Nierówność Cauchy'ego o średnich. Sumy i iloczyny.

Bartłomiej Grochal
V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Spis treści

1 Nierówność Cauchy'ego o średnich. Sumy i iloczyny. 2
1.1 Teoria 2
1.1.1 Wprowadzenie 2
1.1.2 Średnie w nierówności Cauchy'ego 2
1.1.3 Twierdzenia o zależnościach między średnimi 3
1.1.4 Suma równa iloczynowi - przykłady i własności . . . 9
1.1.5 Iloczyn równy m-krotnej sumie 21
1.2 Zadania 27
1.2.1 Nierówność między średnimi 27
1.2.2 Sumy i iloczyny 38

1 Nierówność Cauchy'ego o średnich. Sumy i iloczyny.

Bartłomiej Grochal

1.1 Teoria

1.1.1 Wprowadzenie

Niniejszy referat przedstawia sposób rozwiązywania zadań opierający się na wykorzystaniu nierówności pomiędzy średnimi. Bardzo często wspomniana zależność używana jest do dowodzenia szczególnej klasy nierówności, jednakże jej zastosowania są dużo szersze. W niniejszej pracy znajdują się zadania ze wszystkich etapów polskiej Olimpiady Matematycznej, a ponadto również z zawodów międzynarodowych.
W referacie zostało także poruszone zagadnienie dotyczące własności i rozwiązań równania: $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1x_2...x_n$. Ta część stanowi szersze spojrzenie na problemy związane z nierównością Cauchy'ego. Omówione własności okazują się często pomocne w rozwiązywaniu zadań olimpijskich. Warto zwrócić uwagę także na sposoby przeprowadzania dowodów zamieszczonych twierdzeń, gdyż one także są ściśle powiązane z tematyką zmagań młodych matematyków.

1.1.2 Średnie w nierówności Cauchy'ego

Średnia arytmetyczna
Średnią arytmetyczną n liczb *rzeczywistych* $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Średnia geometryczna
Średnią geometryczną n liczb *nieujemnych* $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Średnia harmoniczna
Średnią harmoniczną n liczb *dodatnich* $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Średnia kwadratowa
Średnią kwadratową n liczb *rzeczywistych* $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę:

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

1.1.3 Twierdzenia o zależnościach między średnimi

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie o zależności pomiędzy średnimi: arytmetyczną i geometryczną) *Średnia arytmetyczna każdych n liczb nieujemnych $a_1, a_2, ..., a_n (n \geq 2)$ jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, przy czym średnie te są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_n$, czyli zachodzi następująca nierówność:*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Dowód
Założenie: nie wszystkie liczby spośród $a_1, a_2, ..., a_n$ są równe.

Na początek przeprowadzony zostanie dowód przez indukcję po k dla każdej liczby n postaci $n = 2^k$ (k jest liczbą naturalną).
1. Dla $k = 1$, czyli $n = 2$:

$$a_1 \cdot a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

czyli:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

2. Krok indukcyny:
Założenie indukcyjne: $\frac{a_1+a_2+...+a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \geq \sqrt[2^{k-1}]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2^{k-1}}}$.
Teza: $\frac{a_1+a_2+...+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2^k}}$.

Dowód:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{(2^k)}}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{(2^{k-1})} + a_{(2^{k-1}+1)} + ... + a_{(2^k)}}{2^{k-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{(2^{k-1})}}{2^{k-1}} + \frac{a_{(2^{k-1}+1)} + ... + a_{(2^k)}}{2^{k-1}}\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[2^{k-1}]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{(2^{k-1})}}+\sqrt[2^{k-1}]{(a_{2^{k-1}+1})\cdot\ldots\cdot a_{(2^k)}}\right)\geq$$

$$\sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{(2^{k-1})}}\cdot\sqrt[2^{k-1}]{a_{(2^{k-1}+1)}\cdot\ldots\cdot a_{(2^k)}}}=\sqrt[2^k]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{(2^k)}}.$$

A więc dla każdej liczby $n=2^k$ nierówność jest prawdziwa. Przeprowadzony zostanie teraz dowód prawdziwości zadanej nierówności dla każdej liczby rzeczywistej nieujmenej.

Założenie: $m=2^k>n$.

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{\frac{m}{n}\cdot(a_1+\ldots+a_n)}{m}=$$

$$\frac{(a_1+\ldots+a_n)+\frac{m-n}{n}(a_1+\ldots+a_n)}{m}=\frac{(a_1+\ldots+a_n)+(m-n)\cdot A_n}{m}=$$

$$\frac{(a_1+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+\ldots+a_m)}{m}=A_m\geq\sqrt[m]{a_1\cdot\ldots\cdot a_m}=$$

$$\sqrt[m]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot A_n\cdot\ldots\cdot A_n}=\sqrt[m]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot A_n^{m-n}}.$$

$$A_n\geq\sqrt[m]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot A_n^{m-n}},$$

$$A_n^m\geq a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot A_n^{m-n},$$

$$A_n^n\geq a_1\cdot\ldots\cdot a_n,$$

$$A_n\geq\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}=G_n.$$

Poniżej znajduje się dowód drugiej części twierdzenia dotyczącej równości średnich: arytmetycznej i geometrycznej. Twierdzenie sformułowane jest jako równoważność, dlatego dowód zostanie przeprowadzony w dwóch krokach.

1. Jeśli $a_1=a_2=\ldots=a_n$, to:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{na_1}{n}=a_1,$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\sqrt[n]{a_1^n}=a_1.$$

Zatem rzeczywiście: $A_n=G_n$.

2. Dowód implikacji "w drugą stronę". Założenie: $A_n = G_n$. Należy wykazać, że $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Dowód nie wprost:
Hipoteza: $a_1 \neq a_2$. Wówczas:
$\sqrt{a_1} \neq \sqrt{a_2}$ oraz $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 > 0$, czyli $a_1 + a_2 > 2\sqrt{a_1 a_2}$.

   Wobec tego:

$$A_n = \frac{(a_1 + a_2) + a_3 + ... + a_n}{n} > \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + a_3 + ... + a_n}{n} =$$

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_2} + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_1 a_2} \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} =$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n} = G_n,$$

   skąd $A_n > G_n$, co jest sprzeczne z założeniem, że $A_n = G_n$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rzeczywiście: $A_n = G_n \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

$\square$

Zaletą powyższego rozumowania jest fakt, że jest ono przystępne praktycznie dla każdego czytelnika. Istnieją jednak znacznie krótsze dowody powyższej zależności, które przedstawione zostały poniżej:

Dowód przy użyciu nierówności o ciągach jednomonotonicznych
Dowód Weźmy dowolny ciąg $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, ..., \sqrt[n]{a_n})$ i załóżmy (bez straty ogólności), że jest on uporządkowany nierosnąco. Zatem: ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ jest monotoniczny, a więc i jednomonotoniczny sam ze sobą. Następnie, mnożąc przez siebie n razy kolejne elementy tego ciagu (poniżej podany przykład dla $n = 3$, mnożenie wykonujemy "po przekątnej") otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \sqrt[3]{a_1} & \sqrt[3]{a_2} & \sqrt[3]{a_3} \\ \sqrt[3]{a_1} & \sqrt[3]{a_2} & \sqrt[3]{a_3} \\ \sqrt[3]{a_1} & \sqrt[3]{a_2} & \sqrt[3]{a_3} \end{bmatrix}$$

$$n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Na mocy nierówności o ciągach jednomonotonicznych:

$$\sqrt[n]{a_1}^n + \sqrt[n]{a_2}^n + ... + \sqrt[n]{a_n}^n = a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

$\square$

Dowód przy użyciu nierówności Muirheada

Dowód Weźmy takie ciągi (a_n) i (b_n), że: $a = (1, 0, 0, ..., 0), b = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$. Wówczas:

$$(a_n) \succ (b_n).$$

Z nierówności Muirheada otrzymujemy:

$$(n-1)! \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq n! \cdot x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdot ... \cdot x_n^{\frac{1}{n}},$$

Co po podzieleniu przez $n!$ daje:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

$\square$

Dowód przy użyciu nierówności Jensena

Dowód Weźmy takie wagi, że: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$. Fukcja $f(x) = \log(x)$ jest wklęsła w przedziale $(0, \infty)$, więc dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi:

$$\log(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n) \geq \alpha_1 \cdot \log(x_1) + \alpha_2 \cdot \log(x_2) + ... + \alpha_n \cdot \log(x_n),$$

$$\log\left(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)\right) \geq \frac{1}{n}(\log(x_1) + \log(x_2) + ... + \log(x_n)) =$$

$$\log((x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{n}}).$$

Funkcja $f(x) = \log(x)$ jest rosnąca, zatem:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

$\square$

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie o zależności pomiędzy średnimi: geometryczną i harmoniczną) *Średnia geometryczna każdych n liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ jest nie mniejsza od ich średniej harmonicznej, przy czym średnie te są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_n$, czyli zachodzi nierówność:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_n}}.$$

Dowód

W dowodzie tego twierdzenia zostanie wykorzystana nierówność pomiędzy średnimi: arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}.$$

Wykonując następujące podstawienie:

$$x_i = \frac{1}{a_i},$$

gdzie liczby $a_1, a_2, ..., a_n$ są dodatnie, nierówność przyjmuje postać:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}},$$

Funkcja $f(x) = x^{-1}$ jest funkcją malejącą w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, dlatego po jej nałożeniu konieczna jest zmiana znaku nierówności

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_n}},$$

a co za tym idzie prawdziwy jest fakt, że:

$$G_n \geq H_n.$$

□

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie o zależności pomiędzy średnimi: kwadratową i arytmetyczną) *Średnia kwadratowa każdych n liczb rzeczywistych $a_1, a_2, ..., a_n$ jest nie mniejsza od ich średniej arytmetycznej, czyli zachodzi nierówność:*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Przy czym średnie te są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Dowód

Zachodzą następujące nierówności:

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0, (a_1 - a_3)^2 \geq 0, ..., (a_1 - a_n)^2 \geq 0,$$

$$(a_2 - a_3)^2 \geq 0, (a_2 - a_4)^2 \geq 0, ..., (a_2 - a_n)^2 \geq 0, ..., (a_{n-1} - a_n)^2 \geq 0,$$

czyli nierówności:

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2, a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_1a_3, ..., a_1^2 + a_n^2 \geq 2a_1a_n,$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3, a_2^2 + a_4^2 \geq 2a_2a_4, ..., a_2^2 + a_n^2 \geq 2a_2a_n, ...,$$
$$a_{n-1}^2 + a_n^2 \geq 2a_{n-1}a_n,$$

które po dodaniu do siebie stronami prowadzą do następującej nierówności:

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \geq 2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_1a_n+2a_2a_3+2a_2a_4+...+$$
$$2a_2a_n + ... + 2a_{n-1}a_n.$$

Po dodaniu do obu stron tej nierówności sumy: $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ otrzymamy nierówność:

$$n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2,$$

która równoważna jest nierówności:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2,$$

zaś ta - nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \left|\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right|.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

gdyż $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq x$.

