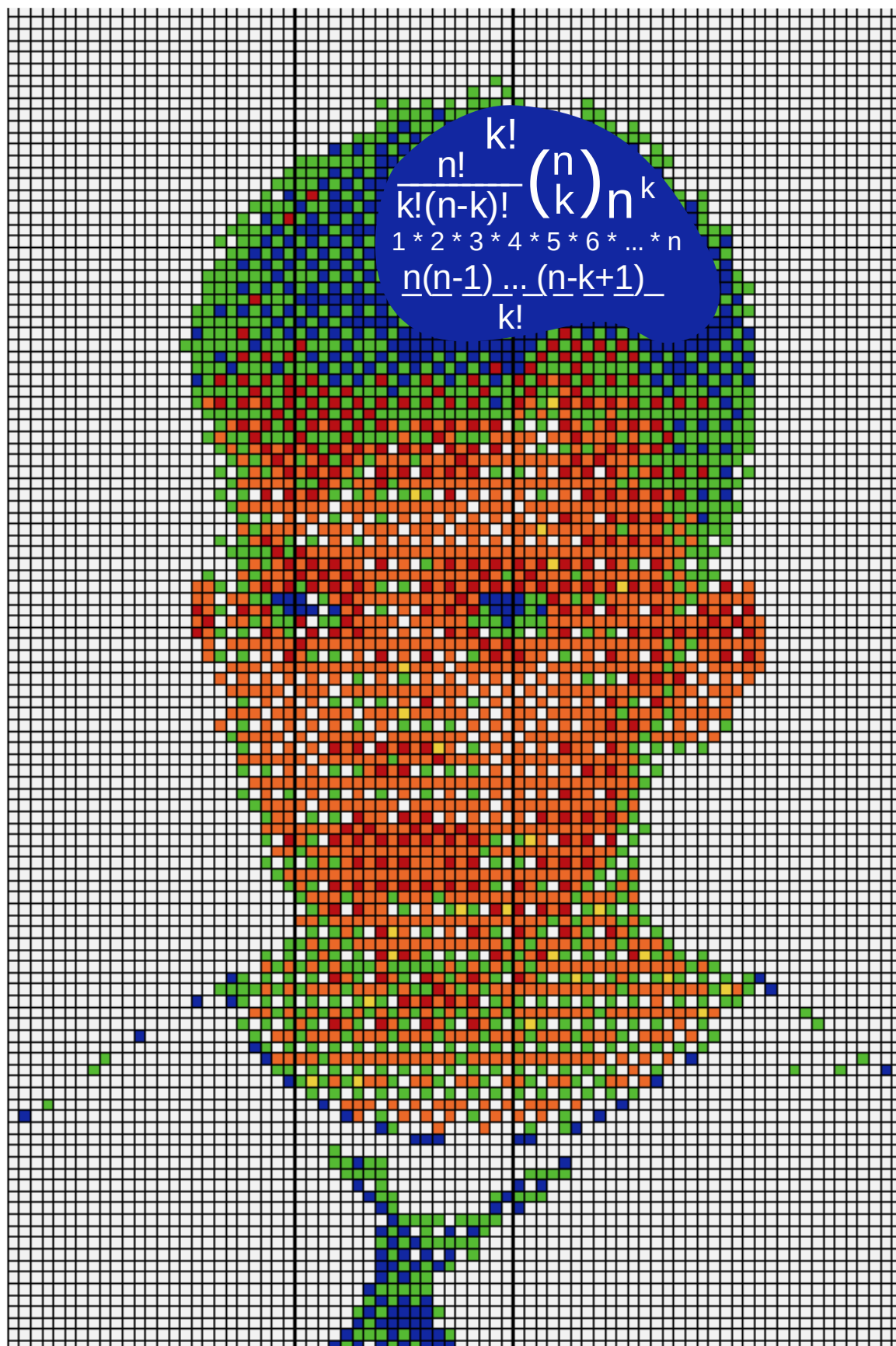


MATEMATYKA KOSTKI RUBIKA



Spis treści

1. Informacja nauczyciela	str. 3
2. Wstęp	str. 4
3. Historia kostki Rubika	str. 6
4. Kombinatoryka	str. 8
5. Kostka Rubika	
a. Terminologia	
b. 3x3x3	str. 14
c. 2x2x2	str. 22
d. 4x4x4	str. 25
e. Pyraminx	str. 29
f. Pyramorphix	str. 35
6. Obliczenia	str. 40
7. Moja kolekcja „rubików”	str. 43
8. Źródła	str. 48
9. Zakończenie	str. 49

Nowy Targ, 12.02.2018r.

