Tożsamości Newtona-Girarda

Rafał Żelazko

Spis treści

1 Pojęcie wielomianu symetrycznego **2**

2 Podstawowe wielomiany symetryczne **2**

3 Algorytm redukcji wielomianów symetrycznych **4**
3.1 Procedura 4
3.2 Zadanie 1. 4
3.3 Zadanie 2. 5

4 Sumy potęgowe wielomianów symetrycznych **5**

5 Pełne jednorodne wielomiany symetryczne **6**

6 Wzory Newtona-Girarda **7**
6.1 Notacja i zależności 7
6.2 Zadanie 3. 9
6.3 Zadanie 4. 9
6.4 Zadanie 5. 10

7 Pojęcie podstawowej średniej symetrycznej **11**
7.1 Definicja 11
7.2 Nierówność Newtona 11
7.3 Nierówność Maclaurina 12

8 Zastosowania wzoru w układach równań **12**
8.1 Zadanie 6. 12
8.2 Zadanie 7. 13

9 Zadania olimpijskie **13**
9.1 Zadanie 8. 14
9.2 Zadanie 9. 14
9.3 Zadanie 10. 15

10 Literatura **16**

1 Pojęcie wielomianu symetrycznego

Definicja. Wielomian W zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy wielomianem symetrycznym, jeśli po dowolnej permutacji jego zmiennych otrzymujemy wielomian równy wielomianowi $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Następujące wielomiany są symetryczne:

$$\begin{aligned}
&W(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1 + x_2 + x_3,\\
&W(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3,\\
&W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,\\
&W(x_1, x_2) = x_1x_2^3 + x_2x_1^3 + 2x_1^2x_2^2,\\
&W(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 7,
\end{aligned}$$

ponieważ po dowolnym przestawieniu ich zmiennych otrzymujemy wielomiany przyjmujące takie same wartości jak wyjściowe.

Poniższy wielomian nie jest symetryczny:

$$W(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3.$$

Aby to wykazać, rozważmy następującą permutację zmiennych:

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Niech $W_\sigma := W_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wówczas:

$$W_\sigma(x_1, x_2, x_3) = x_2^2x_1 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 = x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_2x_3^2$$

Współczynnik przy $x_1^2x_2$ wynosi 1 dla W, ale 0 dla W_σ. Zatem $W_\sigma \neq W$, więc wielomian W nie jest symetryczny.

2 Podstawowe wielomiany symetryczne

Definicja. Podstawowymi wielomianami symetrycznymi zmiennych x_1, $x_2, \ldots, x_n$ stopnia $k \in \mathbb{N}$ nazywamy każdy z wielomianów $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ postaci:

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}.$$

Dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} x_{i_1}, \\
e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2}, \\
&\vdots \\
e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}.
\end{aligned}$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, istnieje dokładnie jeden podstawowy wielomian symetryczny n zmiennych stopnia k. Przyjmujemy $e_0 = 1$ oraz $e_k = 0$ dla każdego $k > n$.

Dla $n = 3$ podstawowe wielomiany symetryczne mają postać:

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, \\
e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.1 (O wielomianach symetrycznych) *Jeżeli wielomian $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest dowolnym wielomianem symetrycznym, to istnieje dokładnie jeden wielomian $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taki, że*

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Dowód znajduje się w książce *Ideals, Varieties, and Algorithms* David A. Cox, John B. Little, Donal O'Shea

□

Oznacza to, że poprzez sumowanie oraz mnożenie wielomianów $e_1, e_2, \ldots, e_n$ można zbudować każdy wielomian symetryczny. Na przykład:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = e_1^2 - 2e_2.$$

3 Algorytm redukcji wielomianów symetrycznych

Istnieje algorytm pozwalający na przedstawienie wielomianu symetrycznego w postaci elementarnych wielomianów symetrycznych.

3.1 Procedura

Niech f będzie wielomianem symetrycznym zmiennych x_1, x_2, $\ldots, x_n$. Załóżmy bez straty ogólności, że $x_n \geq x_{n-1} \geq \ldots \geq x_1$.