Zatem prawdziwe jest twierdzenie, że:

$$K_n \geq A_n.$$

Przeprowadzony zostanie teraz dowód drugiej części twierdzenia mówiącej o równości średnich: kwadratowej i arytmetycznej.
Zauważmy, że aby otrzymać równość w dowodzonej nierówności, muszą zajść następujące warunki:

1. We wszystkich nierównościach, które zostały wypisane na początku, muszą zajść równości.

2. Musi zajść równość w nierówności: $|x| \geq x$.

A co za tym idzie, musi zajść warunek: $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

$\square$

Twierdzenie 1.4 (Nierówność Cauchy'ego o średnich) *Dla dowolnych n liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzą nierówności:*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}},$$

co można symbolicznie zapisać:

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n.$$

Przy czym:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy: $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

1.1.4 Suma równa iloczynowi - przykłady i własności

W tej części pracy przedstawione zostały własności rozwiązań równania postaci:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n (*),$$

czyli takiego, w którym suma n liczb jest równa ich iloczynowi.

Poniżej przedstawione zostały wszystkie rozwiązania naturalne (z dokładnością do permutacji) równania $(*)$ dla $n = 2, 3, ..., 10$:
$n = 2 : (2, 2)$;
$n = 3 : (1, 2, 3)$;
$n = 4 : (1, 1, 2, 4)$;
$n = 5 : (1, 1, 1, 2, 5); (1, 1, 1, 3, 3); (1, 1, 2, 2, 2)$;
$n = 6 : (1, 1, 1, 1, 2, 6)$;
$n = 7 : (1, 1, 1, 1, 1, 2, 7); (1, 1, 1, 1, 1, 3, 4)$;
$n = 8 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 8); (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$;
$n = 9 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 9); (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5)$;
$n = 10 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10); (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4)$;

Okazuje się, że dla większych n także istnieją rozwiązania równania $(*)$. Jak można zauważyć, składają się głównie ze wspólnych jedynek (jako jedyne

liczby nie zmieniają iloczynu i zwiększają sumę). Poniżej przedstawiony został szkic dowodu jedyności powyższych rozwiązań na przykładzie $n = 3$ i $n = 4$:

Dowód
Dla **n=3** mamy: $x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \leq 3x_3$ (zakładając tak bez straty ogólności). Stąd:

$$x_1x_2 \leq 3.$$

Zatem para (x_1, x_2) jest jedną z par: $(1,1), (1,2), (1,3)$. Dla $(1,1)$ i $(1,3)$ otrzymujemy sprzeczność (odpowiednio: $2 = 0$ i $x_3 = 2$), zaś dla pary $(1,2)$:

$$3 + x_3 = 2x_3,$$

$$x_3 = 3.$$

Zatem trójka $(1,2,3)$ jest rozwiązaniem równania $(*)$.

Dla **n=4** mamy: $x_1x_2x_3x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 4x_4$ (zakładając tak bez straty ogólności, przypadek równości wszystkich składników jest oczywiście niemożliwy - równanie przyjmuje wówczas sprzeczną postać: $1 = 4$). Wnioskujemy zatem (dla rozwiązań naturalnych), że musi zajść warunek: $x_1x_2x_3 \leq 3$. Zatem: trójka (x_1, x_2, x_3) jest jedną z trójek: $(1,1,1), (1,1,2)$, $(1,1,3)$. Po analizie jak wyżej łatwo można stwierdzić, że jedynie przypadek $(1,1,2)$ nie prowadzi do sprzeczności i rozwiązaniem jest czwórka: $(1,1,2,4)$.

□

Poniżej znajduje się omówienie własności rozwiązań równania $(*)$.

Twierdzenie 1.5 (O rozwiązaniach równania w liczbach naturalnych) *Dla każdej liczby naturalnej n równanie $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych. Jest nim na przykład: $x_1 = ... = x_{n-2} = 1, x_{n-1} = 2, x_n = n$.*

Dowód
Weźmy liczby dane w tezie. Wówczas:

$$x_1 + ... + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = n - 2 + 2 + n = 2n,$$

$$x_1...x_{n-2}x_{n-1}x_n = 1^{n-2} \cdot 2 \cdot n = 2n.$$

□

Twierdzenie 1.6 (O skończonej liczbie rozwiązań równania) *Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ równanie $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$ ma skończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

Dowód
Przyjmijmy, że: $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Zauważmy, że dla dowolnego $i = 1, 2, ..., n-1$ zachodzi związek:

$$x_i x_n \leq x_1...x_n = x_1 + ... + x_n \leq n \cdot x_n,$$

$$x_i \leq x_1...x_{n-1} \leq n,$$

$$x_i \leq n.$$

Liczby $x_1, ..., x_{n-1}$ wyznaczają liczbę x_n. Wyraz ten znajdziemy rozwiązując równanie $x_1...x_n = x_1 + ... + x_n$, zatem do rozpatrzenia pozostaje skończona liczba przypadków dla dowolnego n.

□

Twierdzenie 1.7 (O ograniczeniu iloczynu) *Jeśli $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$, gdzie $n \geq 3$ oraz $x_1 \leq ... \leq x_n$ są liczbami naturalnymi, to $x_1...x_{n-1} \leq (n-1)$.*

Dowód
Zauważmy, że wszystkie liczby $x_1, ..., x_n$ nie mogą być równe. Przypuśćmy zatem (nie wprost), że $x_1 = ... = x_n = x$. Wówczas:

$$x^n = nx.$$

Stąd dla $n \geq 3$:

$$x = \sqrt[n-1]{n},$$

$$1 < \sqrt[n-1]{n} < 2,$$

co daje sprzeczność (gdyż rozpatrujemy rozwiązania w liczbach naturalnych), a więc:

$$x_1...x_n = x_1 + ... + x_n < nx_n,$$

$$x_1...x_{n-1} \leq n - 1.$$

□

Twierdzenie 1.8 (O ograniczeniu sumy) *Jeśli $x_1, ..., x_n$, gdzie $n \geq 2$, są takimi liczbami naturalnymi, że $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$, to $x_1 + ... + x_n \leq 2n$.*

Dowód

Zadanie 5 drugiego etapu XLI Olimpiady Matematycznej (1989/90) dotyczyło udowodnienia powyższego twierdzenia. Dowód przebiega następująco:

Przez a_n oznaczmy liczbę jedynek w ciągu $(x_1, ..., x_n)$, zaś przez k oznaczmy ilość liczb większych od jedynki w tymże ciągu. Liczby większe od jedynki oznaczmy odpowiednio przez: $(y_1 + 1), (y_2 + 1), ..., (y_k + 1)$, gdzie $(y_k \geq y_{k-1} \geq ... \geq y_1 \geq 1)$. Zachodzą następujące związki:

$$a_n + k = n, k \geq 2,$$

$$(y_1 + 1)(y_2 + 1)...(y_k + 1) = y_1 + y_2 + ... + y_k + k + a_n.(**)$$

Weźmy $k = 2$. Wówczas w ciągu (x_n) znajduje się $n - 2$ jedynek i zachodzi związek:

$$y_1 y_2 + y_1 + y_2 + 1 = y_1 + y_2 + 2 + n - 2,$$

$$y_1 y_2 = n - 1.$$

Iloczyn dwóch liczb naturalnych większych od 1 jest większy lub równy sumie, zaś jeśli co najmniej jedna z nich jest jedynką - o 1 mniejszy od sumy. Zatem można dokonać szacowania:

$$y_1 + y_2 \leq 1 + n - 1 = n.$$

Zatem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n + y_1 + y_2 \leq 2n.$$

Równość zachodzi wyłącznie w wypadku, gdy $y_1 = 1, y_2 = n - 1$, czyli:

$$(x_1, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = (1, ..., 1, 2, n).$$

Weźmy $k \geq 3$. Wówczas na mocy równości $(**)$:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \leq y_1 y_2 + y_2 y_3 + ... + y_1 y_k < (y_1 + 1)(y_2 + 1)...(y_k + 1) - \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) = n.$$

Zatem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i + n < 2n.$$

$\square$

Twierdzenie 1.9 (O ilości jedynek w rozwiązaniu) *Niech $x_1 \leq ... \leq x_n$ będą takimi liczbami naturalnymi, że $x_1+...+x_n = x_1...x_n$. Przez a_n oznaczmy liczbę jedynek występujących w ciągu (x_n). Wówczas $a_n \geq n-1-[\log_2 n]$.*

