Weronika Łabaj

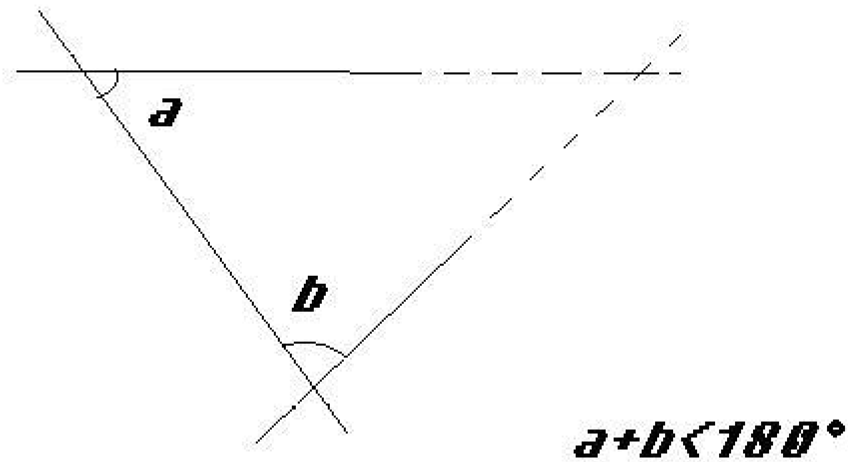
Geometria Bolyaia-Łobaczewskiego

Tematem mojej pracy jest geometria hiperboliczna, od nazwisk jej twórców nazywana też geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego.

Mimo, że odkryto ją dopiero w XIX wieku początki historii, która doprowadziła do jej powstania sięgają już starożytności. Wtedy grecki matematyk i filozof – Euklides napisał dzieło zatytułowane „Elementy", w którym zebrał i usystematyzował całą ówczesną wiedzę matematyczną. W dziedzinie geometrii jego praca polegała na ustaleniu podstaw, czyli sformułowaniu definicji i aksjomatów – twierdzeń przyjmowanych bez dowodu, niejako założeń, na podstawie których wyprowadza się wszystkie pozostałe twierdzenia geometryczne.

Aksjomatem wzbudzającym wiele kontrowersji okazał się tzw. piąty postulat, czasem nazywany również pewnikiem Euklidesa, który brzmi:

Jeżeli dwie proste przy przecięciu z trzecią tworzą kąty wewnętrzne jednostronne, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te przecinają się przy dostatecznym przedłużeniu i to po tej właśnie stronie.



Cóż, przyznać trzeba, że twierdzenie jest najogólniej mówiąc mało przejrzyste. Zrozumienie go bez odpowiedniego rysunku (rys. powyżej) graniczy z niemożliwością, więc aby udoskonalić pracę Euklidesa matematycy próbowali rozwiązać problem nieszczęsnego aksjomatu. Część z nich zajęła się sformułowaniem twierdzeń równoważnych, ale bardziej zrozumiałych, jak np.

Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180°.

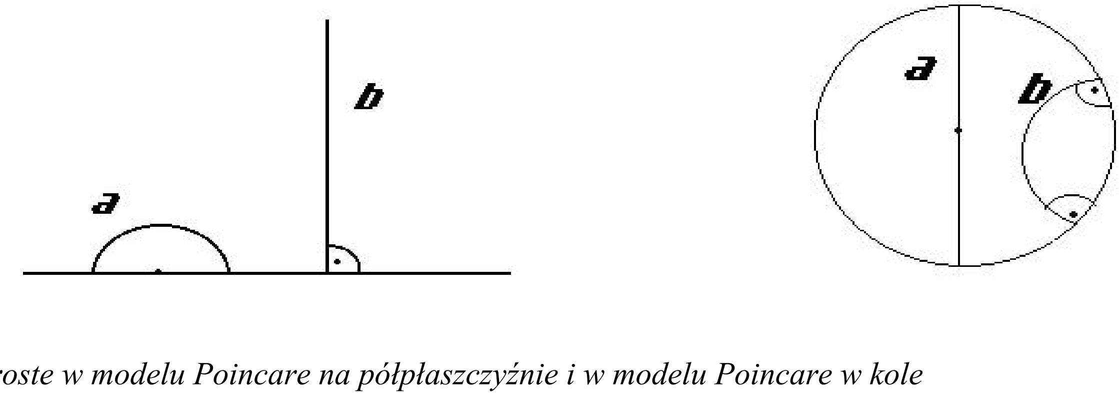
Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Istnieje prostokąt.

