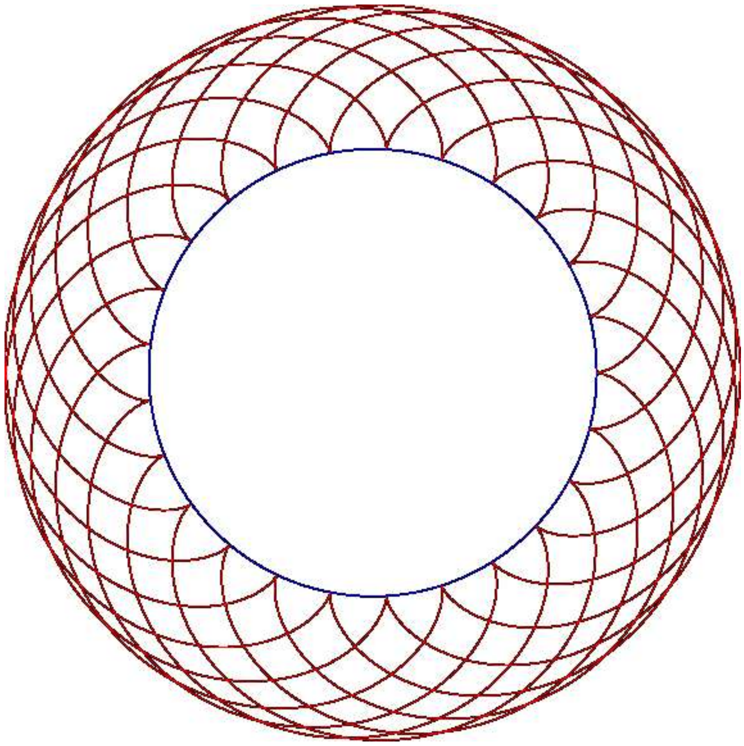
Gimnazjum nr 16 im. Króla Stefana Batorego w Krakowie

ul. Konarskiego 2, 30-049 Kraków

Tel. 12 633 13 83 lub 12 633 02 47

Przypadki toczenia okręgu

Arkadiusz Biel



Kraków 2012

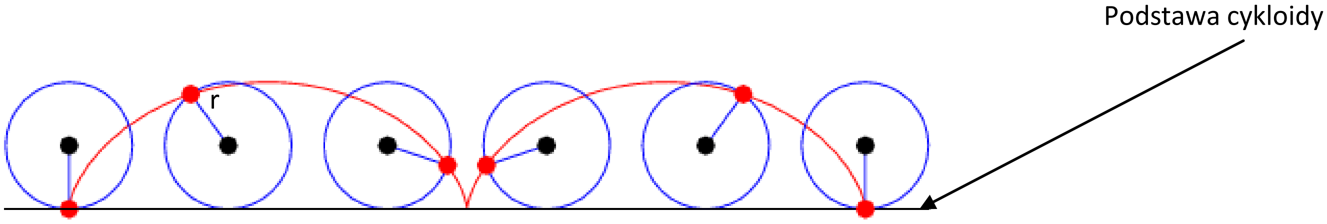
Motywem do napisania pracy była obserwacja przyczepionej do szprychy roweru kolorowej kulki. Zastanawiałem się po jakim torze porusza się kulka, jaką drogę przebędzie, jeśli rowerzysta pokona określony odcinek trasy oraz jak zmienia się tor ruchu w zależności od odległości kulki od środka koła.

Przy pomocy komputera udało mi się wykonać rysunki pokazujące sposób poruszania się kulki. Zauważyłem, że zmieniając odległość obserwowanego punktu od środka koła otrzymuję różne kształty krzywych.

Przykład 1.

Droga jaką przebywa punkt należący do obwodu koła toczonego bez poślizgu po odcinku prostej.

Rysunek 1*.



Ta linia nazywa się cykloidą.

Własności cykloidy.

Badania nad cykloidą już w XVI w. rozpoczął włoski matematyk, fizyk i astronom Galileusz po czym napisał do Torricellego, by kontynuował jego badania gdyż przez 40 lat bezskutecznie szukał wzoru na pole obszaru zamkniętego przez tę krzywą.