Dowód
Na podstawie poprzedniego twierdzenia możemy stwierdzić, że:

$$x_1 \cdot ... \cdot x_n \geq 1^{a_n} \cdot 2^k.$$

Zatem:

$$2^{n-a_n} \leq x_1...x_n = x_1 + ... + x_n \leq 2n.$$

A co za tym idzie:

$$n - a_n \leq \log_2(2n) = 1 + \log_2 n,$$

$$a_n \geq n - 1 - [\log_2 n].$$

□

Twierdzenie 1.10 (O ilości rozwiązań równania) *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna n taka, że równanie $x_1+...+x_n = x_1...x_n$ ma więcej niż k rozwiązań naturalnych.*

Dowód
Weźmy taki ciąg x_n spełniający założenia, w którym dokładnie $n-2$ liczby są równe 1, zaś pozostałe dwie są większe od jedynki. Wówczas rozważane równanie przyjmuje postać:

$$x_1 + x_2 + n - 2 = x_1 x_2.$$

Wyliczając stąd x_1:

$$x_1(x_2 - 1) = x_2 + n - 2,$$

$$x_1 = \frac{x_2 + n - 2}{x_2 - 1},$$

$$x_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 1} + \frac{n - 1}{x_2 - 1},$$

$$x_1 = 1 + \frac{n - 1}{x_2 - 1}.$$

Z założenia wiemy, że liczby n, x_1, x_2 są naturalne. Zauważmy, że ilość dzielników liczby n jest ściśle związana z ilością rozwiązań równania - liczba x_2-1 musi dzielić $n-1$, gdyż x_1 jest liczbą naturalną. Wobec tego możemy powiedzieć, że im więcej różnych dzielników ma liczba n, tym więcej ciągów (x_n) możemy stworzyć. Zatem zawsze można dobrać na tyle duże n, które wyznaczy więcej niż ustalone k rozwiązań.

$\square$

Twierdzenie 1.11 (O rozwiązaniach dla liczb nieparzystych) *Jeśli $n \geq 5$ jest liczbą nieparzystą, to układ $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n, x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ ma co najmniej dwa rozwiązania w liczbach naturalnych.*

Dowód
Weźmy $n = 2k + 1, k \geq 2$. Jednym rozwiązaniem jest ujęte wcześniej:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 1, x_{n-1} = 2, x_n = n.$$

Zaś drugim:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 1, x_{n-1} = 3, x_n = k + 1.$$

Dowód powyższej równości:

$$x_1 + ... + x_n = (n-2) \cdot 1 + 3 + (k+1) = 2k+1+1+k+1 = 3k+3 = 3(k+1),$$

$$x_1...x_n = 1^{n-2} \cdot 3 \cdot (k+1) = 3(k+1).$$

Poniżej przedstawiona jest mocniejsza wersja tego twierdzenia - o dwóch rozwiązaniach naturalnych dla liczby $n = ab + 1; 2 \leq a \leq b$.

$\square$

Twierdzenie 1.12 (O dwóch rozwiązaniach równania) *Jeśli $n = ab+1$, gdzie $2 \leq a \leq b$, to układ $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n, x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ ma co najmniej dwa rozwiązania w liczbach naturalnych.*

Dowód
Jednym rozwiązaniem jest ujęte wcześniej:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 1, x_{n-1} = 2, x_n = n.$$

Zaś drugim:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 1, x_{n-1} = a + 1, x_n = b + 1.$$

Dowód powyższej równości:

$$x_1 + ... + x_n = (n-2) \cdot 1 + a + 1 + b + 1 = ab + a + b + 1,$$

$$x_1...x_n = 1^{n-2} \cdot (a+1) \cdot (b+1) = (a+1) \cdot (b+1) = ab + a + b + 1.$$

$\square$

Twierdzenie 1.13 (O jednym rozwiązaniu równania) *Jeśli układ* $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n, x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n, x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie, to* $n-1$ *jest liczbą pierwszą.*

Dowód
Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z twierdzenia przedstawionego poniżej. Wiemy, że dla każdego n postaci: $n = ab + 1$, gdzie $2 \leq a \leq b$ układ ma dwa rozwiązania. Zatem:

$$n - 1 = ab.$$

Stąd łatwo wynika, że aby układ miał dokładnie jedno rozwiązanie, to nie może spełniać warunku $2 \leq a \leq b$, co jednoznacznie wskazuje na to, że $n-1$ nie jest iloczynem dwóch liczb naturalnych, z których obie są większe lub równe 2.

□

Omawiane równanie ma jednak nie tylko rozwiązania w liczbach naturalnych. Przyjrzyjmy się twierdzeniom dotyczącym liczb całkowitych.

Twierdzenie 1.14 (O rozwiązaniach dla trzech zmiennych) *Trójki* $(1, 2, 3)$ *i* $(-1, -2, -3)$ *są jedynymi, z dokładnością do permutacji, niezerowymi całkowitymi rozwiązaniami równania* $x + y + z = xyz$.

Dowód
Dowód powyższej własności przeprowadzimy analizując przypadki:

1. $0 < x \leq y \leq z$. Wówczas:

$$x + y + z = xyz \leq 3x,$$
$$yz \leq 3.$$

   Pozostają zatem łatwe do rozważenia przypadki, gdzie para (y, z) jest postaci:

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1).$$

2. $0 > x \geq y \geq z$. Wówczas:

$$x + y + z = xyz \geq 3z,$$
$$xy \leq 3.$$

   Obie liczby x, y są ujemne, więc należy rozważyć przypadki, gdzie para (x, y) jest postaci:

$$(-1, -1), (-1, -2), (-1, -3).$$

3. $x > 0; y \leq z < 0$. Wówczas:

$$x + y + z = xyz < 3x,$$

$$yz < 3.$$

Obie liczby y, z są ujemne, więc do roważenia pozostają przypadki, gdzie para (y, z) jest postaci:

$$(-1, -1), (-2, -1), (-3, -1).$$

4. $x < 0; y \geq z > 0$. Wówczas:

$$3x < xyz = x + y + z,$$

$$3 > yz.$$

Obie liczby y, z są dodatnie, więc należy rozważyć przypadki, gdzie rozwiązaniem może być jedna z par (y, z) postaci:

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1).$$

Po rozważeniu powyższych przypadków otrzymujemy rozwiązanie z tezy.

□

Twierdzenie 1.15 (O rozwiązaniach dla czterech zmiennych) *Czwórki* $(1, 1, 2, 4)$ *i* $(-1, -2, -2, 1)$ *są jedynymi, z dokładnością do permutacji, niezerowymi całkowitymi rozwiązaniami równania* $x + y + z + t = xyzt$.

Dowód

Dowód tej równości przeprowadzimy analogicznie jak wyżej. Należy rozważyć przypadki:

1. $x \geq y \geq z \geq t > 0$. Wówczas:

$$x + y + z + y = xyzt \leq 4x,$$

$$yzt \leq 4.$$

Zatem trójka (y, z, t) może być postaci:

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 1, 1), (2, 2, 1).$$

2. $x \leq y \leq z \leq t < 0$. Wówczas:

$$x + y + z + t = xyzt \leq 4t,$$

$$xyz \geq 4.$$

Iloczyn trzech liczb ujemnych jest ujemny, zatem powyższa nierówność jest sprzeczna.

3. $x > 0$ oraz $y \leq z \leq t < 0$. Wówczas:

$$4y < x + y + z + t = xyzt,$$

$$x \cdot zt < 4,$$

$$x \cdot zt \leq 3.$$

Iloczyn liczb z, t jest dodatni, więc trójka (x, z, t) może być postaci:

$$(1, -1, -1), (1, -2, -1), (1, -3, -1), (2, -1, -1), (3, -1, -1).$$

4. $x \geq y > 0$ oraz $z \leq t < 0$. Wówczas:

$$x + y + z + t = xyzt < 4x,$$

$$yzt < 4,$$

$$yzt \leq 3.$$

Iloczyn liczb z, t jest dodatni, więc trójka (y, z, t) może być postaci:

$$(1, -1, -1), (1, -2, -1), (1, -3, -1), (2, -1, -1), (3, -1, -1).$$

5. $x \geq y \geq z > 0$ oraz $t < 0$. Wówczas:

$$4t < x + y + z + t = xyzt,$$

$$xyz < 4,$$

$$xyz \leq 3.$$

Wówczas trójka (x, y, z) może przybrać postać:

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1).$$

Rozwiązując wszystkie powyższe przypadki otrzymujemy rozwiązania dane w tezie.

$\square$

Twierdzenie 1.16 (O podzielności iloczynu) *Niech $x_1, ..., x_n$ będą takimi liczbami całkowitymi, że $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$. Wówczas: jeśli $2|n$, to $4|(x_1...x_n)$.*

Dowód
Niech n będzie liczbą parzystą (z założenia). Przypuśćmy zatem, że wszystkie liczby $x_1, ..., x_n$ są nieparzyste. Zachodzi związek:

$$x_i \equiv 1 \pmod 2, i = 1, ..., n;$$

$$x_1 + ... + x_n \equiv 0 \pmod 2, 2|n.$$

Zatem iloczyn $x_1...x_n$ powinien być parzysty, aby zaszła równość. Jest jednak nieparzysty, gdyż żaden z czynników nie jest podzielny przez 2, co daje sprzeczność.
Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb jest parzysta, a co za tym idzie - iloczyn $x_1...x_n$ jest na pewno podzielny przez 2. Pociąga to za sobą fakt, że suma $x_1+...+x_n$ także musi być parzysta. Jeśli jednak wśród liczb $x_1, ..., x_n$ istnieje tylko jedna liczba parzysta, to suma jest niepodzielna przez 2 (bo $2|n$, zatem dodajemy do siebie nieparzystą liczbę nieparzystych liczb, a co za tym idzie - cała suma przystaje do 1 modulo 2). Z tego wynika, że wśród liczb $x_1, ..., x_n$ co najmniej dwie są parzyste, czyli iloczyn $x_1...x_n$ jest podzielny przez 4.