Ze zbioru jednomianów należących do f wybieramy ten o najwyższym stopniu, a jeśli istnieją co najmniej dwa o takim samym, to dokonujemy selekcji spośród nich, kierując się porządkiem leksykograficznym. Dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ oznaczamy stopień zmiennej x_k przez s_k.

Zdefiniujmy c jako współczynnik stojący przy znalezionym jednomianie. Realizujemy operację przypisania:

$$g := f - ce_1^{s_n - s_{n-1}} e_2^{s_{n-1} - s_{n-2}} \cdots e_{n-1}^{s_2 - s_1} e_n^{s_1}$$

Procedurę powtarzamy dopóki $g \not\equiv 0$. W chwili jej zakończenia f będzie przedstawiony jako suma wyrażeń odjętych od f podczas kolejnych podstawień. Każdy taki składnik jest iloczynem elementarnych wielomianów symetrycznych, przemnożonych przez skalar, co implikuje fakt, iż finalna postać wielomianu f będzie zgodna z założeniem algorytmu.

3.2 Zadanie 1.

Dany jest wielomian:

$$W(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1.$$

Przedstawić go w postaci podstawowych wielomianów symetrycznych.

Rozwiązanie
Na podstawie algorytmu redukcji wielomianów symetrycznych: znajdujemy największy jednomian, jest nim x_3^2, stopnia drugiego. Odejmujemy od wielomianu f wyrażenie e_1^2, zaś rezultat przypisujemy do wielomianu g:

$$g := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1 - 1(x_1 + x_2 + x_3)^2$$

Czynność wykonujemy ponownie, tym razem biorąc pod uwagę jednomian x_2x_3. Wielomian f zmniejszamy o wyrażenie e_2:

$$g := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - 1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^1$$

Ostatecznie otrzymujemy: $W(x_1, x_2, x_3) = e_1^2 + e_2$.

3.3 Zadanie 2.

Przekształcić wielomian:

$$W(x_1, x_2) = x_1x_2^3 + x_2x_1^3 + x_1^3 + x_2^3 + (x_1x_2)^2$$

do postaci sumy elementarnych wielomianów symetrycznych.

Rozwiązanie
Skorzystajmy z algorytmu redukcji. Pierwszym największym znalezionym jednomianem jest $x_1x_2^3$.

$$g := x_1x_2^3 + x_2x_1^3 + x_1^3 + x_2^3 + (x_1x_2)^2 - 1(x_1x_2)(x_1 + x_2)^2$$

Następnie wyznaczamy jednomian $(-1)(x_1x_2)^2$, również czwartego stopnia.

$$g := x_1^3 + x_2^3 - (x_1x_2)^2 - (-1)(x_1x_2)^2$$

Po obniżeniu stopnia wielomianu, analizujemy składnik x_2^3.

$$g := x_1^3 + x_2^3 - 1(x_1 + x_2)^3$$

Ostatecznie znajdujemy jednomian $-3x_1x_2^3$ i jest to ostatni krok algorytmu.

$$g := (-3)x_1x_2^2 + (-3)x_2x_1^2 - (-3)(x_1 + x_2)(x_1x_2)$$

Stąd: $W(x_1, x_2) = e_2e_1^2 + e_2^2 - e_1^3 - 3e_1e_2$.

4 Sumy potęgowe wielomianów symetrycznych

Definicja. Sumą potęgową wielomianu symetrycznego zmiennych x_1, x_2, $\ldots, x_n$ stopnia $k \in \mathbb{N}$ jest wielomian symetryczny $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będący sumą k-tych potęg wszystkich jego zmiennych.

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Dla $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\begin{aligned}
p_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= n, \\
p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\
&\vdots \\
p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^k.
\end{aligned}$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna suma potęgowa wielomianu symetrycznego n zmiennych stopnia k.

Dla $n = 3$ sumy potęgowe wielomianów symetrycznych są następujące:

$$\begin{aligned}
p_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
p_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\
p_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,
\end{aligned}$$

5 Pełne jednorodne wielomiany symetryczne

Definicja. Pełnym jednorodnym wielomianem symetrycznym zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stopnia $k \in \mathbb{N}$ jest wielomian symetryczny $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będący sumą wszystkich jednomianów stopnia k jego zmiennych.