Torricelli znalazł ten wzór.

$$P = 3\pi r^2$$

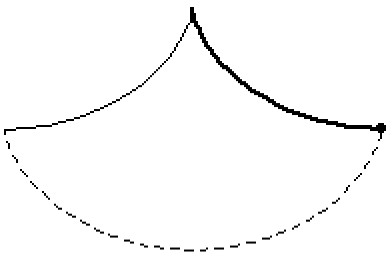
Wzór na długość krzywej obliczył Christopher Wren w XVII w.

$$L = 8r$$

Christian Huyghnes w roku 1673 opublikował dzieło pt. „Horologium Oscillatorium”(„Wahadło mechaniczne”), w którym podał własności mechaniczne cykloidy. Wykazał on że wahadło zegara niezależnie od wielkości swoich wychyleń wykonuje w tym samym czasie ruch po krzywej zwanej izochroną i że izochrona jest odwróconą wypukłością cykloidy.

Na rysunku 2 przedstawiono wahadło między dwoma cykloidami. Ciężarek wahadła wykreśla taką samą cykloidę jak te, między którymi jest zawieszony. Wahadło to jest nazywane cykloidalne.

Rysunek 2*.



Zwykłe zegarki wykonują ruch kolisty nie cykloidalny ale łuk wykonywany przez te wahadła jest bardzo mały, odpowiada on środkowej części cykloidy, którą (w środkowej części) można uznać za łuk koła.Łuk cykloidy ma też inne własności techniczne, jest on najbardziej wytrzymałym łukiem na obciążenia.

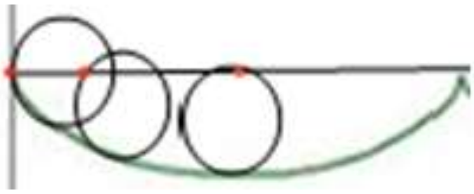
W związku z tym wiele mostów ma cykloidalne arkady.

Koła zębate posiadają zęby cykloidalne w celu zmniejszenia tarcia w mechanizmach transmisyjnych.

Amerykański inżynier S.C. Ogilvy odwrócił związek pomiędzy kołem, linią prostą i cykloidą. Zastanawiał się nad tym, po jakiej krzywej musi toczyć się bez poślizgu okrąg by tor poruszania się dowolnego punktu był odcinkiem prostej.

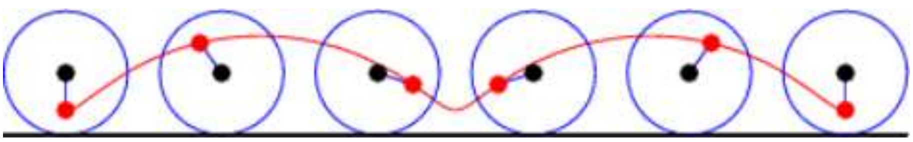
Odpowiedź jest oczywista krzywa to odwrócona cykloida.

Rysunek 3.



Kolejnym etapem jest obserwacja zmian kształtu zależnie od zmiany położenia punktu względem środka okręgu. Gdy przesuniemy punkt bliżej środka okręgu, powstaje krzywa zademonstrowana poniżej.

Rysunek 4***.**



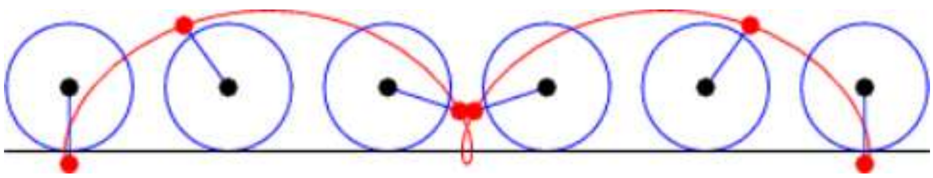
Jest to cykloida skrócona.

Gdy punkt ten przesuniemy do środka okręgu, krzywa będzie się zawierała w prostej równoległej do podstawy.

Rysunek 5.

Na rysunku 6 punkt w którym zaczyna się toczenie został przesunięty na odległość większą niż promień toczonego okręgu.

Rysunek 6*.

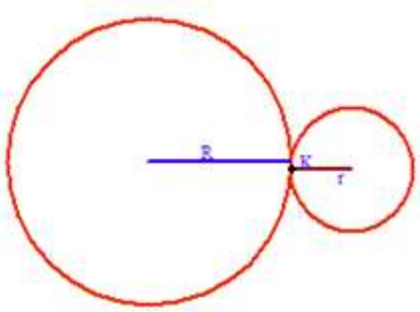


Krzywa ta nazywa się cykloidą wydłużoną.