□

Okazuje się, że rozważane równanie posiada także rozwiązania w liczbach wymiernych i niewymiernych. Poniżej przedstawiono ogólne twierdzenia ich dotyczące.

Twierdzenie 1.17 (O dwóch rozwiązaniach wymiernych) *Wszystkie niezerowe rozwiązania wymierne równania $x + y = xy$ są postaci $x = \frac{p}{q}, y = \frac{p}{p-q}$, gdzie p i q są różnymi, względnie pierwszymi liczbami całkowitymi (bez zera).*

Dowód
Weźmy: $x = \frac{p}{q}, y = \frac{a}{b}$, gdzie: $a, b, p, q \in \mathbb{Z}; a, b, p, q \neq 0; nwd(a, b) = nwd(p, q) = 1$. Zatem równość z tezy możemy zapisać jako:

$$pb + qa = pa.$$

Wynika zatem, że dla pewnej liczby wymiernej u różnej od zera zachodzi równość:

$$a = up.$$

Stąd łatwo otrzymujemy, że:

$$b = u(p - q),$$

a w konsekwencji:

$$y = \frac{a}{b} = \frac{p}{p - q}.$$

□

Twierdzenie 1.18 (O rozwiązaniach wymiernych równania) *Oznaczmy przez A zbiór tych wszystkich liczb naturalnych n, dla których istnieje liczba naturalna $k \geq 2$ oraz istnieją takie dodatnie liczby wymierne $a_1, ..., a_k$, że:*

$$a_1 + ... + a_k = a_1...a_k = n.$$

Do zbioru A należy liczba 4 i każda liczba naturalna większa od 5. Liczby 1, 2, 3, 5 nie należą do zbioru A.

Dowód
Dowód tego twierdzenia stanowił treść jednego z zadań na Olimpiadzie Matematycznej w USA w 2006 roku.

Na początek wykażemy, że każda liczba parzysta większa od 2 spełnia powyższe równanie i należy do zbioru A. Weźmy $n = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Wówczas ciąg liczb $(a_1, ..., a_k) = (k, 2, 1, 1, ..., 1)$ spełnia warunki:

$$a_1 + ... + a_k = k + 2 + k - 2 = 2k,$$

$$a_1...a_k = k \cdot 2 \cdot 1^{k-2} = 2k = n.$$

Weźmy teraz $n \geq 9$ będące liczbą nieparzystą. Przyjmijmy, że $n = 2k + 3$, gdzie $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ Rozpatrzmy ciąg $(a_1, ..., a_k) = (k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 4, 1, 1, ..., 1)$. Łatwo sprawdzić, że spełnia on podane własności:

$$a_1 + ... + a_k = k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 4 + k - 3 = 2k + 3,$$

$$a_1...a_k = (k + \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^{k-3} = 2k + 3 = n.$$

Weźmy $n = 7$. Wówczas:

$$7 = \frac{4}{3} + \frac{7}{6} + \frac{9}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{2}.$$

Należy wykazać teraz, że liczba $n \in \{1, 2, 3, 5\}$ nie należy do zbioru A. Przypuśćmy (nie wprost), że tak jest. Niech k będzie liczbą naturalną większą od

1 i $a_1, ..., a_k$ będą dodatnimi liczbami wymiernymi spełniającymi równości z tezy. Wówczas, na mocy nierówności Cauchy'ego o średnich:

$$\sqrt[k]{n} = \sqrt[k]{a_1...a_k} \leq \frac{a_1 + ... + a_k}{k} = \frac{n}{k}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$k^k \leq n^{k-1},$$

$$n \geq k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Funkcja $f(x) = x^{\frac{x}{x-1}}$ jest rosnąca, a łatwo sprawdzić, że dla $k \geq 3$ na mocy powyższej zależności: $n > 5$, co jest sprzeczne z założeniem, że $n \in \{1, 2, 3, 5\}$.
Ostatni przypadek to $k = 2$. Wówczas:

$$a_1 + a_2 = a_1 a_2 = n,$$

$$a_1^2 - na_1 + n = 0.$$

Stąd dalej wynika, że a_1 jest liczbą niewymierną, co prowadzi do sprzeczności.

□

Twierdzenie 1.19 (O wartości największej) *Niech $x_1, ..., x_n$ będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1 + ... + x_n = x_1...x_n$. Wówczas: $max(x_1, ..., x_n) \geq \sqrt[n-1]{n}$.*

Dowód
We wcześniejszych rozważaniach wykazane zostało, że w ciągu (x_n), który jest rozwiązaniem rozważanego równania, istnieją co najmniej dwie liczby, które są większe od jedynki.
Zauważmy, że dla każdego $n \geq 3$ zachodzi związek:

$$1 < \sqrt[n-1]{n} < 2.$$

A na dodatek dla $n = 2$ możemy przyjąć:

$$\sqrt[1]{2} = 2.$$

Łącząc powyższe trzy obserwacje łatwo można powiązać je z tezą. Wiemy, że $max(x_1, ..., x_n) \geq 2$, zaś $\sqrt[n-1]{n} \leq 2$, co w oczywisty sposób pociąga za sobą tezę. Pozostaje do udowodnienia fakt, że $\sqrt[n-1]{n} < 2$. Nierówność tę możemy zapisać w postaci:

$$n < 2^{n-1}.$$

Jej dowód przeprowadzimy indukcyjnie.

1. Dla $n = 3$: $3 < 2^2 = 4$.

2. Założenie indukcyjne: $n < 2^{n-1}$.
   Teza: $n + 1 < 2^n$.
   Dowód:
   $$2^n = 2^{n-1} \cdot 2 > 2n > n + 1.$$
   Z nierówności $2n > n + 1$ otrzymujemy, że jest ona prawdziwa dla każdego $n > 1$, co kończy dowód.

$\square$

1.1.5 Iloczyn równy m-krotnej sumie

Zajmiemy się teraz rozwiązaniami i własnościami równania postaci:

$$x_1 ... x_n = m(x_1 + ... + x_n),$$

gdzie m jest dowolną liczbą naturalną większą od 1 oraz $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ są liczbami naturalnymi.

Na początek zajmiemy się przypadkiem szczególnym tego równania, czyli takim, gdzie $m = 2$. Zbiór ciągów spełniających rozważane równanie będziemy oznaczać przez $B(n)$, zaś przez $|B(n)|$ będziemy rozumieć moc tegoż zbioru. Poniżej omówione zostały pewne własności charakterystyczne dla rozważanej postaci równania.

Wszystkie rozwiązania równania $x_1 ... x_n = 2(x_1 + ... + x_n)$ (z dokładnością do permutacji) dla $n = 1, 2, ..., 9$ przedstawiają się następująco:
$n = 1 : -$
$n = 2 : (3, 6); (4, 4);$
$n = 3 : (1, 3, 8); (1, 4, 5); (2, 2, 4);$
$n = 4 : (1, 1, 3, 10); (1, 1, 4, 6); (1, 2, 2, 5); (1, 2, 3, 3); (2, 2, 2, 2);$

Dla uproszczenia zapisu rozwiązania poniżej podane są bez wspólnych jedynek.
$n = 5 : (1, 3, 12); (1, 4, 7); (2, 2, 6);$
$n = 6 : (1, 3, 14); (1, 4, 8); (1, 5, 6); (2, 2, 7); (2, 3, 4);$
$n = 7 : (1, 1, 3, 16); (1, 1, 4, 9); (1, 2, 2, 8); (2, 2, 2, 3);$
$n = 8 : (1, 3, 18); (1, 4, 10); (1, 6, 6); (2, 2, 9); (2, 3, 5);$
$n = 9 : (1, 3, 20); (1, 4, 11); (1, 5, 8); (2, 2, 10); (2, 4, 4);$

Twierdzenie 1.20 (O rozwiązaniach równania dla dwóch zmiennych) *Zbiór $B(2)$ ma dokładnie dwa elementy:* $(3, 6)$ *i* $(4, 4)$.

Dowód
Rozpatrywane równanie:

$$x_1x_2 = 2(x_1 + x_2),$$

można przedstawić w postaci:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 4.$$

Zatem(z dokładnością do permutacji):

$$x_1 - 2 = 1, x_2 - 2 = 4,$$

lub:

$$x_1 - 2 = 2, x_2 - 2 = 2.$$

□

Twierdzenie 1.21 (O rozwiązaniach równania dla więcej niż dwóch zmiennych) *Jeśli $n \geq 3$, to $|B(n)| \geq 3$.*

Dowód
Rozpatrzmy ciągi:

$$(1, 1, ..., 1, 4, n + 2), (1, 1, ..., 1, 3, 2n + 2), (1, 1, ..., 1, 2, 2, n + 1).$$

Poniżej przedstawiony został dowód przypadku pierwszego, dla pozostałych dowody przebiegają w sposób analogiczny:

$$2(x_1 + ... + x_n) = 2(n - 2 + 4 + n + 2) = 2(2n + 4) = 4n + 8,$$

$$x_1...x_n = 1^{n-2} \cdot 4 \cdot (n + 2) = 4n + 8.$$

□

Twierdzenie 1.22 (O skończonej liczbie rozwiązań) *Dla każdego n naturalnego zbiór $B(n)$ jest skończony.*

Dowód
Niech ciąg $(x_1, ..., x_n)$ należy do zbioru $B(n)$. Wówczas dla dowolnego $i = 1, ..., n - 1$ zachodzi związek:

$$x_ix_n \leq x_1...x_n = 2(x_1 + ... + x_n) \leq 2(x_n + ... + x_n) = 2n \cdot x_n.$$

Wynika stąd, że liczby $x_1, ..., x_{n-1}$ są mniejsze lub równe $2n$. Zatem liczby te wyznaczają liczbę x_n, zaś przy danych $x_1, ..., x_{n-1}$ wyraz x_n znajdziemy rozwiązując równanie: $x_1...x_n = 2(x_1 + ... + x_n)$.

