KOŁO MATEMATYCZNE

PRZY SZKOLE PODSTAWOWEJ NR 89

W KRAKOWIE

CIEKAWE WŁASNOŚCI KWADRATÓW MAGICZNYCH

Autorzy referatu: Weronika Kurnik kl.5d
Natalia Tokarska kl.5d
Sebastian Kuleszyński kl.5d
Piotr Perłowski kl.5d

Opiekun koła : mgr Maria Salwińska

Kraków, luty 2011 rok

Na kilku kolejnych zajęciach Koła Matematycznego zajmowaliśmy się figurami magicznymi. Dowiedzieliśmy się na tych zajęciach, że już od najdawniejszych czasów wśród „figur magicznych" największą popularnością cieszyły się **kwadraty magiczne**. O nich też najwięcej mogliśmy znaleźć informacji w książkach i w Internecie. Dlatego też najpierw mówiliśmy o kwadratach magicznych.

Co to jest kwadrat magiczny ? Znaleźliśmy odpowiedź, że jest to zbiór mniejszych kwadratów, czyli pól, w których liczby stanowiące pewien postęp wypisuje się w ten sposób, że suma liczb w każdym poziomym rzędzie i w każdej pionowej kolumnie i na obu przekątnych jest zawsze taka sama.

Kwadraty magiczne dzielimy biorąc pod uwagę następujące aspekty:

a) w zależności od postępu, w jakim idą liczby na:

- arytmetyczne,
- geometryczne,

b) ze względu na ustawienie liczb w kwadracie na:

- magiczne zwykłe – posiadające stałe sumy w wierszach, kolumnach i na przekątnych;
- półmagiczne – posiadające stałe sumy tylko w kolumnach i wierszach;
- magiczne o właściwościach szczególnych;

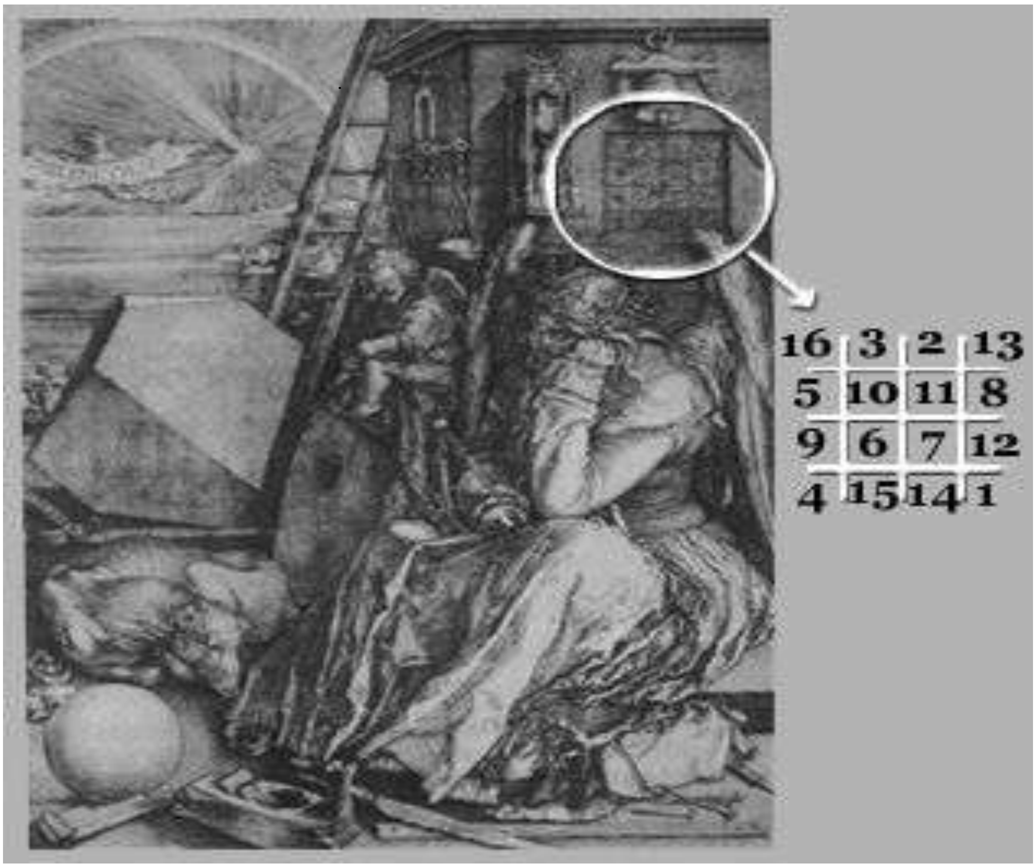
c) w zależności od stopnia kwadratu, czyli liczby pól wzdłuż jednego boku na:

