„Kto lekceważy osiągnięcia matematyki,

przynosi szkodę całej nauce.”

Roger Bacon

Wykorzystanie rozkładu liczby na czynniki pierwsze

Uczestnik Konkursu:

Piotr Pena

Szkoła Podstawowa Nr 5 im. M. Kopernika
w Zespole Szkół Publicznych Nr 2 w Wadowicach

klasa 4

Opiekun uczestnika:

Małgorzata Niewidok – nauczyciel matematyki

Adres szkoły: 34 – 100 Wadowice, os. Kopernika 11, Tel. 33 82 324 80

Wprowadzenie

1. Każda liczba naturalna n > 1 jest liczbą pierwszą lub liczbą złożoną.

Rozkład na czynniki pierwsze to przedstawienie liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych np.: $27=3x3x3=3^3$ $4=2x2=2^2$

- Liczby pierwsze to te , które mają tylko dwa dzielniki tzn. 1 i samą siebie . Liczba złożona ma co najmniej trzy dzielniki.

Początkowe liczby pierwsze to 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 itd.

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

- Dzielnik liczby to liczba , przez którą dzieli się inna liczba bez reszty np.:

a) dzielnikiem liczby 30 jest 15

b) dzielnikiem liczby 27 jest 9

- Cechy podzielności przez 2 , 3 , 5 :

a) liczba dzieli się przez 2 , gdy jest parzysta tzn. jest liczbą 0 , 2 , 4 , 6 , 8 lub jej ostatnią cyfrą jest 0 , 2 , 4 , 6 , 8 np.:

62 , 74, 96 , 458 , 7480

b) liczba dzieli się przez 3 , gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3 np.:

liczba 1689 jest podzielna przez 3 , ponieważ 1 + 6 + 8 + 9 = 24

24 : 3 = 8

c) liczba dzieli się przez 5 , gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5 np.:

5 , 40 , 545 , 74580

Przykład rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze :

120	**2**	**- dzielę przez 2, póki się da .**
60	**2**	**- dzielę przez 2 , póki się da .**
30	**2**	**- dzielę przez 2 , póki się da.**
15	**3**	**- dzielę przez 2 , póki się da , jeśli się nie da , dzielę przez 3**
5	**5**	**- dzielę przez 3, póki się da, jeśli się nie da, dzielę przez 5**
1		

Potem dzieliłbym przez kolejne liczby pierwsze tzn. 7 , 11 , 13 , 17 itd.

2. Z rozkładu na czynniki pierwsze można uzyskać :

a) Wszystkie dzielniki danej liczby :

105	3
35	5
7	7
1	

- najpierw wyznaczam pojedyncze dzielniki : 1 , 3 , 5 , 7

- potem wyznaczam iloczyn par liczb : 3x5 = 15 , 5x7 = 35 , 3x7 = 21

- następnie wyznaczam iloczyn trójek liczb : 3x5x7 = 105

- później wyznaczałbym czwórki , piątki , szóstki itd.

- wypisuję wszystkie dzielniki : D_{105} = {1 , 3 , 5 , 7 , 15 , 21 , 35 , 105}

b) szukanie NWD (największego wspólnego dzielnika) .

NWD dwóch lub więcej liczb, to największa z liczb, przez które dzieli się bez reszty każda z danych liczb.

NWD (36 , 128) = 2x2 = 2^2 = 4

128	2*
64	2*
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

36	2*
18	2*
9	3
3	3
1	

- rozkładam obie liczby na czynniki pierwsze .

- wybieram takie same liczby w obu rozkładach i mnożę je.

c) szukanie NWW (najmniejszej wspólnej wielokrotności)

NWW pary liczb to najmniejsza z liczb, która ma taką własność, że dzieli się bez reszty przez każdą z tych liczb.

Naturalnie można wypisywać wielokrotności liczb i znaleźć to, o co nam chodzi, jednak ten sposób sprawdza się tylko na małych liczbach i to nie zawsze .

Łatwiej jest wyliczyć NWW za pomocą rozkładu liczb na czynniki pierwsze .

NWW (36 , 128) = (2^2x3^2) x 2^5 = 36 x 32 = 1152

36	2*
18	2*
9	3
3	3
1	

128	2*
64	2*
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

- rozkładam liczby na czynniki pierwsze .

- następnie zaznaczam wspólne dzielniki .

- mnożę pierwszą liczbę przez niezaznaczone dzielniki drugiej liczby.

Przykłady zastosowania

Zadanie nr 1 :

Państwo Kowalscy chcą wyłożyć balkon w kształcie prostokąta o wymiarach 216cmx120cm jednakowymi kwadratowymi kafelkami o możliwie największym boku , którego długość w cm wyrażą się liczbą naturalną . Ile kafelków muszą kupić , jeśli nie będą one przycinane ?

Rozwiązanie :

Zadanie tradycyjną metodą byłoby rozwiązać bardzo trudno . Dlatego musimy wykorzystać rozkład na czynniki pierwsze .