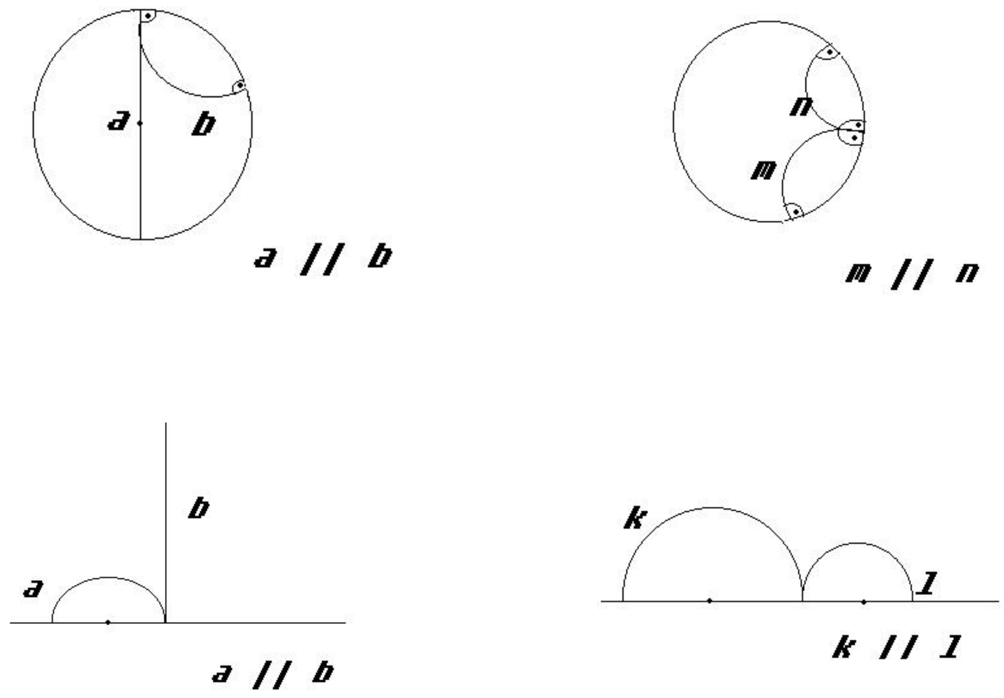
Inni starali się wykazać zbędność założenia poprzez udowodnienie go na podstawie poprzednich aksjomatów. Jak się jednak okazało nie dość, że jest to niemożliwe to jeszcze na dodatek po zaprzeczeniu postulatowi... spodziewanej sprzeczności nie ma, wszystko nadal jest zgodne z logiką, mimo, że wnioski, które z tego wynikają na pierwszy rzut oka wydają się absurdalne.

Taka właśnie jest geometria hiperboliczna – podobna, a jednak całkowicie odmienna od znanej nam geometrii euklidesowej. A różni je tak niewiele – pewnik Euklidesa, prawdziwy w tej ostatniej, zaprzeczony u Bolyai-Łobaczewskiego, wszystkie pozostałe założenia są takie same.

Proste w modelu Poincare na półpłaszczyźnie i w modelu Poincare w kole Ponieważ geometria hiperboliczna jest dla nas mniej naturalna istnieje szereg modeli, które ułatwiają nam zauważenie i zrozumienie wiele z jej właściwości. Ja w swojej pracy posługiwałam się modelami Poincare na półpłaszczyźnie i w kole. Na modelu w półpłaszczyźnie płaszczyzną jest półpłaszczyzna bez prostej będącej jej brzegiem, prostymi natomiast są półokręgi, których środki leżą na brzegu półpłaszczyzny i półproste do niej prostopadłe. Prosta, która jest brzegiem półpłaszczyzny stanowi zbiór tzw. punktów niewłaściwych płaszczyzny, które do płaszczyzny nie należą. W modelu w kole płaszczyzną jest koło bez brzegu i punktu będącego jego środkiem, a prostymi są średnice koła i łuki prostopadłe do brzegu koła. Tutaj punktami niewłaściwymi płaszczyzny jest jego brzeg oraz środek.