$\square$

Twierdzenie 1.23 (O ograniczeniu iloczynu) *Jeśli* $(x_1, ..., x_n) \in B(n)$ *oraz* $n \geq 5$*, to* $x_1...x_{n-1} \leq 2n - 1$.

Dowód
Przypuśćmy, że wszystkie elementy rozwiązania są równe a. Wówczas:

$$a^n = 2n \cdot a,$$

$$a = \sqrt[n-1]{2n},$$

co rodzi sprzeczność, gdyż dla $n \geq 5$ zachodzi związek: $1 < \sqrt[n-1]{2n} < 2$ (a jest liczbą naturalną). Zatem należy wnioskować, że:

$$x_1...x_n = 2(x_1 + ... + x_n) < 2n \cdot x_n,$$

a stąd:

$$x_1...x_{n-1} \leq 2n - 1.$$

$\square$

Twierdzenie 1.24 (O ograniczeniu sumy) *Jeśli* $(x_1, ..., x_n) \in B(n)$*, to* $x_1 + ... + x_n \leq 3n + 3$*, przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, gdy rozwiązanie jest postaci* $(1, 1, ..., 1, 3, 2n + 2)$.

Dowód
Niech b_n oznacza liczbę jedynek w rozważanym ciągu (x_n) spełniającym założenia twierdzenia. Przez k oznaczmy ilość liczb w ciągu x_n, które są większe od jedynki. Je same oznaczmy odpowiednio przez $(y_1 + 1), (y_2 + 1), ..., (y_k + 1)$, gdzie: $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_k$ (oznaczenia są analogiczne jak w poprzednim podrozdziale, gdzie przeprowadzony został dowód ograniczenia sumy). Zachodzi związek:

$$k + b_n = n, k \geq 2.$$

Wówczas rozważane równanie możemy zapisać w postaci:

$$(y_1+1)(y_2+1)...(y_k+1) = 2(y_1+y_2+...+y_k+k+b_n) = 2(y_1+y_2+...+y_k+n).(**)$$

Weźmy $k = 2$. Wówczas:

$$y_1y_2 - y_1 - y_2 + 1 = 2n,$$

$$(y_1 - 1)(y_2 - 1) = 2n.$$

Stąd (korzystając z rozumowania przedstawionego wcześniej, że iloczyn dwóch liczb naturalnych większych od 0 jest co najwyżej o 1 mniejszy od ich sumy):

$$y_1 + y_2 = (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + 2 \leq 1 + 2n + 2 = 2n + 3.$$

Stąd łatwo wynika fakt, że:

$$x_1 + ... + x_n = n - 2 + y_1 + y_2 + 2 \leq 3n + 3.$$

Zauważmy, że równość zachodzi wyłącznie w wypadku, gdy $y_1 - 1 = 1$ oraz $y_2 - 1 = 2n$, a więc tylko wtedy, gdy rozwiązanie jest postaci:

$$(1, 1, ..., 1, 3, 2n + 2).$$

Weźmy $k = 3$. Wówczas:

$$(y_1 + 1)(y_2 + 1)(y_3 + 1) = 2(y_1 + y_2 + y_3 + n).$$

Stąd (znów na mocy wcześniej wspomnianych obserwacji):

$$y_1 + y_2 + y_3 = y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 - 2n + 1.$$

Załóżmy, że $y_1 = 1$. Wówczas:

$$1 + y_2 + y_3 = y_2 + y_3 + 2y_2y_3 + 1 - 2n,$$

$$y_2y_3 = n.$$

Stąd:

$$y_2 + y_3 \leq n + 1.$$

Wówczas:

$$x_1 + ... + x_n = n - 3 + y_1 + y_2 + y_3 + 3 = n + 1 + y_2 + y_3 \leq 2n + 2 < 3n + 3.$$

Załóżmy więc, że $y_1 \geq 2$. Wówczas:

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 2y_2y_3 + 2y_2 + 2y_3 + y_2y_3 + 1 - 2n.$$

Stąd:

$$y_1 + y_2 + y_3 + 3y_2y_3 - 2y_1 \leq 2n - 1.$$

Jednak $3y_2y_3 > 2y_1$, więc:

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2n - 2.$$

Zatem:

$$x_1 + ... + x_n = n - 3 + y_1 + y_2 + y_3 + 3 \leq n - 3 + 3 + 2n - 2 < 3n + 3.$$

Niech $k \geq 4$. Wówczas na mocy równości $(**)$:

$$2(y_1 + ... + y_k) = (y_1 + ... + y_k) + (y_1 + ... + y_k) \leq$$

$$y_1y_2 + y_2y_3 + ... + y_ky_1 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_4 + ... + y_ky_1y_2 \leq$$

$$(y_1 + 1)(y_2 + 1)...(y_k + 1) - (y_1 + y_2 + ... + y_k) - 1 =$$

$$2(y_1 + ... + y_k + n) - (y_1 + ... + y_k) - 1 = (y_1 + ... + y_k) + 2n - 1.$$

Z tego wynika, że:

$$y_1 + ... + y_k < 2n,$$

a co za tym idzie:

$$x_1 + ... + x_n = n - k + y_1 + ... + y_k + k < n + 2n < 3n + 3.$$

□

Poniżej opisane zostały własności uogólnionej sytuacji rozważanego wyżej równania, a więc zależności:

$$m(x_1 + ... + x_n) = x_1...x_n,$$

gdzie m jest dowolną liczbą naturalną większą od 0, zaś $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 1.25 (O rozwiązaniach dla dwóch zmiennych) *Niech $m \in \mathbb{N}$. Wówczas każde naturalne rozwiązanie równania $xy = m(x + y)$ jest postaci $(x, y) = (m + a, m + b)$, gdzie a jest naturalnym dzielnikiem liczby m^2 oraz $b = \frac{m^2}{a}$.*

Dowód
Weźmy $x = m + a$ oraz $y = m + b$. Wówczas obie strony rozważanego równania przyjmują postaci:

$$(m + a)(m + b) = m^2 + m(a + b) + ab,$$

$$m(2m + a + b) = 2m^2 + m(a + b).$$

Zatem zachodzi związek:

$$m^2 + m(a + b) + ab = 2m^2 + m(a + b),$$

$$m^2 = ab.$$

Stąd łatwo wynika, że a musi być dzielnikiem liczby m^2 i $b = \frac{m^2}{a}$, aby zaszła równość.

$\square$

Twierdzenie 1.26 (O rozwiązaniach dla liczb pierwszych i dwóch zmiennych) *Niech p będzie liczbą pierwszą. Jeśli x, y są takimi liczbami całkowitymi, że $xy = p(x+y)$, to (x, y) jest jedną z par:* $(0,0), (2p, 2p), (p-1, p(1-p)), (p(1-p), p-1), (p+1, p(p+1)), (p(p+1), p+1)$.

Dowód
Wykazanie tego twierdzenia było jednym z zadań na hiszpańskiej Olimpiadzie Matematycznej w 1998 roku.
Zauważmy, że zachodzi związek:

$$xy = p(x+y) \Leftrightarrow (x-p)(y-p) = p^2.$$

Z racji, że p jest liczbą pierwszą, należy rozważyć następujące przypadki:

$$x - p = p, y - p = p,$$

$$x - p = -p, y - p = -p,$$

$$x - p = 1, y - p = p^2,$$

$$x - p = -1, y - p = -p^2.$$

W ostatnich dwóch wypadkach należy rozważyć również przypadki symetryczne! Rozwiązując podane układy otrzymujemy rozwiązania z tezy.

$\square$

Poniżej przedstawione zostały zadania z różnych edycji Olimpiad Matematycznych. Na ich podstawie zaprezentowane zostały różne sposoby wykorzystania nierówności między średnimi. Warto zauważyć, że omawiana technika ma szerokie zastosowanie - można przy jej pomocy rozwiązać zadania ze wszystkich etapów OM, a także z zawodów IMO i MEMO! Każde rozwiązanie zostało opatrzone autorskim komentarzem wprowadzającym do techniki oraz wyjaśniającym tok rozumowania.

W drugiej części zamieszczone są zadania dotyczące związków między sumami i iloczynami. Warto przypomnieć, że wiele zadań olimpijskich opierało się na udowodnieniu pewnych własności zachodzących dla rówań typu $m(x_1 + ... + x_n) = x_1...x_n$. Ponadto, poniżej znajduje się kilka zadań ściśle związanych z prezentowanym tematem. Warty uwagi jest również fakt, że treści zaczerpnięte zostały z olimpiad matematycznych oraz renomowanych czasopism. Podobnie jak w części pierwszej, każde rozwiązanie opatrzyłem autorskim komentarzem, który w szczegółowy sposób wyjaśnia przebieg rozumowania oraz wskazuje istotne aspekty w technice rozwiązywania.