Po pierwsze musimy odszukać długość boku kafelka

NWD (216 , 120) = 2^3x3 = 24

216	2 *
108	2 *
54	2 *
27	3 *
9	3
3	3
1	

120	2*
60	2*
30	2*
15	3*
5	5
1	

Wiemy już , że bok kafelka ma długość 24 cm . Teraz musimy obliczyć, ile takich kwadratów mieści się na balkonie .

I sposób

24x24 = 24^2 = 576 [cm^2]   216x120 = 25.920 [cm^2]   25.920 : 576=45 kafelków

II sposób

Mnożymy niezaznaczone liczby z obu rozkładów, które informują, ile kafelków o boku długości 24 cm ułożymy na każdym boku prostokąta , czyli 3x3x5 = 45

Odpowiedź : Balkon wyłożą 45 kafelkami.

Zadanie nr 2 :

Dwaj maratończycy odbywają trening biegając po zamkniętej trasie . Bieg rozpoczęli jednocześnie ze wspólnej linii startu . Jeden z nich pokonuje jedno pełne okrążenie w ciągu 6 min. , drugi w ciągu 8 min. Trening trwa 2 godz. Ile razy obaj biegacze znajdą się jednocześnie na linii startu ?

Rozwiązanie :

Łatwo się domyślić , że zastosujemy tutaj szukanie NWW . By dowiedzieć się ile razy zawodnicy spotkali się na linii startu musimy znaleźć NWW liczb 6 i 8 .

NWW (6 , 8) = $6x2^2$ =24

8	2*
4	2
2	2
1	

6	2*
3	3
1	

Oznacza to , że zawodnicy spotykają się co 24 min. Skoro trening trwa 2 godz. czyli 120 min. , to biegacze w czasie treningu znajdą się jednocześnie na linii startu 120 : 24 = 5 razy , a ponieważ gdy startują , także są obok siebie to spotkają się 6 razy .

Odpowiedź : Zawodnicy spotkają się 6 razy .

Zadanie nr 3 :

Ile dodatnich liczb całkowitych n ma tę własność , że n + 2 jest dzielnikiem liczby 78 ?

Rozwiązanie :

Najpierw musimy znaleźć dzielniki liczby 78 . Rozkładam liczbę 78 na czynniki pierwsze.

78	2
39	3
13	13
1	

Wyznaczam dzielniki liczby 78 czyli D_{78} = { 1 , 2 , 3 , 6 , 13 , 26 , 39 , 78 } .

Zatem n + 2 = 1 lub 2 lub 3 lub 6 lub 13 lub 26 lub 39 lub 78 . Więc n może być równe (-1) , 0 , 1 , 4 , 11 , 24 , 37 , 76 , ponieważ chodzi nam o liczby dodatnie, dlatego zostają nam liczby 1 , 4 , 11 , 24 , 37 , 76 . Mamy 6 takich liczb .

Odpowiedź : Jest 6 takich liczb .

Wnioski

Korzystać z rozkładu liczb będziemy wiele razy m.in. tak jak w zadaniu nr 1 układając kafelki , płytki , panele na podłodze , na balkonie , w łazience . Skorzystamy z niego także , gdy zaczniemy prowadzić firmę i będziemy musieli zakupić jak najmniejszą ilość pudeł , by spakować produkt . Umiejętność rozkładania liczb na czynniki pierwsze jest bardzo przydatna , a wielu z nas nie zdaje sobie z tego sprawy . Myślę, że zdobywając nowe umiejętności matematyczne w przyszłości będę mógł rozwiązać jeszcze wiele innych problemów.

Sam ułożyłem jedno z możliwych zadań, którego rozwiązanie ułatwia znajomość rozkładu liczb na czynniki pierwsze oraz obliczanie NWD.

Mamy do dyspozycji prostopadłościenne pudło o wymiarach 135cmx120cmx90cm . Jaka jest największa możliwa długość krawędzi sześciennych klocków , które wypełnią całkowicie pudło ? Ile takich klocków należałoby przygotować ?

Rozwiązanie :

- rozkładam liczby na czynniki pierwsze :

135 = 3x3x3x5 , 120 = 2x2x2x3x5 , 90 = 2x3x3x5

- obliczam NWD (135 , 120 , 90) = 3x5 = 15

- obliczam ilość sześciennych klocków n = 3x3x3x2x2x2x2 = 432

- Odpowiedź : Długość krawędzi sześciennego klocka wynosi 15 cm i należy przygotować 432 takie klocki , by wypełnić pudło .

Literatura:

Tablice matematyczne, Tomasz Szymczyk,

Miniatury matematyczne, część 2, Wydawnictwo Aksjomat

Mały słownik matematyczny, Wydawnictwo Wiedza Powszechna

Zadania z Małopolskiego Konkursu Matematycznego dla szkół podstawowych, etap rejonowy w roku szkolnym 2011/2012

Zadania z Międzynarodowego Konkursu Matematycznego Kangur: kategoria Maluch i kategoria Beniamin.