Następie zająłem się obserwacją toczącego się bez poślizgu okręgu po innych krzywych.

Tocząc bez poślizgu okrąg o promieniu r po okręgu o promieniu R otrzymamy różne odmiany -oid.

Rysunek 7.

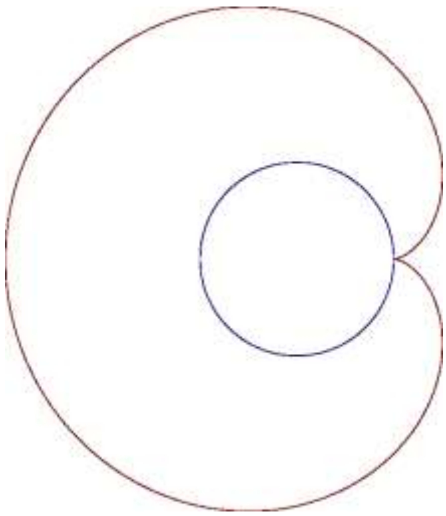


Nazwy tych krzywych są zależne od stosunku promieni:

- kardioida (dla $\frac{R}{r}$=1)
- nefroida (dla $\frac{R}{r}$=2)

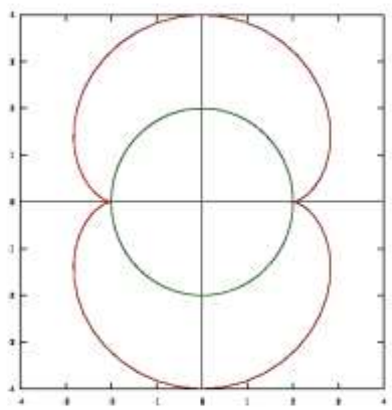
Aby stworzyć **kardioidę** zaznaczamy punkt na okręgu o takim samym promieniu jak okrąg, po którym będzie on toczony. Krzywa przedstawiona została na poniższym rysunku.

Rysunek 8**.



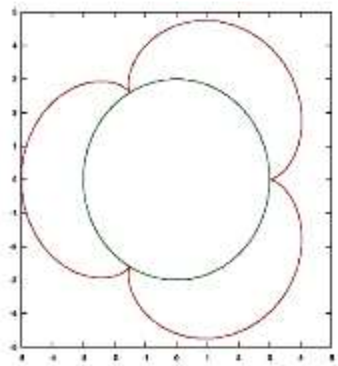
Aby wykreślić **nefroidę** zaznaczmy punkt na okręgu o promieniu dwukrotnie mniejszym niż promień okręg, po którym będzie on toczony, aż do to połączenia się punktu początkowego z końcowym. Krzywa przedstawiona została na rysunku 9

Rysunek 9**.



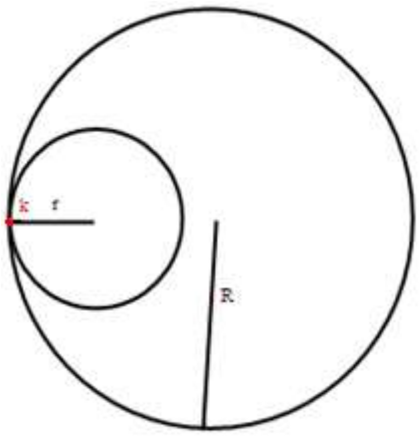
Inny kształt ma epicykloida powstała poprzez toczenie okręgu o promieniu 3 razy mniejszym od promienia okręgu po którym go toczymy. Krzywa przedstawiona została na poniższym rysunku.

*Rysunek 10**.*



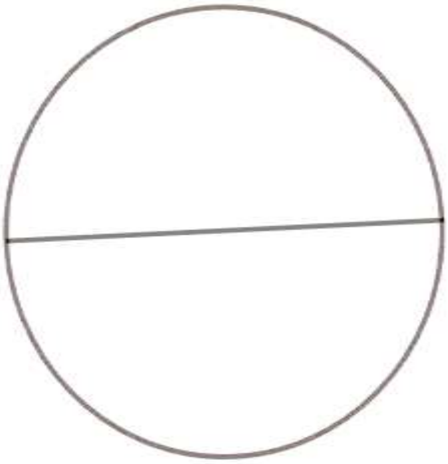
Podobnie powstają krzywe jakie zakreśla punkt okręgu toczonego po wewnętrznej stronie okręgu. Ich kształty są związane z zależnością promienia dużego okręgu (w którym toczony jest mały) i małego okręgu. Zaznaczamy punkt na okręgu i toczymy go aż do zamknięcia się krzywej.