- nieparzyste np. 3x3, 5x5, 7x7,9x9;
- parzyste np. 4x4, 8x8, 12x12, 16x16;
- nieparzysto- parzyste np.6x6, 10x10, 14x14 , 18x18 ;

Kwadraty magiczne znane były już Chińczykom i Hindusom przed paru tysiącami lat. Dowodem na to mogą być między innymi amulety chińskie z kwadratami magicznymi, na których jeszcze nie ma cyfr, lecz są odpowiednie ilości nakłuć czy wydrążeń.
W IX wieku naszej ery kwadraty magiczne znane już były Arabom, do Europy wiedza o nich dotarła dopiero w XIV wieku za sprawą mieszkającego w Konstantynopolu Greka – Moscopulos'a.

Do końca XIX wieku magiczne kwadraty były niemal obowiązującym "elementem zdobniczym" każdego miejsca, w którym dochodziło do wymiany pieniędzy oraz handlu. Wieszane w domu miały zapewnić dostatek, spokój oraz harmonię.

Najsłynniejszym a właściwie najbardziej znanym i popularnym kwadratem magicznym jest kompozycja, którą widać na miedziorycie Alberta Dürera „ *MELANCHOLIA"*.
W kwadracie tym można zauważyć, że suma liczb w każdym poziomym rzędzie, w każdej pionowej kolumnie i po obu przekątnych wynosi tyle samo, czyli 34. Dodatkową ciekawostką jest to, że dwie środkowe liczby dolnego rzędu dają rok powstania dzieła (**1514** rok).



Mówiąc o kwadratach magicznych skupiliśmy się najpierw na najprostszych kwadratach i na niektórych ciekawych ich własnościach.
Najpierw narysowaliśmy kwadrat magiczny 3-go stopnia w którym rozmieściliśmy ciąg liczb : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
np.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obliczyliśmy sumę wszystkich liczb (wynosi 45) i ustaliliśmy, że suma magiczna będzie wynosiła 1/3 liczby 45 czyli $S_m = 15$.
Zauważyliśmy także, że liczba środkowa ciągu liczb tj, liczba **5** musi być w środku kwadratu i stanowi ona 1/3 sumy magicznej czyli sumy liczb stojących w polach na każdym z ośmiu kierunków.
Zauważyliśmy również , że liczba **5** stojąca w środku kwadratu jest średnią arytmetyczną liczb stojących w dwóch pozostałych polach na każdym z czterech kierunków.
Wykonując obliczenia dostrzegliśmy jeszcze jedną prawidłowość:
każda liczba stojąca w polu narożnym jest średnią arytmetyczną liczb stojących na krótszej przekątnej nie sąsiadującej z tym polem (np. 2= ½(3+1) i 4 = ½(1+7) itd.)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$$8^2 + 1^2 + 6^2 = 4^2 + 9^2 + 2^2 = 101$$

$$8^2 + 3^2 + 4^2 = 6^2 + 7^2 + 2^2 = 89$$

Zauważyliśmy także, że sumy kwadratów liczb stojących w pierwszym i trzecim wierszu są równe i wynoszą : **101** oraz, że sumy kwadratów liczb stojących w pierwszej i trzeciej kolumnie są też równe i wynoszą : **89.**

Wykonując dalsze próby i obliczenia doszliśmy do następujących wniosków:

1) *Kwadrat magiczny pozostanie nadal magicznym , jeśli wszystkie liczby, jakie zawiera , powiększymy lub pomniejszymi o tę samą liczbę.*

2) *Pozostanie również magicznym, gdy pomnożymy lub podzielimy wszystkie jego składniki przez jakąś liczbę stałą.*

Oto przykłady :

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

S_m = 15

19	**12**	**17**
14	**16**	**18**
15	**20**	**13**

S_m = 48

38	**24**	**34**
28	**32**	**36**
30	**40**	**26**

S_m = 96

W pierwszym kwadracie suma magiczna czyli suma liczb w poszczególnych rzędach kolumnach i na przekątnych wynosi **15.**