INFORMACJA NAUCZYCIELA

Kacper jest uczniem szóstej klasy. Wszystkie jego prace pisemne z matematyki wykonywane są bezbłędnie. Zadania dodatkowe o podwyższonym stopniu trudności zawsze rozwiązuje wzorowo.

W ramach „Ligi Matematycznej” (praca z uczniem zdolnym) Kacper systematycznie rozwiązuje wszystkie zadania.

Brał udział w różnych konkursach matematycznych:

- w konkursie matematycznym „Krakowska Matematyka” Kacper zakwalifikował się do etapu wojewódzkiego,
- w konkursie matematycznym „Kangur” zajął bardzo wysoką lokatę i zakwalifikował się do etapu ogólnopolskiego,
- w Małopolskim Konkursie Matematycznym przeszedł do etapu rejonowego jako jedyny szóstoklasista.

W roku szkolnym 2016/2017 zajął II miejsce w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych pisząc pracę o nieskończoności.

Kacper ciągle stawia sobie nowe wyzwania i wyszukuje problemy do rozwiązania. Ma wiele pomysłów własnych na rozwiązywanie zadań, nie zawsze są one stereotypowe, potrafi dojść do rozwiązania różnymi metodami. Lubi pracować samodzielnie.

W pracy przedstawionej na konkurs wykorzystał duże wiadomości i umiejętności które posiada.
Opierał się na literaturze dołączonej do pracy.

Małgorzata Zawistowska-Grzybek

Małgorzata Zawistowska- Grzybek
tel. 608 301 187
malgosia_zg@o2.pl

WSTĘP

Jedną z moich pasji jest matematyka, którą interesuję się, odkąd sięgam pamięcią. Zawsze intrygowały mnie różnego rodzaju obliczenia. Dużą rolę odegrał tutaj mój Tata, który cierpliwie tłumaczył mi różne zagadnienia matematyczne – najczęściej podczas naszych licznych wypraw w Gorce (czasami pomagając sobie znalezionym kijkiem rysując na mokrym błocie skomplikowane wzory). Jednak Tata zawsze powtarza, że aby dobrze poznać matematykę, trzeba rozwiązywać dużo zadań (wtedy podobno można poznać „piękno” matematyki). Mnie jednak niezbyt pociągają żmudne mnożenia, dzielenia i tym podobne, wolę przeglądać Internet w poszukiwaniu ciekawych zagadnień matematycznych. A to nieskończoność (i związane z tym pojęciem paradoksy), a to liczby urojone, czy szeregi liczbowe. To dla mnie jest Matematyka (przez duże M). I to jest dla mnie piękne.

Drugą moją pasją jest kostka Rubika. Już w drugiej klasie podstawówki nauczyłem się układać standardową kostkę (3x3x3). Czasami zanosilem ją do szkoły i na przerwach układałem ją budząc zainteresowanie zarówno uczniów jak i nauczycieli. Oczywiście na początku były to proste algorytmy (znalezione w Internecie) do układania „normalnej” kostki. Potem rodzice kupili mi inne układanki: pyraminx, megaminx, 2x2x2, mirror cube, 4x4x4, dino cube, skewb i inne. Tu już zaczynały się „schody”. Nie zawsze mogłem znaleźć algorytmy do układania tych kostek. Próbowałem więc sam znaleźć sposób na ułożenie bardziej skomplikowanych „brył Rubika”. Czasem się udawało (wtedy chodziłem dumny jak paw), a niekiedy niestety nie (i wtedy odkładałem „moje rubiki” na półkę). Potem oczywiście do nich wracałem i próbowałem znowu. I znowu, i znowu ...

Oprócz czysto „naukowych” zainteresowań fascynuje mnie żonglerka. Odkąd Tata nauczył mnie żonglować dwoma jabłkami (oj dużo się obilo i nadawało się tylko na kompot, albo nawet na kompost) minęło już sporo czasu i teraz żongluję już czterema piłeczkami (uczę się pięcioma) oraz trzema obręczami i taką samą liczbą maczug. Trzema piłeczkami umiem już żonglować na kilka różnych sposobów. Kiedyś 1 czerwca był u nas w parku festyn na Dzień Dziecka. Był tam klaun, który żonglował. Kiedy dał mi do ręki trzy piłeczki i powiedział, żebym spróbował, pokazałem co potrafię. Ja żonglowałem, dzieci tańczyły w koło i klaskały, a klaun patrzył zdumiony. Potem powiedział mi, że mógłby się ode mnie uczyć. Byłem dumny.