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

Dla $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\begin{aligned}
h_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1, \\
h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i_1 \le n} x_{i_1}, \\
h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} x_{i_1} x_{i_2}, \\
&\vdots \\
h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jeden pełny jednorodny wielomian symetryczny n zmiennych stopnia k.

Dla $n = 3$ pełne jednorodne wielomiany symetryczne definiujemy jako:

$$\begin{aligned}
h_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\
h_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + \\
&\quad + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

6 Wzory Newtona-Girarda

6.1 Notacja i zależności

Definicja. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zmiennymi. Oznaczmy podstawowy wielomian symetryczny stopnia k przez $e_k(x_1, \ldots, x_n)$, k-tą sumę potęgową jako $p_k(x_1, \ldots, x_n)$ oraz pełny jednorodny wielomian symetryczny stopnia k poprzez $h_k(x_1, \ldots, x_n)$. Wówczas dla każdego $k \ge 0$ otrzymujemy następujące zależności:

$$ke_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

$$kh_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} h_{k-i}(x_1, \ldots, x_n) p_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i e_i(x_1,\ldots,x_n)h_{k-i}(x_1,\ldots,x_n) = 0. \tag{3}$$

Zależności pomiędzy podstawowymi wielomianami symetrycznymi a sumą potęgową

Dla $k \in \{1,2,3,\ldots\}$:

$$\begin{aligned} e_1 &= p_1, \\ 2e_2 &= e_1p_1 - p_2, \\ 3e_3 &= e_2p_1 - e_1p_2 + p_3, \\ &\vdots \\ ke_k &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}p_i. \end{aligned}$$

Zależności pomiędzy sumą potęgową a pełnymi jednorodnymi wielomianami symetrycznymi

Dla $k \in \{1,2,3,\ldots\}$:

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1, \\ 2h_2 &= h_1p_1 + p_2, \\ 3h_3 &= h_2p_1 + h_1p_2 + p_3. \\ &\vdots \\ kh_k &= \sum_{i=1}^{k} h_{k-i}p_i. \end{aligned}$$

Zależności pomiędzy pełnymi jednorodnymi wielomianami symetrycznymi a sumą symetryczną

Dla $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$\begin{aligned}
&e_0h_1 + e_1h_0 = 0,\\
&e_0h_2 + e_1h_1 + e_2h_0 = 0,\\
&e_0h_3 + e_1h_2 + e_2h_1 + e_3h_0 = 0,\\
&\vdots\\
&\sum_{i=0}^{k}(-1)^i e_i h_{k-i} = 0.
\end{aligned}$$

6.2 Zadanie 3.

Przekształcić wielomian $W(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 4x_1x_2x_3$ do postaci sumy elementarnych wielomianów symetrycznych.

Rozwiązanie
Zauważmy, że $W(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 4x_1x_2x_3 = p_3 + 4e_3$. Korzystając ze wzoru Newtona-Girarda, przedstawmy p_3 za pomocą elementarnych wielomianów symetrycznych.

$$\begin{aligned}
p_3 &= e_1p_2 - e_2p_1 + 3e_3,\\
p_2 &= e_1p_1 - 2e_2 = e_1^2 - 2e_2,\\
p_3 &= e_1 \cdot (e_1^2 - 2e_2) - e_2e_1 + 3e_3,\\
p_3 &= e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3.
\end{aligned}$$

Podstawmy otrzymane wyrażenie do wielomianu wyjściowego.

$$\begin{aligned}
x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 4x_1x_2x_3 &= p_3 + 4e_3\\
&= e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 + 4e_3\\
&= e_1^3 - 3e_1e_2 + 7e_3.
\end{aligned}$$

6.3 Zadanie 4.

Przedstawić wielomian $W(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_3$ za pomocą sum potęgowych wielomianu symetrycznego.