W drugim kwadracie dodajemy do każdej liczby np. po 11 i suma magiczna wynosi wówczas 15 + 3 x 11 = **48**

W trzecim kwadracie mnożymy np. wszystkie wyrazy kwadratu drugiego przez 2 i suma magiczna wynosi wtedy 2 x 48 = **96**

3) *Jeśli kwadrat jest magiczny dla jakiegoś postępu arytmetycznego, to będzie magiczny dla tak samo rozmieszczonego postępu arytmetycznego o innym wyrazie pierwszym i o innej różnicy*

Np. Jeżeli w pierwszym z podanych kwadratów magicznych zamiast liczb:

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 8, 9

odpowiednio rozmieścimy wyrazy postępu:

11, 13, 15, 17, **19**, 21, 23, 25, 27

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

S_m = 15

25	**11**	**21**
15	**19**	**23**
17	**27**	**13**

S_m = 57

Podsumowując zauważone własności doszliśmy do wniosku, że chcąc utworzyć dowolny kwadrat magiczny można na początku ułożyć go z liczb najprostszych np. z liczb naturalnego ciągu : 1, 2, 3, 4, 5, ..., a potem przez mnożenie , dzielenie, powiększanie lub zmniejszanie tych liczb można osiągnąć nieskończoną ilość kwadratów magicznych o różnych sumach magicznych.

4) Inną własnością kwadratów magicznych jest to, że z dwu kwadratów magicznych możemy otrzymać trzeci przez sumowanie liczb stojących w analogicznych polach:

2	**9**	**4**
7	**5**	**3**
6	**1**	**8**

S_m = 15

+

19	**26**	**21**
24	**22**	**20**
23	**18**	**25**

S_m = 66

=

21	**35**	**25**
31	**27**	**23**
29	**19**	**33**

S_m =81

Suma magiczna takiego nowego kwadratu równa się sumie sum magicznych obu kwadratów składowych czyli :

81= 15+66

5) Suma magiczna każdego kwadratu magicznego zestawionego z postępu arytmetycznego równa się połowie sumy pierwszego i ostatniego wyrazu, pomnożonej przez liczbę podziałek boku tego kwadratu, czyli przez stopień kwadratu ,

$$\mathbf{S_m = n\,(X + Y) / 2}$$

S_m – suma magiczna kwadratu
X - pierwszy wyraz ciągu liczb
Y– ostatni wyraz ciągu liczb
n - stopień kwadratu magicznego

Np. suma magiczna najprostszego kwadratu z 9 pól (kwadratu stopnia 3-go) równa się :

$$S_m = 3\cdot(1+ 9) / 2 = 15$$

zaś suma magiczna kwadratu Dürera (kwadratu stopnia 4-go) wynosi :

$$S_m = 4\cdot(1+ 16) / 2 = 34$$

6) Kwadrat nie utraci swej magiczności, jeśli przestawimy jego kolumny oraz wiersze leżące symetrycznie względem środka kwadratu.

Na przykład:

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

S = 34

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	1	14

S = 34

W pierwszym z tych kwadratów przestawiliśmy kolumny pierwszą i czwartą ; powstał kwadrat drugi, w którym zachowała się suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie, ale nie zachowała się suma na przekątnych . Jeśli teraz w drugim kwadracie przestawimy wiersze pierwszy i czwarty, to otrzymamy kwadrat trzeci, już doskonale magiczny.

Na kolejnych zajęciach koła poznawaliśmy różne metody budowania nieparzystych kwadratów magicznych : np. poznaliśmy metodę hinduską i podobną metodę syjamską oraz metodę skoków konika szachowego. Tymi metodami budowaliśmy różne nieparzyste kwadraty magiczne.

W naszej pracy pokażemy przykłady kwadratów 5- go i 7-go stopnia.

METODA HINDUSKA

Przekazana została matematykom europejskim przez Greka– Moscopulos'a mieszkającego w Konstantynopolu.

Dla przykładu omówimy kwadrat siódmego rzędu, to znaczy 49-polowy. Stawiamy jedynkę w polu znajdującym się bezpośrednio pod polem środkowym i od niej piszemy ku prawej stronie w dół po przekątnej dalsze wyrazy naturalnego ciągu liczb.
Czwórka wypadnie już poza kwadratem ; przenosimy ją w analogiczne pole wewnątrz kwadratu. Piątka znów wyjdzie poza kwadrat ; postępujemy z nią tak samo, jak z czwórką. Doszedłszy do 7 napotykamy na drodze pole zajęte już przez jedynkę. W tym przypadku stawiamy 8 pod 7 o dwa pola niżej i kontynuujemy na tych samych zasadach wypisywanie liczb dalszych aż do 49.
Otrzymaliśmy w rezultacie kwadrat z sumą magiczną 175.