Rysunek 11.



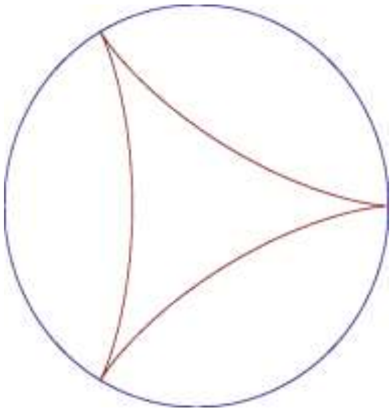
Dla zależności $\frac{R}{r}=2$ krzywa jest średnicą okręgu. Jest to przedstawione na poniższym rysunku.

Rysunek 12.



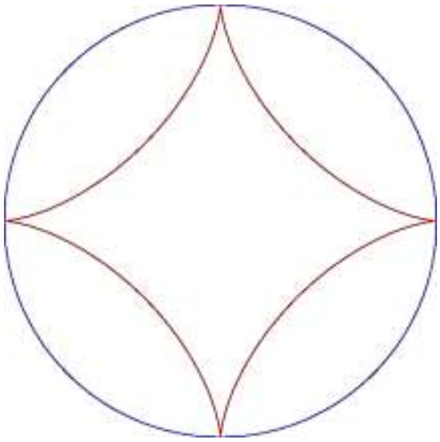
Deltoida jest to krzywa, jaką zakreśla punkt okręgu o promieniu 3 razy mniejszym od okręgu wewnątrz którego jest toczony. Prowadzimy tę czynność aż do połączenia punktu końcowego i początkowego krzywej. Zostało to przedstawione poniżej.

Rysunek 13**.



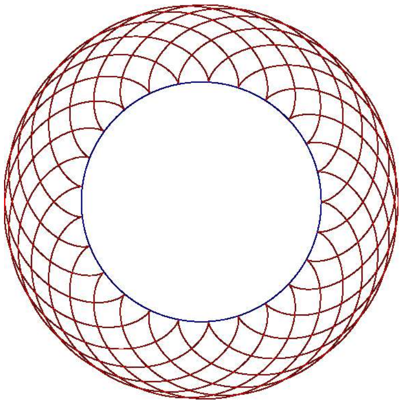
Aby narysować **asteroidę** toczymy okrąg o promieniu 4 razy mniejszym od promienia dużego okręgu. Zaznaczamy dowolny punkt na małym okręgu i toczymy go po wewnętrznej stronie dużego okręgu aż do zamknięcia się krzywej. Przedstawione jest to na rysunku 14.

Rysunek 14**.

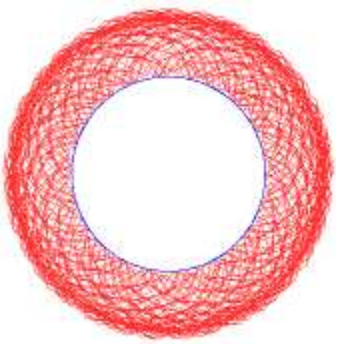


W przypadku, gdy stosunek $\frac{R}{r}$ jest liczbą niewymierną, otrzymujemy kolejne ciekawe kształty krzywych, nie wszystkich jeszcze nazwanych –oid.

Rysunek 15**.



Rysunek 16**.



Moim zdaniem rodzina krzywych powstałych przez toczenie okręgu jest fascynująca i ich poznawanie było dla mnie ciekawym doświadczeniem.

Bibliografia

1. W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski *Z geometrią za pan brat,* Iskry, Warszawa 1992.
2. Stanisław Kowal *Przez rozrywkę do wiedzy Rozmaitości matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-techniczne, Warszawa 1989
3. swiatmatematyki.pl – artykuł o Cykloidach

Przypisy:

*****Rysunki z fizyka.net.pl z artykułu o cykloidach

****** Rysunki z Wikipedii z artykułów tematycznych