Rozwiązanie

Zauważmy, że wielomian W jest pełnym jednorodnym wielomianem symetrycznym stopnia 3, czyli $h_3(x_1, x_2, x_3)$. Wykorzystując zależności pomiędzy pełnymi jednorodnymi wielomianami symetrycznymi oraz sumami potęgowymi, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1, \\ 2h_2 &= h_1 p_1 + p_2, \\ 3h_3 &= h_2 p_1 + h_1 p_2 + p_3. \end{aligned}$$

Przekształcając powyższe zależności, otrzymujemy oczekiwaną postać wielomianu wyjściowego:

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1, \\ 2h_2 &= p_1^2 + p_2, \\ 3h_3 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)p_1 + p_1 p_2 + p_3, \\ 3h_3 &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{3}{2}p_1 p_2 + p_3. \end{aligned}$$

Ostatecznie: $h_3 = \frac{1}{6}p_1^2 + \frac{1}{2}p_1 p_2 + \frac{1}{3}p_3$.

6.4 Zadanie 5.

Następujący wielomian doprowadzić do wyrażenia złożonego z pełnych jednorodnych wielomianów symetrycznych:

$$W(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 x_3)^2 + x_2(x_3 x_1)^2 + x_3(x_1 x_2)^2$$

Rozwiązanie
Rozpiszmy podany wielomian w postaci iloczynu podstawowych wielomianów symetrycznych:

$$x_1(x_2 x_3)^2 + x_2(x_3 x_1)^2 + x_3(x_1 x_2)^2 = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)(x_1 x_2 x_3)$$

Z tożsamości Newtona-Girarda dla sum symetrycznych i pełnych jednorodnych wielomianów symetrycznych przekształcamy wyrażenie stojące po

prawej stronie powyższej równości, czyli e_2e_3:

$$\begin{aligned}
e_2e_3 &= \left(\frac{h_2e_0 + h_1e_1}{-h_0}\right)\left(\frac{h_3e_0 + h_2e_1 + h_1e_2}{-h_0}\right) \\
&= \left(\frac{h_2e_0 + h_1e_1}{h_0}\right)\left(\frac{h_3e_0 + h_2e_1 + h_1e_1}{h_0}\right) \\
&= \frac{1}{h_0^2}\left(h_2e_0 + h_1e_1\right)\left(h_3e_0 + h_2e_1 - \frac{h_1}{h_0}(h_2e_0 + h_1e_1)\right) \\
&= \frac{1}{h_0^2}\left(h_2e_0 + h_1\frac{h_1e_0}{-h_0}\right)\left(h_3e_0 + h_2\frac{h_1e_0}{-h_0} - \frac{h_1}{h_0}\left(h_2e_0 + h_1\frac{h_1e_0}{-h_0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{h_0^2}(h_2e_0 - h_1^2)(h_3e_0 - 2h_2h_1 + h_1^2) \\
&= (h_2 - h_1^2)(h_3 - 2h_2h_1 + h_1^2) \\
&= h_3h_2 - 2h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2 - h_3h_1^2 - h_1^4
\end{aligned}$$

Ostateczna postacią wyrażenia jest $h_3h_2 - 2h_1h_2^2 + 3h_2h_1^2 - h_3h_1^2 - h_1^4$.

7 Pojęcie podstawowej średniej symetrycznej

7.1 Definicja

Podstawową średnią symetryczną zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dla $n, k \in \mathbb{N}$ definiujemy jako:

$$m_k = \frac{e_k}{\binom{n}{k}},$$

gdzie e_k jest elementarną funkcją symetryczną zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

7.2 Nierówność Newtona

Niech m_k oznacza k-tą średnią symetryczną zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wówczas dla każdego $n, k \in \mathbb{N}$:

$$m_{k-1}m_{k+1} \leq m_k^2$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są równe. Zauważmy, że m_1 jest arytmetyczną, zaś m_n geometryczną średnią tych zmiennych.

7.3 Nierówność Maclaurina

Oznaczmy przez m_k k-tą średnią symetryczną zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $k \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, spełniony jest następujący łańcuch nierówności:

$$m_1 \geq \sqrt[2]{m_2} \geq \sqrt[3]{m_3} \geq \ldots \geq \sqrt[n]{m_n}$$

Podobnie jak w nierówności Newtona, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne x_k są sobie równe.

8 Zastosowania wzoru w układach równań

Znajomość wzoru Newtona-Girarda jest przydatna w rozwiązywaniu niektórych układów równań. Najistotniejsza w tego typu zadaniach jest zależność pomiędzy sumą symetryczną, a potęgową wielomianów symetrycznych.

