}{|HD|} \cdot \frac{|DE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BG|}{|GA|} = \frac{|PS| \cdot |CA| \cdot |DP| \cdot |SA| \cdot |RS| \cdot |CA| \cdot |BR| \cdot |SC|}{|DP| \cdot |SC| \cdot |PS| \cdot |CA| \cdot |BR| \cdot |SA| \cdot |RS| \cdot |CA|} = 1 \tag{37}$$

co kończy dowód. □

4 Bibliografia

1) Pompe Waldemar, *Ćwiczenia z geometrii I*, 2006

2) Adamczak Mariusz, *Twierdzenie o odcinkach w czworokącie*, 2011, http://sem.edu.pl/konferencja-2011/materialy/Twierdzenie_o_odcinkach_w_czworokacie.doc