1.2 Zadania

1.2.1 Nierówność między średnimi

Zadanie 1.1 Udowodnij, że jeżeli a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od zera, to:

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geq \frac{(b+c)^a \cdot (c+a)^b \cdot (a+b)^c}{2^{a+b+c}}.$$

Źródło: Matematyka 1 - zbiór zadań do matematyki (zakres podstawowy i rozszerzony, linia 1 ponadstandardowa); Henryk Pawłowski

Aby wykazać prawdziwość nierówności zadanej w treści zadania, należy wykorzystać nierówność między średnimi: arytmetyczną i geometryczną dla $a + b + c$ liczb dodatnich, wśród których jest dokładnie a liczb równych $b+c$, b liczb równych $c+a$ oraz c liczb równych $a+b$. Dodatkowo użyta zostanie nierówność: $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$, którą bardzo łatwo można otrzymać z nierówności: $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$. W ostatnim etapie wykorzystana jest zależność między średnimi: harmoniczną i geometryczną. Zatem:

$$\frac{(b+c)^a \cdot (c+a)^b \cdot (a+b)^c}{2^{a+b+c}} \leq \left(\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \cdot \frac{1}{2^{a+b+c}} =$$

$$\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}\right)^{a+b+c} = \left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c} = \left(\frac{3(ab+bc+ca)}{3(a+b+c)}\right)^{a+b+c} \leq$$

$$\left(\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}\right)^{a+b+c} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} = \left(\frac{a+b+c}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}}\right)^{a+b+c} \leq a^a\cdot b^b\cdot c^c.$$

Zadanie 1.2 Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek:

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3.$$

Udowodnić, że:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}} \geq \sqrt{3}.$$

Źródło: LXII Olimpiada Matematyczna; etap 1, zadanie 6

Podstawowym pomysłem w tego typu zadaniach jest obserwacja, że żądaną nierówność otrzymamy po zsumowaniu ze sobą pewnych nierówności typu:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}} \geq \sqrt{3}\cdot\frac{a^4}{a^3+b^3+c^3}. \tag{1}$$

Zauważmy, ze po zsumowaniu stronami trzech nierówności, gdzie odpowiednio czynnik a w liczniku zastąpimy przez b i c, oraz wykorzystaniu zadanej w treści nierówności: $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$ otrzymamy tezę. Sposób ten omawiany jest dokładnie w publikacjach P. Adama Osękowskiego, szczególnie w odczycie: "O pewnej metodzie rozwiązywania nierówności".
A zatem nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$a^3(a^3+b^3+c^3) \geq a^4\sqrt{3(b^4+b^2c^2+c^4)},$$

$$a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{3(b^4+b^2c^2+c^4)},$$

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq 3a^2(b^4+b^2c^2+c^4),$$

i w efekcie zależność (1) jest równoważna zależności:

$$a^6+b^6+c^6+2a^3b^3+2a^3c^3+2b^3c^3 \geq 3a^2b^4+3a^2c^4+3a^2b^2c^2. \tag{2}$$

Stosując trzykrotnie nierówność między średnimi: arytmetyczną i geometryczną:

$$b^6+a^3b^3+a^3b^3 \geq 3\sqrt[3]{b^6(a^3b^3)(a^3b^3)} = 3a^2b^4,$$

$$c^6+a^3c^3+a^3c^3 \geq 3\sqrt[3]{c^6(a^3c^3)(a^3c^3)} = 3a^2c^4,$$

$$a^6 + b^3c^3 + b^3c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6(b^3c^3)(b^3c^3)} = 3a^2b^2c^2.$$

Wynikiem sumowania stronami powyższych trzech nierówności jest nierówność (2), a więc i równoważna jej nierówność (1). Dowód przebiega analogicznie dla pozostałych dwóch nierówności:

$$\frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{b^4}{a^3 + b^3 + c^3}, \tag{3}$$

$$\frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{c^4}{a^3 + b^3 + c^3}. \tag{4}$$

Zauważmy, że tezę można otrzymać poprzez dodanie stronami zależności: (1), (3) i (4) oraz wykorzystanie podanego w treści zadania warunku $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Zadanie 1.3 Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$\frac{1}{a + ab + abc} + \frac{1}{b + bc + bca} + \frac{1}{c + ca + cab} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Źródło: LVIII Olimpiada Matematyczna; etap 1, zadanie 6

Bardzo często zdarza się, że jeśli należy udowodnić nierówność zachodzącą z założenia dla liczb dodatnich, to pomocna może okazać się właśnie nierówność Cauchy'ego. Na początku należy się dokładnie przyjrzeć zależności, którą mamy do udowodnienia. Zauważmy, że po lewej stronie w mianowniku mamy trzy wyrażenia, zaś po prawej stronie - trójkę oraz pierwiastek stopnia trzeciego z liczby abc występującej po lewej stronie. Ponadto po lewej stronie sumujemy trzy składniki, które są skonstuowane na tej samej zasadzie. Może to sugerować, że należy dokonać sumowania stronami trzech nierówności, jak w zadaniu powyżej.
Zatem, korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:

$$\frac{a + ab + abc}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot ab \cdot abc},$$

$$\frac{b + bc + bca}{3} \geq \sqrt[3]{b \cdot bc \cdot bca},$$

$$\frac{c + ca + cab}{3} \geq \sqrt[3]{c \cdot ca \cdot cab}.$$

Nierówności te są równoważne odpowiednio nierównościom:

$$a + ab + abc \geq 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{a^2b},$$

$$b + bc + bca \geq 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{b^2c},$$
$$c + ca + cab \geq 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{c^2a}.$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}}\right).$$

Zatem, aby rozwiązać zadanie należy wykazać prawdziwość nierówności:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, y = \frac{1}{\sqrt[3]{b}}, z = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}.$$

Powyższą nierówność można zapisać w postaci:

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3.$$

Jest ona prawdziwa, co można stwierdzić na podstawie zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:

$$x^2y + y^2z + z^2x = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} + \sqrt[3]{y^3 \cdot y^3 \cdot z^3} + \sqrt[3]{z^3 \cdot z^3 \cdot x^3} \leq$$
$$\frac{x^3 + x^3 + y^3}{3} + \frac{y^3 + y^3 + z^3}{3} + \frac{z^3 + z^3 + x^3}{3} = x^3 + y^3 + z^3.$$

Zadanie 1.4 Dowieść, że iloraz sumy wszystkich dzielników naturalnych liczby całkowitej $n > 1$ przez liczbę tych dzielników jest większy od $\sqrt{n}$.

Źródło: XV Olimpiada Matematyczna; etap 1, zadanie 9

W tym zadaniu także nasuwa się naturalne skojarzenie - iloraz sumy dzielników przez liczbę dzielników jest po prostu średnią arytmetyczną dzielników. A zatem:
Niech $d_1, d_2, ..., d_s$ oznaczają wszystkie dzielniki liczby całkowitej $n > 1$, zaś $s \geq 2$ niech będzie ilością tych dzielników. Wśród tych dzielników znajdują się z pewnością liczby nierówne, na przykład 1 i n. Dodatkowo jako A oznaczmy zbiór liczb $d_1, ..., d_s$. Zatem nierówność między średnimi: arytmetyczną i geometryczną przyjmie postać:

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} d_i}{s} > \left(\prod_{i=1}^{s} d_i\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{5}$$

Należy zatem udowodnić, że prawa strona nierówności (5) jest równa $\sqrt{n}$. Zauważmy, że jeśli pewna liczba n ma dzielnik $d_1 < \sqrt{n}$, to posiada również dzielnik $d_2 > \sqrt{n}$, taki że $d_1 \cdot d_2 = n$. Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. Liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wówczas w zbiorze liczb $A = \{d_1, d_2, ..., d_s\}$ dla każdej liczby d_i istnieje różna od niej liczba $d_k = \frac{n}{d_i}$, taka że $d_i d_k = n$. A więc jeśli liczba $s = |A|$ jest parzysta, to zbiór $\{d_1, d_2, ..., d_s\}$ można podzielić na $\frac{s}{2}$ takich par, że iloczyn liczb z każdej pary jest równy n. W takim razie:

$$(d_1 d_2 ... d_s)^{\frac{1}{s}} = \left(n^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{1}{s}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

2. Liczba n jest kwadratem pewnej liczby d_r, która jest oczywiście dzielnikiem liczby n. Wówczas dla każdej liczby $d_i \neq d_r$ ze zbioru $A = \{d_1, d_2, ..., d_s\}$ istnieje liczba $d_k = \frac{n}{d_i}$ różna od d_i, taka że $d_i d_k = n$. Wobec tego liczba $s - 1$ jest parzysta oraz zbiór liczb $\{d_1, ..., d_{r-1}, d_{r+1}, ..., d_s\}$ można podzielić na $\frac{s-1}{2}$ takich par, że dla każdej z nich iloczyn liczb w niej występujących będzie równy n. W takim razie:

$$(d_1 d_2 ... d_s)^{\frac{1}{s}} = \left(n^{\frac{s-1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{s}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Zatem wobec nierówności (5) w obu przypadkach zachodzi:

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} d_i}{s} > \sqrt{n}.$$

Zadanie 1.5 Dowieść, że jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n < (n+1)^n.$$

Źródło: X Olimpiada Matematyczna; etap 1, zadanie 6

Zauważmy, że po lewej stronie iloczyn ma n czynników, zaś po prawej stronie liczba podniesiona jest do $n - tej$ potęgi. Można zatem sądzić, że nierówność w zadaniu to zależność między średnimi: arytmetyczną i geometryczną podniesiona do $n - tej$ potęgi.
Zatem, według nierówności Cauchy'ego o średnich można stwierdzić, że dla n liczb: $2, 4, 6, ..., 2n$ zachodzi związek:

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < \frac{2 + 4 + 6 + ... + 2n}{n}.$$

Przekształcając równoważnie:

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < 2 \cdot \frac{1+2+3+...+n}{n},$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{n},$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < n+1.$$

Po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi n wynika żądana nierówność:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n < (n+1)^n.$$

Zadanie 1.6 Dane są liczby rzeczywiste $x_i, y_i (i = 1, 2, ..., n)$ takie, że:

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0, y_1 > y_2 > ... > y_n > 0$$

oraz

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \geq \prod_{i=1}^{k} y_i, k = 1, 2, ..., n.$$

Udowodnić, że:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Źródło: XXXIX Olimpiada Matematyczna; etap 2, zadanie 2