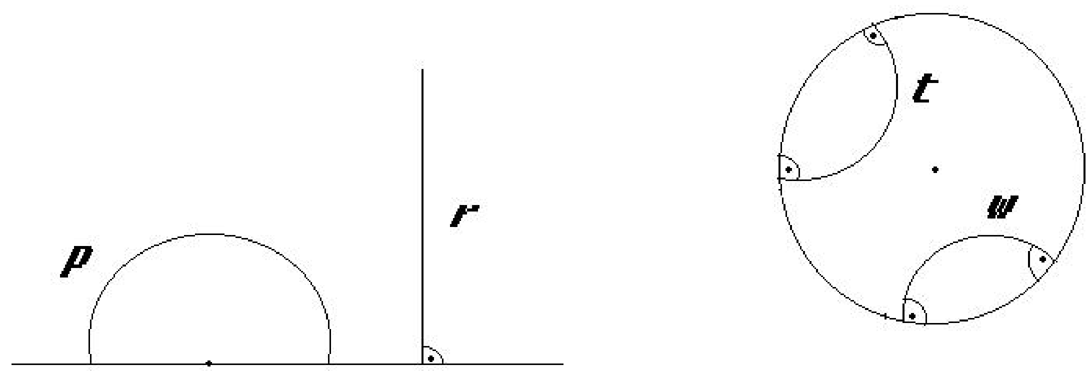


Proste w modelu Poincare na półpłaszczyźnie i w modelu Poincare w kole



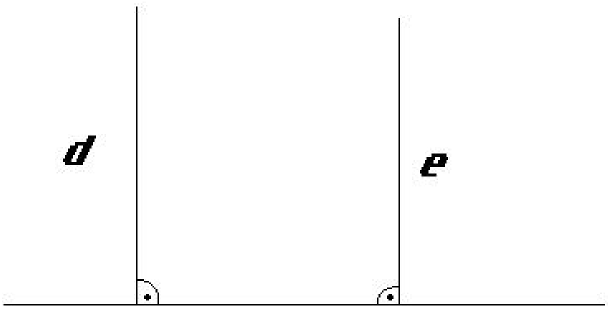
Przykłady prostych równoległych w obu modelach.

Nowością, która pojawia się w geometrii hiperbolicznej jest pojęcie nadrównoległości. Jak widać na poprzednich rysunkach, proste równoległe mają tu punkt wspólny, punkt niewłaściwy płaszczyzny, czyli najogólniej mówiąc przecinają się w nieskończoności, analogicznie jak wykres funkcji y = a/x. Natomiast prostymi, które nigdy się nie przetną są proste nadrównoległe.

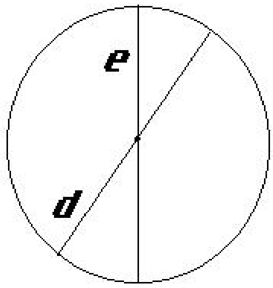


Przykłady prostych nadrównoległych w modelach.

W tym momencie natykamy się na problem, czy proste przedstawione na kolejnym rysunku są prostymi równoległymi, nadrównoległymi, czy może przecinającymi się ?



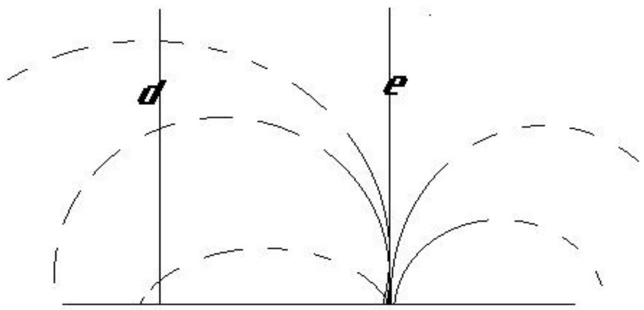
Patrząc na ilustracją nasuwa się myśl, że to przecież oczywiste, na pierwszy rzut oka widać, że proste nigdy się nie przetną, są więc nadrównoległe. Sytuacja komplikuje się jednak po przeniesieniu jej do modelu w kole.