22↘	47↘	16↘	41↘	10↘	35↓	4↘	
5↘	23	48	17	42↓	11	29↘	←5
30↘	6	24	49	18	36↘	12	←30
13↘	31	7↓	25	43↘	19	37	←13
38↘	14↓	32	1↘	26	44	20	←38
21↓	39	8↘	33	2	27	45	←21
46↘	15↘	40	9	34	3	28↓	←46
22↑	47↑	16↑	41↑	10↑	35↑	4↑	
						29↑	

← analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↑ analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↓ kolejna liczba o dwa pola niżej
↘ ku prawej stronie w dół po przekątnej

$S_m = 7 \cdot (1 + 49) / 2 = 175$

Kwadrat stopnia 7-go z sumą magiczną ***175***

Oto graficzne przedstawienie metody hinduskiej na przykładzie kwadratu stopnia 5-go:

11	24	7	20	3	
4	12	25	8	16	4
17	5	13	21	9	17
10	18	1	14	22	10
23	6	19	2	15	23
11	24	7	20	3	
				16	

$S_m = 5 \cdot (1 + 25) / 2 = 65$

Kwadrat stopnia 5-go z sumą magiczną ***65***

METODA SYJAMSKA

Podaje ją La Loubére w swym dziele pod tytułem *Du royaume de Siam* . Autor tej metody był posłem króla Ludwika XIV do króla Syjamu (1687 – 1688) i tam z tą metodą się zapoznał.

Metoda ta polega na tym , że pierwszy wyraz postępu liczb stawia się w środkowym polu górnego rzędu i wpisuje się dalsze wyrazy w kierunku na prawo ku górze postępując tak, jak w metodzie poprzedniej, z tą tylko różnicą, iż doszedłszy np. piątką do pola zajętego, wpisuje się 6 o jedno pole niżej, bezpośrednio pod piątką.

↗ ku prawej stronie w górę po przekątnej
↓ analogiczne pole wewnątrz kwadratu
← analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↓ kolejna liczba o 1 pole niżej $S_m = 5 \cdot (1+25) / 2 = 65$

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Kwadrat stopnia 5-go z sumą magiczną ***65***

Oto graficzne przedstawienie metody syjamskiej na przykładzie kwadratu stopnia 7-go:

	31	40	49	2↓	11	20	
30	39	48	1↗	10	19	28↓	30
38	47	7	9	18	27	29	38
46	6	8	17	26	35	37	46
5	14	16	25	34	36	45	←5
13	15	24	33	42	44	4	13
21	23	32	41	43	3	12	21
22	31	40	49	2	11	20	

↗ ku prawej stronie w górę po przekątnej
↓ analogiczne pole wewnątrz kwadratu
← analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↓ kolejna liczba o 1 pole niżej

Kwadrat stopnia 7-go z sumą magiczną ***175***

METODA SKOKÓW KONIKA SZACHOWEGO

Metoda ta jest ciekawa i oryginalna. Pokażemy ją na przykładzie kwadratu 7-go stopnia. Jedynkę stawiamy w dowolnym polu, nad nią zaś 2 , 3 i kolejne liczby w polach na które wypadłby skok konika szachowego. Zgodnie z regułą 4 wypadnie poza obręb kwadratu, należy więc ją przenieść na pole analogiczne wewnątrz kwadratu i od niej kontynuować skoki. Kiedy dojdziemy do 7 , a potem do dalszych wielokrotności 7, tzn. 14, 21, ...liczbę następną , tj. 8, 15, 22, ...podpisujemy w polu bezpośrednio niższym i od niej znów skokami konika rozstawiamy następne liczby, dopóki nie dojdziemy do 49.

Oto graficzne przedstawienie tej metody na przykładzie kwadratu stopnia 7-go:

					13		
	9			4			
7				12			7
8			3				
			11			6	
		2				14	
		10			5	15	
	1						
	9			4			

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	-
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	2	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	5	15	32
40	1	18	35	45	13	23	
48	9	26	36	4	21	31	
					22		

$S_m = 7 \cdot (1 + 49) / 2 = 175$ *Kwadrat stopnia 7-go z sumą magiczną **175***

Na kolejnych zajęciach rozwiązywaliśmy zadania , które przyniosła Pani a które dotyczyły kwadratów magicznych 3-go stopnia.