Zadanie to pochodzi z drugiego etapu Olimpiady Matematyczej, zatem nierówność między średnimi nie jest na początku oczywista. Wskazówką może być fakt, że w założeniach dane są: opisy monotoniczności ciągów oraz zależność między iloczynami, natomiast teza dotyczy sum wyrazów owych ciągów. Wiemy, że za pomocą nierówności Cauchy'ego możemy powiązać sumy z iloczynami.
Zatem, przekształcając drugie założenie, dla $k = 1, ..., n$:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y_i} \geq 1.$$

Zaś na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y_i} \right)^{\frac{1}{k}} \geq 1.$$

Jako S_k oznaczmy:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{y_i} - 1 \right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y_i} \right) - k.$$

Przyjmijmy $S_0 = 0$. Z otrzymanej nierówności między średnimi wynika, że dla dowolnego k liczba S_k jest nieujemna (otrzymujemy to łatwo wymnażając stronami przez k i następnie odejmując k stronami).Zauważmy, że w poniższej różnicy dochodzi do znacznej redukcji wyrazów:

$$S_k - S_{k-1} = \frac{x_k}{y_k} - 1 = \frac{x_k - y_k}{y_k}.$$

Mamy tu do czynienia z sumą teleskopową. A stąd:

$$x_k - y_k = y_k \cdot (S_k - S_{k-1}).$$

Można zatem zapisać:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k (S_k - S_{k-1}) = y_1(S_1 - S_0) + ... + y_n(S_n - S_{n-1}).$$

Zatem, stosując do powyższej sumy **tożsamość (przekształcenie) Abela** otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) = (y_1 - y_2)S_1 + (y_2 - y_3)S_2 + ... + (y_{n-1} - y_n)S_{n-1} + y_n S_n.$$

A w połączeniu z nierównościami: $y_1 > y_2 > ... > y_n > 0$ i $S_k \geq 0$ dla dowolnego $k = 1, ..., n$ wnioskujemy, że:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \geq 0,$$

co jest przekształceniem tezy.

Zadanie 1.7 Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

Źródło: LII Olimpiada Matematyczna; etap 3, zadanie 1

Nie zawsze na pierwszy rzut oka widać, że nierówność Cauchy'ego może być pomocna w rozwiązaniu zadania. Zauważmy jednak, że każda liczba x_i jest nieujemna, zatem wykonując pewne podstawienie można sprowadzić zadaną nierówność do nierówności między średnimi.
Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dla liczb:

$$y_1 = x_i^i, y_2 = y_3 = ... = y_i = 1; (2 \leq i \leq n),$$

zachodzi związek:

$$x_i = \sqrt[i]{y_1 y_2 y_3 ... y_i} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_i}{i} = \frac{x_i^i + (i-1)}{i}.$$

Zatem:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (i-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i^i,$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i = \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

Zadanie 1.8 Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Źródło: XLII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (USA 2001); zadanie 2

Dowód zadanej nierówności można przeprowadzić analogicznie jak w zadaniu drugim. Dość łatwo nasuwa się, że należy zsumować ze sobą trzy nierówności, w których lewe strony będą takie jak w tezie, natomiast po prawej stronie w licznikach będą występowały współczynniki a, b, c w takich potęgach, jak w mianowniku (oczywiście wspólnym dla wszystkich trzech nierówności).
Dowód można przeprowadzić wykazując najpierw prawdziwość nierówności:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}.$$

Zauważmy, że powyższa nierówność równoważna jest nierównościom:

$$\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right) \cdot a \geq a^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{a^2 + 8bc},$$

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq \left(a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a^2+8bc}\right)^2,$$

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}\cdot\left(a^2+8bc\right).$$

Zauważmy również, że:

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\right).$$

Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:

$$\frac{b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}{2}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}}{4}\geq\sqrt{\left(b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^4},$$

$$\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\right)\geq 2\cdot 4\cdot b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}=$$

$$8\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b\cdot c.$$

A stąd:

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geq a^{\frac{8}{3}}+8\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b\cdot c=a^{\frac{2}{3}}\left(a^2+8bc\right).$$

Dowód przebiega analogicznie dla nierówności:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geq\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

Żądaną nierówność otrzymuje się poprzez dodanie stronami dowodzonych zależności, co kończy dowód.

Zadanie 1.9 Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $a\cdot b\cdot c=1$. Udowodnić, że:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

Źródło: XLI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (Korea Południowa 2000); zadanie 2

W zadaniu tym nierówność między średnimi pełni wyłącznie rolę pomocniczą, nie należy dopatrywać się jej od razu. Wiemy, że liczby

a, b, c są dodatnie, więc należy pamiętać, że możemy wykorzystać omawianą zależność. Kluczowe jest jednak takie podstawienie, aby wykorzystać daną zależność: $abc = 1$. Istotnie:
Niech x, y, z będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że:

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}.$$

Wówczas dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq x \cdot y \cdot z.$$

Dla większej przejrzystości zapisu można przyjąć:

$$u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y.$$

Zauważmy, że suma dowolnych dwóch liczb spośród liczb u, v, w jest dodatnia, zatem co najwyżej jedna z nich może być ujemna. Jeśli któraś z nich faktycznie jest ujemna - oczywiste jest, że nierówność jest prawdziwa. Jeżeli zaś liczby u, v, w są nieujemne, to korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną:

$$\sqrt{u \cdot v} \leq \frac{u + v}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

$$\sqrt{w \cdot v} \leq \frac{w + v}{2} = \frac{2y}{2} = y,$$

$$\sqrt{u \cdot w} \leq \frac{u + w}{2} = \frac{2z}{2} = z.$$

Następnie mnożąc powyższe nierówności stronami:

$$u \cdot v \cdot w \leq x \cdot y \cdot z,$$

co kończy dowód, ponieważ nierównosć ta jest równoważna nierówności podanej w treści zadania.

Zadanie 1.10 Dane są liczby rzeczywiste x, y, z spełniające zależność:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z).$$

Dowieść, że:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27.$$

Dodatkowo rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

Źródło: III Środkowo - Europejska Olimpiada Matematyczna (Poznań 2009); zadanie 5

Zadanie to znalazło się na bardzo wysokim szczeblu zawodów matematycznych, zatem można sądzić, że jego rozwiązanie może przysporzyć wiele kłopotów. Nic bardziej mylnego - zauważmy, że dowód opiera się wyłącznie na prostej obserwacji i zastosowaniu nierówności między średnimi. Rozpisując założenie:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 3,$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3.$$

Zauważmy, że:

$$(x-2)^4 + (y-2)^4 + (z-2)^4 \geq 0,$$
$$x^4+y^4+z^4+(16+8)(x^2+y^2+z^2)+48 \geq 8(x^3+y^3+z^3)+32(x+y+z).$$

A z założenia:

$$8(x^2 + y^2 + z^2) = 32(x + y + z) - 72.$$

Łącząc zatem powyższe dwie zależności:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 24.$$

Stąd łatwo wynika, że:

$$(x-2)^4 + (y-2)^4 + (z-2)^4 \geq 3.$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$a = (x-2)^2, b = (y-2)^2, c = (z-2)^2$$

i stosując nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}{3}.$$

Na podstawie przekształconego założenia:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq 1,$$
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 1,$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \geq 3,$$

co jest równoważne przekształconej wcześniej tezie. Z własności nierówności Cauchy'ego wnioskujemy łatwo, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy: $a = b = c$, co jest równoznaczne temu, że:

$$x, y, z \in \{1, 3\}.$$

1.2.2 Sumy i iloczyny

Zadanie 1.11 Znaleźć wszystkie układy liczb całkowitych (a, b, c, x, y, z) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = xyz \\ x + y + z = abc \end{cases}$$

oraz warunki: $a \geq b \geq c \geq 1, x \geq y \geq z \geq 1$.

Źródło: XLIX Olimpiada Matematyczna; etap 3, zadanie 1

Bardzo często zadania tego typu należy rozpocząć od dodania lub odjęcia stronami równań w układzie. Wówczas z reguły okazuje się, że możemy zaobserwować pewne charakterystyczne własności, które ułatwią później rozwiązanie zadania. Zauważmy, że przekształcenia pojedynczych równań raczej nie pomogą w rozwiązaniu, gdyż mamy aż sześć zmiennych, a każda z nich występuje tylko raz.
Dodając stronami:

$$a + b + c + x + y + z - xyz - abc = 0.$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy w ten sposób dwie grupy jednakowo skonstruowanych wyrażeń: $a, b, c, -abc$ oraz $x, y, z, -xyz$. Łatwo więc wywnioskować, że możemy dodać do siebie cztery wyrażenia, z których każde jest iloczynem i posiada taką własność, że po zsumowaniu z pewnym drugim wyrażeniem otrzymamy szukaną grupę. Nietrudno wywnioskować, że:

$$(ab - 1)(c - 1) + (a - 1)(b - 1) = abc - (a + b + c) + 2.$$

Wyrażenie to zawiera szukaną przez nas grupę zmiennych oraz współczynniki liczbowe. Oznaczmy zatem:

$$A_1 = (ab - 1)(c - 1), A_2 = (a - 1)(b - 1),$$

$$B_1 = (xy - 1)(z - 1), B_2 = (x - 1)(y - 1).$$

Stąd łatwo wynika związek:

$$A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 4.$$

Dodatkowo z założenia: liczby A_1, A_2, B_1, B_2 są całkowite nieujemne. Rozważmy przypadki:

Jeśli $c \geq 2$, to z założenia $a \geq 2, b \geq 2 \Rightarrow ab \geq 4$, a co za tym idzie: $A_1 \geq 3, A_2 \geq 1$. W świetle powyższej równości zachodzi również: $B_1 = 0, B_2 = 0, A_1 = 3, A_2 = 1$, co daje rozwiązania:

$$(a, b, c, x, y, z) = (2, 2, 2, 6, 1, 1).$$

Odpowiednio założenie $z \geq 2$ prowadzi do rozwiązania:

$$(a, b, c, x, y, z) = (6, 1, 1, 2, 2, 2).$$

Ostatnia możliwość to $c = z = 1$. Wówczas $A_1 = 0, B_1 = 0$, więc $A_2 + B_2 = 4$. Zatem łatwo rozumując otrzymujemy rozwiązania (a, b, c, x, y, z):

$$(3, 2, 1, 3, 2, 1), (3, 3, 1, 7, 1, 1), (5, 2, 1, 8, 1, 1), (7, 1, 1, 3, 1, 1), (8, 1, 1, 5, 2, 1).$$

Zadanie 1.12 Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 2000.