W poprzednim roku, gdy nauczycielka matematyki zaproponowała mi udział w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych, największy kłopot miałem z wyborem tematu. Pamiętam, że bardzo się nad tym męczyłem. Gdy na zakończenie roku moja Pani zapytała się, czy będę chciał uczestniczyć w następnym konkursie – powiedziałem, że oczywiście. Ale na jej pytanie o temat pracy, nie mogłem odpowiedzieć. Postanowiłem, że już w wakacje będę się nad tym zastanawiał. Ale bez przesady, nie przez całe wakacje ☺. Po napisaniu poprzedniej pracy o nieskończoności fascynowały mnie szeregi i ciągi liczbowe. Myślałem, że pójde tą drogą. Przeczytałem książkę o ciągu Fibonacciego (A.S. Posamentier, I. Lehmann *Niezwykłe liczby Fibonacciego*), potem książkę o liczbie PI (A.S. Posamentier, I. Lehmann *PI Biografia najbardziej tajemniczej liczby na świecie*), ale jakoś „nie czułem” tematu. Postanowiłem odłożyć decyzję na później. Ostatecznie były wakacje i co innego miałem na głowie. Pewnego razu wracając z rodzicami z plaży zauważyłem w witrynie sklepu, obok którego przechodziliśmy, standardową kostkę Rubika. Okazało się, że oprócz normalnej, mają tam całą gamę innych kostek. Chodziliśmy więc tam co jakiś czas i kupowaliśmy kolejnego „rubika”, a ja starałem się znaleźć algorytmy do jego ułożenia. I znowu podobnie jak w domu, czasami się mi udawało, a czasami nie. Na szczęście tych pierwszych przypadków było dużo więcej. Przy opracowywaniu rozwiązań zawsze zastanawiałem się, ile jest możliwych układów kostek. Czy nie znając żadnych algorytmów, a stosując tylko zupełnie przypadkowe ruchy, mógłbym ją ułożyć. Oczywiście, po napisaniu pracy o nieskończoności, wiedziałem, że gdybym nie miał ograniczenia czasowego, to wcześniej, czy później kostka zostałaby ułożona.

I wtedy wpadłem na pomysł na temat mojej pracy:

MATEMATYKA KOSTKI RUBIKA

Zacząłem się zastanawiać co mogłoby się kryć pod tym pojęciem. Oczywiście ilość możliwych układów różnych kostek (jak to obliczyć?). A może jest coś więcej? Zobaczmy!

Po powrocie z wakacji zacząłem szukać źródeł, z których mógłbym skorzystać. O książkach mogłem zapomnieć. Były oczywiście wydania o kostce Rubika, ale wszystkie opisywały różne metody układania kostek. To samo dotyczyło Internetu. Większość znalezionych prac/filmów odnosiła się do algorytmów, tylko niektóre w sposób dosyć pobieżny traktowały o „matematyce”. Spróbować? Czemu nie? A jak mi wyjdzie – zobaczmy!

Historia Kostki Rubika



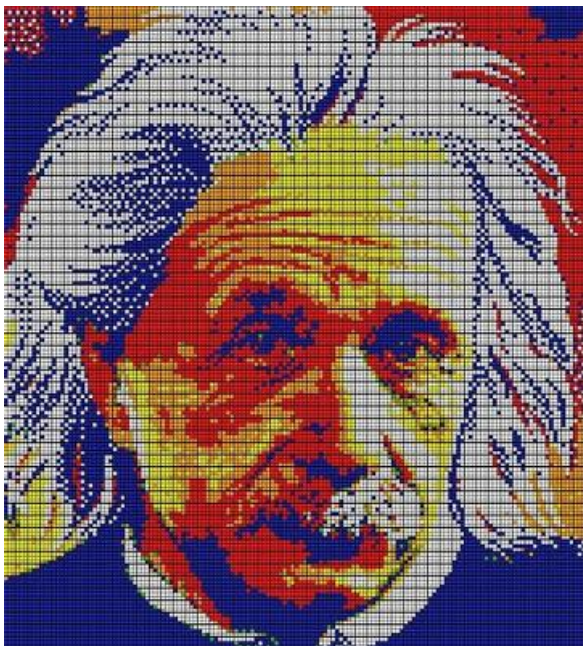
Twórca tej zabawki - **Erno Rubik** - był profesorem architektury Budapeszteńskiej Akademii Sztuki Użytkowej. Aby pomóc swoim studentom zrozumieć przestrzeń w 1974 roku wymyślił kostkę. Ta z pozoru banalna łamigłówka (sześć kolorów, które należy ułożyć razem) okazała się dla większości osób zbyt trudna. Sam Erno pierwszą kostkę układał miesiąc. Jednak po znalezieniu odpowiednich algorytmów (takie szablony ruchów) można było układać kostkę już w kilka minut. Ludzie zaczęli się interesować tym nowym „wynalazkiem”. Zaczęli rywalizować między sobą, kto ułoży kostkę najszybciej albo w najmniejszej liczbie