<u>Zadanie 1</u> polegało na tym by rozmieść liczby 2,3,4,8,9,10,14,15,16 w tablicy 3 x 3, aby była ona kwadratem magicznym.

A oto jak rozwiązaliśmy to zadanie:

- obliczyliśmy sumę wszystkich danych liczb i wynosiła ona 81,
- obliczyliśmy sumę magiczną tego kwadratu : 1/3 · 81 = 27 **S = 27**
- ustaliliśmy również , że liczba w polu środkowym kwadratu wynosi : 1/3 · 27 = 9,
- sprawdziliśmy czy liczbę 27 można przedstawić w postaci sumy trzech składników na 8 sposobów , udało się .

2 + 9 + 16 = 27
2 + 10 + 15 = 27
3 + 9 + 15 = 27
3 + 10 + 14 = 27

3 + 8 + 16 = 27
4 + 9 + 14 = 27
4 + 8 + 15 = 27
8 + 9 + 10 = 27

Liczby stojące w narożnych polach kwadratu magicznego leżą na trzech kierunkach : w wierszu, w kolumnie i na jednej przekątnych. Ponieważ liczby: 3,8,10 i 15 pojawiają się w trzech rozkładach liczby 27, więc muszą być one rozmieszczone w polach narożnych.

3		
	9	

Najpierw **3** umieściliśmy np. w górnym narożnym polu.

3	**10**	**~~14~~**
8	**~~9~~**	
~~16~~		**15**

Potem rozkłady : 3 + 9 + 15 = 27
3 + 10 + 14 = 27
3 + 8 + 16 = 27

umieściliśmy w pierwszym wierszu , w pierwszej kolumnie i na przekątnej, ale nie dowolnie. Nie może być tak jak na powyższym rysunku, ponieważ suma na wskazanej przekątnej nie jest równa 27. Wykonując próby doszliśmy do wniosku, że powinno być tak:

3	**14**	**10**
16	**9**	
8		**15**

Pozostałe pola są już łatwe do uzupełnienia. Mamy więc ostatecznie taki magiczny kwadrat.

3	**14**	**10**
16	**9**	**2**
8	**4**	**15**

Zadanie 2 polegało na rozmieszczeniu liczb: 0,2,4,6,8,10,12,14,16 w tablicy 3x3, tak aby była ona kwadratem magicznym.

A oto jak rozwiązaliśmy to zadanie:

- obliczyliśmy sumę wszystkich danych liczb i wynosiła ona 72,
- obliczyliśmy sumę magiczną tego kwadratu : $1/3 \cdot 72 = 24$ **S = 24**
- ustaliliśmy również , że liczba w polu środkowym kwadratu wynosi : $1/3 \cdot 24 = 8$,
- sprawdziliśmy że liczbę 24 można przedstawić w postaci sumy trzech składników na 8 sposobów i w analogiczny sposób rozwiązaliśmy to zadanie.

Oto rozwiązanie:

2	**12**	**10**
16	**8**	**0**
6	**4**	**14**

Zadanie 3 polegało na sprawdzeniu, czy liczby 1,4,5,6,12,13,17,18 i 20 można rozmieścić w tablicy 3x3 tak , aby była ona kwadratem magicznym ?

A oto jak próbowaliśmy rozwiązać to zadanie:

- obliczyliśmy sumę wszystkich danych liczb i wynosiła ona 96,
- obliczyliśmy sumę magiczną tego kwadratu : $1/3 \cdot 96 = 32$
- ustaliliśmy również , że liczba w polu środkowym kwadratu powinna wynosić : $1/3 \cdot 32 = 32/3 = 10$ i $2/3$ a takiej liczby nie ma w zbiorze liczb podanych.

Doszliśmy do wniosku, że z liczb: 1,4,5,6,12,13,17,18 i 20 nie da się zbudować kwadratu magicznego.

W referacie tym przedstawiliśmy efekty pracy naszego koła matematycznego z kilku ostatnich zajęć . Praca nad zagadnieniami dotyczącymi kwadratów magicznych pogłębiła naszą wiedzę w tym zakresie i dawała nam dużo satysfakcji , gdy udawało nam się rozwiązać problemy i zadania stawiane przez Panią.