8.1 Zadanie 6.

Dany jest układ trzech równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Określić wartość $x^4 + y^4 + z^4$.

Rozwiązanie
Niech e_k oraz p_k będą sumą symetryczną oraz k-tą sumą potęgową zmiennych x, y, z. Na podstawie tożsamości Newtona:

$$\begin{cases} p_1 = x + y + z = 1 \\ p_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ p_3 = x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Dodatkowo $e_1 = p_1 = 1$ oraz $e_4 = 0$, ponieważ liczba zmiennych nie przekracza 3. Następnie:

$$\begin{cases} p_1 - e_1 = 0 \\ p_2 - e_1 p_1 + 2e_2 = 0 \\ p_3 - e_1 p_2 + e_2 p_1 - 3e_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = -\frac{1}{2} \\ e_3 = \frac{1}{6} \end{cases} .$$

Szukaną wartością jest $x^4+y^4+z^4=p_4$. Ponownie odwołując się do wzoru, otrzymujemy:

$$p_4 = e_1p_3 - e_2p_2 + e_3p_1 - 4e_4 = 3 - 1 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

8.2 Zadanie 7.

Dany jest układ trzech równań:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=7 \end{cases}$$

Znaleźć wartość wyrażenia $x^5+y^5+z^5$.

Rozwiązanie
Dla e_k będącego sumą symetryczną oraz p_k przedstawiającego k-tą sumę potęgową zmiennych x, y, z:

$$\begin{cases} p_1 - e_1 = 0 \\ p_2 - e_1p_1 + 2e_2 = 0 \\ p_3 - e_1p_2 + e_2p_1 - 3e_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = -1 \\ e_3 = 1 \end{cases}.$$

Szukaną wartością jest $x^5+y^5+z^5=p_5$. Liczba zmiennych jest równa 3, a zatem $e_k = 0 \Leftarrow k > 3$. Kontynuując rozważania:

$$p_4 = e_1p_3 - e_2p_2 + e_3p_1 - 4e_4 = 1 + 3 + 7 = 11,$$
$$p_5 = e_1p_4 - e_2p_3 + e_3p_2 - e_4p_1 + 5e_5 = 3 + 7 + 11 = 21.$$

9 Zadania olimpijskie

W zadaniach z olimpiad państwowych i międzynarodowych związanych z wielomianami często kluczowym elementem rozwiązania okazuje się zastosowanie tożsamości Newtona-Girarda lub nierówności symetrycznych. Oto kilka przykładowych zadań.

9.1 Zadanie 8.

Równanie wielomianowe $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste: a, b, c. Wyznaczyć wartość wyrażenia $a^5 + b^5 + c^5$.

Źródło: Canadian Open Mathematics Challenge 2003

Rozwiązanie
Na podstawie wzorów Viete'a:

$$\begin{aligned} e_3 &= abc = 1, \\ e_2 &= ab + bc + ca = 5, \\ e_1 &= a + b + c = 6. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $e_1 = p_1 = 6$, oraz $e_k = 0 \Leftarrow k > 3$, ponieważ liczba zmiennych wynosi 3. Korzystając z tożsamości Newtona:

$$\begin{aligned} p_2 &= e_1p_1 - 2e_2 = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 26, \\ p_3 &= e_1p_2 - e_2p_1 + 3e_3 = 6 \cdot 26 - 5 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 129, \\ p_4 &= e_1p_3 - e_2p_2 + e_3p_1 - 4e_4 = 6 \cdot 129 - 5 \cdot 26 + 1 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = 650, \\ p_5 &= e_1p_4 - e_2p_3 + e_3p_2 - e_4p_1 + 5e_5 = 6 \cdot 650 - 5 \cdot 129 + 1 \cdot 26 - \\ &\quad - 0 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 3281. \end{aligned}$$

9.2 Zadanie 9.

Pierwiastkami $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ są a, b, c, d. Znaleźć wartość $\ell(a) + \ell(b) + \ell(c) + \ell(d)$, gdzie $\ell(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$.