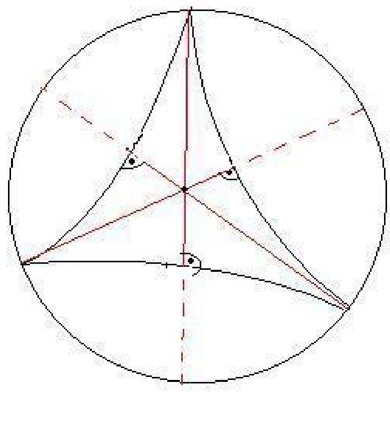
W tym przypadku proste ewidentnie się przecinają.

Jak pogodzić te dwa, wydawałoby się sprzeczne stanowiska ? Otóż, jak to zwykle w takich sytuacjach bywa, prawda tkwi pośrodku, ponieważ proste ani się nie przecinają ani nie są nadrównoległe, a tylko .... równoległe. Dlaczego ?

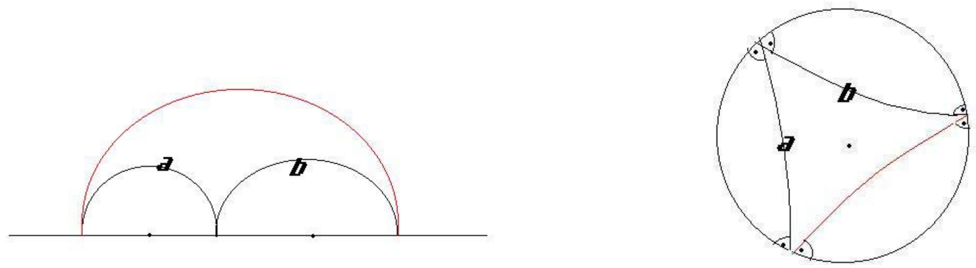
Przede wszystkim musimy pamiętać, że w modelu w kole punkt będący środkiem koła nie należy do płaszczyzny, jest punktem niewłaściwym, a tym samym proste, które przecinają się w tym punkcie są równoległe względem siebie. Co do modelu na półpłaszczyźnie trzeba odwołać się do definicji równoległości, ponieważ w tej geometrii nieco różni się od sposobu w jaki intuicyjnie rozumiemy to pojęcie. Otóż *równoległość przestała oznaczać nieprzecinanie, oznacza oddzielanie*, tzn. prosta równoległa do danej to taka, która oddziela proste przecinające daną prostą od prostych do niej nadrównoległych, co obrazuje poniższy rysunek.



Przy okazji chciałabym pokazać rysunek trójkąta, którego wysokości są równoległe względem siebie. Jak to możliwe ? Odpowiedzią na to pytanie są przedstawione wyżej rozważania.



Tym co najbardziej mnie zainteresowało w geometrii hiperbolicznej jest fakt, że część znanych nam pojęć, jak wcześniej przytoczona równoległość, zmienia swoje znaczenie, a ponadto pojawiają się zupełnie inne, nieznane geometrii euklidesowej. Jednym z nich jest pojęcie prostej zagradzającej kąt, czyli równoległej do obu ramion kąta jednocześnie.



Przykłady prostej zagradzającej kąt w modelach.

To, co tutaj zaprezentowałam jest tylko krótkim wstępem do geometrii hiperbolicznej, w której stwierdzenia na pozór absurdalne niejednokrotnie okazują się prawdziwe, jak choćby nie istnieje prostokąt, suma kątów wewnętrznych trójkąta waha się od 0 do 180°, istnieją trójkąty niewłaściwe, których co najmniej jeden wierzchołek jest punktem niewłaściwym płaszczyzny i, co się z tym wiąże, trójkąt prostokątny o boku nieskończonej długości, poza tym nie istnieje podobieństwo, a tylko przystawanie i wiele, wiele innych ciekawych własności.

Geometrie odmienne od „naszej", poczciwej euklidesowej są naprawdę pasjonującym tematem, co więcej, mającym liczne zastosowania i mam nadzieję, że moja praca pomoże się wam nim zainteresować.