Źródło: Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej; Zwardoń 2006, zadanie 2

Zadania tego typu są dość często spotykane na różnorakich zawodach matematycznych, pomimo faktu, że rozwiązanie przebiega bardzo podobnie jak przedstawione poniżej praktycznie dla każdej sumy. Dlatego z pewnością warto przyswoić zaprezentowany poniżej sposób rozumowania.
Na początek zauważmy, że użycie w rozwiązaniu jedynki jest bezcelowe - zwiększa ona sumę, ale nie zmienia iloczynu. Dodatkowo możemy w naszych rozważaniach pominąć czwórkę, gdyż zastąpimy ją przez dwie dwójki. Wykażemy teraz, że użycie w iloczynie liczby $k \geq 5$ jest nieopłacalne. Istotnie, możemy ją zastąpić przez liczby: 2 i $k-2$. Sumują się obie do k, zaś funkcja $f(k) = 2(k-2)$ rośnie szybciej niż funkcja $g(k) = k$ dla $k > 4$.
Zauważmy również, że jeśli weźmiemy co najmniej trzy dwójki, to bardziej opłacalne będzie zastąpienie ich dwiema trójkami (analogicznie dla większej ich ilości). Wnioskujemy zatem, że szukany iloczyn składa się wyłącznie z trójek i co najwyżej dwóch dwójek.
Łatwo stwierdzić, że $2000 = 666 \cdot 3 + 2$, więc szukany iloczyn zawiera dokładnie jedną dwójkę i wynosi:

$$2 \cdot 3^{666}.$$

Zadanie 1.13 Dla danej liczby naturalnej n znaleźć największą wartość iloczynu liczb naturalnych, których suma równa się n.

Źródło: "Matematyka" - miesięcznik dla nauczycieli; numer 2, 1998 rok

Zadanie to jest analogiczne do problemu przedstawionego powyżej - mamy tu do czynienia z uogólnieniem powyższego rozumowania. Jak wcześniej wspomniałem, sposób dowodu dla dowolnego n jest analogiczny jak dla przypadku $n = 2000$. Przyjrzyjmy się uogólnieniu powyższego problemu na dowolną liczbę naturalną n.
Zgodnie z przedstawionym rozumowaniem - wśród szukanych liczb są co najwyżej dwie dwójki, zaś reszta to trójki. Stąd nietrudno zauważyć, że zachodzą następujące związki (dla $k \in \mathbb{N}$):

1. Weźmy liczbę postaci $n = 3k + 2$. Wówczas największa wartość iloczynu liczb, których suma jest równa n, będzie wynosiła $2 \cdot 3^k$.
2. Weźmy liczbę postaci $n = 3k + 1$. Wówczas największa wartość iloczynu liczb, których suma jest równa n, będzie wynosiła $4 \cdot 3^{k-1}$.
3. Weźmy liczbę postaci $n = 3k$. Wówczas największa wartość iloczynu liczb, których suma jest równa n, będzie wynosiła 3^k.

Zauważmy, że w ten sposób wyczerpaliśmy wszystkie przypadki, które przedstawiliśmy w zadaniu poprzednim. Wywnioskowaliśmy bowiem, że wśród szukanych liczb są co najwyżej dwie dwójki. Zgodnie z rozumowaniem powyżej - dla $3k + 1$ otrzymujemy dokładnie dwie dwójki, dla $3k + 2$ - jedną, zaś dla $3k$ - żadnej.

Zadanie 1.14 Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$ oraz $a + b + c = 407$. Ile maksymalnie zer na końcu może mieć iloczyn abc?

Źródło: Olimpiada Matematyczna; Sankt Petersburg 2002

W rozwiązaniu tego zadania istotne jest rozumowanie, które w pewnym sensie jest podobne do przedstawionego powyżej. Będziemy starali się tak dobrać czynniki w iloczynie abc, aby zmaksymalizować liczbę zer.
Zauważmy, że interesuje nas sytuacja, kiedy w rozkładzie liczby abc na czynniki pierwsze występują wyłącznie dwójki i piatki. Na dodatek - w tych samych potęgach, gdyż wtedy liczbę abc możemy zapisać w postaci:

$$abc = 2^\delta \cdot 5^\delta = 10^\delta.$$

Zatem pożądane jest, aby liczby a, b, c przedstawić w postaci:

$$a = 5^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2}, b = 5^{\beta_1} \cdot 2^{\beta_2}, c = 5^{\gamma_1} \cdot 2^{\gamma_2}.$$

Zauważmy, że:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq 3,$$

ponieważ $5^4 = 625 > 407$, a wszystkie liczby a, b, c są naturalne. Zapiszmy zatem:

$$407 = 3 \cdot 125 + 32 = (1+2) \cdot 5^3 + 2^5 = 5^3 + 2 \cdot 5^3 + 2^5.$$

Jak się okazuje:

$$5^3 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 2^5 = 5^6 \cdot 2^6 = 10^6.$$

A więc otrzymaliśmy szukany iloczyn z zmaksymalizowaną liczbą zer. Zatem szuakana licza abc ma na końcu 6 zer dla:

$$a = 125, b = 250, c = 32.$$

Zadanie 1.15 Ciekawostka. W jednym z numerów miesięcznika *"Delta"* ukazało się takie oto twierdzenie:
Niech x, y, z, m będą liczbami naturalnymi takimi, że: $x \geq y \geq z$ oraz

$$(x+y)(y+z)(z+x) = mxyz.$$

Wtedy (m, x, y, z) jest jedną z czwórek: $(8, 1, 1, 1), (9, 2, 1, 1), (10, 3, 2, 1)$.

Źródło: Miesięcznik "Delta"; numer 1, 1999 rok

Istotnie, każda z przedstawionych czwórek spełnia warunki zadania. Przypatrzmy się jednak poniższemu rozumowaniu (korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną):

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{xz} = xyz,$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Z własności nierówności Cauchy'ego wiemy, że dla $x = y = z$ zachodzi równość. Zatem rozwiązaniem rozważanego równania jest nie tylko czwórka (m, x, y, z) równa $(8, 1, 1, 1)$, ale każda czwórka postaci $(8, a, a, a)$, gdzie a jest dowolną liczbą naturalną.

Zadanie 1.16 Załóżmy, że $x \leq y$ są takimi liczbami całkowitymi, że $xy = 1997(x+y)$, to (x, y). Wyznacz te liczby.

Źródło: Olimpiada Matematyczna; Rosja 1997/98

Przedstawiony poniżej schemat rozumowania jest charakterystyczny i w pewnym sensie uniwersalny dla zadań tego typu. Polega on na zauważeniu pewnych charakterystycznych cech zmiennych i współczynników w równaniu, a następnie na przekształceniu zależności do postaci, z której łatwo będzie można wywnioskować rozwiązanie. Przy mniejszych współczynnikach liczbowych na początku można spróbować odnaleźć rozwiązania "domyślając się" ich, jednak dla dużych liczb ta strategia z reguły nie przynosi skutku.
Zauważmy, że 1997 jest liczbą pierwszą. Od razu widoczny jest wniosek, że któraś z liczb x, y musi być jej dzielnikiem. Idąc tym tropem, wykonując bardzo proste przekształcenia otrzymujemy:

$$1997x + 1997y - xy + 1997^2 - 1997^2 = 0.$$

Zauważmy, że wykonując pozornie nic nie znaczącą operację - dodanie i odjęcie tego samego wyrażenia - równanie przybiera dużo prostszą do analizy postać:

$$x(1997 - y) - 1997(1997 - y) = -1997^2,$$

$$(x - 1997)(y - 1997) = 1997^2.$$

Analiza ta była już przeprowadzana wcześniej (podrozdział: *Iloczyn równy m-krotnej sumie*). Wynika stąd łatwo, że rozwiązania otrzymamy dzięki układom:

$$x - 1997 = \pm 1997, y - 1997 = \pm 1997,$$

$$x - 1997 = \pm 1, y - 1997 = \pm 1997^2.$$

Należy pamiętać o rozważeniu przypadków symetrycznych! Stąd oraz z warunku $x \leq y$ otrzymujemy, że (x, y) jest jedną z par:

$$(0, 0), (3994, 3994), (1998, 3990006), (-3986012, 1996).$$

Bibliografia:

1. Nowicki Andrzej, *"Podróże po imperium liczb"*. Wydawnictwo Olsztyńskiej Wyższej Szkoły Informatyki i Zarządzania; Olsztyn, Toruń, 2011.

2. Osękowski Adam, *"Jak dowodzić nierówności"* - wykład. Kraków, 07.01.2012r.

3. Osękowski Adam, *"O pewnej metodzie rozwiązywania nierówności"* - odczyt.

4. Miesięczniki *"Delta"* oraz *"Matematyka"*

5. Archiwum zadań Olimpiady Matematycznej - www.archom.ptm.org.pl

6. Strony internetowe Olimpiad Matematycznych - www.om.edu.pl, www.imo-official.org