Źródło: American Invitational Mathematics Examination 2003

Rozwiązanie
Niech $z = \ell(a) + \ell(b) + \ell(c) + \ell(d)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} z &= (a^6 - a^5 - a^3 - a^2 - a) + (b^6 - b^5 - b^3 - b^2 - b) \\ &\quad + (c^6 - c^5 - c^3 - c^2 - c) + (d^6 - d^5 - d^3 - d^2 - d) \\ &= (a^6 + b^6 + c^6 + d^6) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5) - (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \\ &\quad - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) \\ &= p_6 - p_5 - p_3 - p_2 - p_1. \end{aligned}$$

Przy zastosowaniu sum potęgowych Newtona dla pierwiastków równania $x^4 - x^3 - x^2 - 1$ przy $p_0 = 6$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_4p_6 + a_3p_5 + a_2p_4 + a_1p_3 + a_0p_2 + a_{-1}p_1 + 6a_{-2} &= 0 \\ p_6 - p_5 - p_4 - 0p_3 - p_2 - 0p_1 - 6 \cdot 0 &= 0 \\ p_6 - p_5 - p_4 - p_2 &= 0. \end{aligned}$$

Po dodaniu $p_4 - p_3 - p_1$ do obydwu stron równania, uzyskujemy:

$$p_6 - p_5 - p_3 - p_2 - p_1 = p_4 - p_3 - p_1$$

A zatem $z = p_4 - p_3 - p_1$. Na podstawie tożsamości Newtona-Girarda znajdujemy, iż $p_1 = 1$, $p_3 = 4$ i $p_4 = 11$. Dlatego odpowiedzią jest:

$$11 - 4 - 1 = 6.$$

9.3 Zadanie 10.

Niech $n \geq 2$ będzie stałą całkowitą. Znaleźć taką najmniejszą stałą C, że nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i)^4$$

zachodzi dla każdego $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$.

Źródło: Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 1999

Rozwiązanie
Ponieważ nierówność jest jednorodna, możemy przyjąć $p_1 = e_1 = 1$. Zgodnie z tożsamością Newtona: $p_4 - e_1 p_3 - e_2 p_2 + e_3 p_1 - 4e_4 = 0$.

Teraz prawa strona nierówności przedstawia się następująco:

$$C(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i)^4 = C(x_1 + \ldots + x_n)^4 = C \cdot 1^4 = C$$

Przekształćmy zatem jej lewą stronę:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j \right)$$

Wykorzystując ponownie fakt, iż $e_1 = 1$, uzyskujemy, iż:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \left(x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) = p_3 - p_4$$

Kontynnujmy rozważania, przy zastosowaniu wzoru Newtona-Girarda:

$$p_3 - p_4 = e_2 p_2 - e_3 p_1 + 4e_4 = (e_2(1 - 2e_2)) + (4e_4 - e_3 e_1) \leq C$$

Przeanalizujmy składniki wyrażenia znajdującego się po lewej stronie ostatniej nierówności:

$$e_2(1-2e_2) = 2e_2(\frac{1}{2}-e_2) \leq \frac{1}{2}(e_2+(\frac{1}{2}-e_2))^2 = \frac{1}{8},$$

co następuje z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną, a geometryczną oraz:

$$4e_4 = 4\binom{n}{4}\left(\frac{e_4}{\binom{n}{4}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{e_4}{\binom{n}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} \leq 4\binom{n}{4}\frac{e_3}{\binom{n}{3}}\frac{e_1}{\binom{n}{1}} = \frac{n-3}{n}e_3e_1 \leq e_3e_1,$$

co zachodzi na podstawie nierówności Maclaurina. W związku z powyższą obserwacją:

$$e_2(1-2e_2)+4e_4-e_3e_1 \leq \frac{1}{8}$$

Najniższą wartością C jest zatem $\frac{1}{8}$.

10 Literatura

1. Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović *The IMO Compendium* Springer

2. Isaac Newton *Arithmetica universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Opera, I.

3. Colin Maclaurin *A second letter to Martin Foulkes, Esq., concerning the roots of equations with the demonstrations of other rules in algebra*, Phil. Trans. 36 (1729), 59–96

4. Olga Holtz Publications' *Polynomial equations and symmetric functions*

5. David A. Cox, John B. Little, Donal O'Shea *Ideals, Varieties, and Algorithms* Springer, New York, 2007