ruchów. Pierwsza partia kilku tysięcy kostek trafiła do węgierskich sklepów przed Bożym Narodzeniem 1977 roku i rozeszła się natychmiast.

Rok później w Budapeszcie powstał klub kostki Rubika¹. Na pierwszym spotkaniu pojawiło się ponad 2000 osób. Na Węgrzech sprzedano 300 tysięcy łamigłówek w trakcie dwóch pierwszych lat. W 1978 roku, Tamas Varga, węgierski profesor matematyki, a zarazem entuzjasta zabawki Rubika, wziął ze sobą kilka sztuk na międzynarodowy kongres matematyków w Helsinkach. Rozdał je znajomym z zagranicy. Jakież było jego zdziwienie, gdy właściwie od wszystkich otrzymał prośbę o nadesłanie większej ilości, wraz z instrukcjami jej układania. W 1980 roku w porannym programie telewizji BBC pokazano młodych ludzi układających kostkę na czas. W kilka dni później kostka Rubika była już najbardziej rozchwytywanym towarem w sklepach z zabawkami. Rozpoczął się prawdziwy szal. Kostka Rubika miała swój złoty okres w latach 80-tych XX w., później trochę o niej zapomniano, czasami robiło się głośno, czasami cisza trwała latami. Jednak trafiła na zaszczytne miejsce przedmiotów, które właściwie rozpoznaje każdy człowiek na Ziemi.

¹ <https://kostkarubika.net/>

Jeżeli chodzi o rekordy w układaniu kostki to pierwszy zanotowany wynik układania kostki Rubika 3x3x3 z 1980 roku wynosił 54 sekundy. W 1982 roku zorganizowano pierwsze mistrzostwa, gdzie poprawny układ pól ułożono w 22,95 sekundy. Pierwsze ułożenie Kostki



Rubika w czasie poniżej 10 sekund w historii miało miejsce 5 maja 2007 roku, a dokonał tego Francuz Thibaut Jacquinot (9,86 s.) W tej chwili rekord (4,69s) należy do Patricka Ponce z USA².

Ale kostki Rubika to nie tylko układanie na czas. Są ludzie, którzy z kostki Rubika tworzą piękne obrazy. Ostatnio w polskiej edycji programu The Brain, Genialny Umysł – Adam Polkowski tworzył niewiarygodne portrety.

Do rozwiązywania łamigłówek Rubika stosowane są przeróżne algorytmy. Poniżej podaję kilka z nich (takich podstawowych), a że same sposoby rozwiązywania kostek nie są tematem niniejszej pracy zainteresowanych oznaczeniami odsyłam np. do strony: kostkarubika.net/3x3x3/podstawy.html lub dla bardziej dociekliwych: www.cyotheeking.com.

Pierwsze układamy krzyż (intuicyjnie), następnie dwie pierwsze warstwy (najlepiej intuicyjnie, ale są też proste algorytmy). A następnie korzystamy z uproszczonych algorytmów OLL: $R\ U\ R'\ U\ R\ U^2\ R'$; $F\ (R\ U\ R'\ U')\ F'$; a potem korzystamy z algorytmów PLL: $(R'\ U\ R'\ U')\ (R'\ U'\ R'\ U)\ (R\ U\ R^2)$; $R'\ F\ R'\ B^2\ R\ F'\ R'\ B^2\ R^2$

Rekordziści, którzy układają kostki w kilka sekund muszą się nauczyć kilkuset algorytmów (!).

² <https://www.worldcubeassociation.org>

Kombinatoryka

Aby móc obliczać ilości różnych ułożeń kostki Rubika należy zgłębić tajniki kombinatoryki. Czym jest kombinatoryka? Jest to dział matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: "ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?", "Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 28 osobowej?", itp. Powstała ona dzięki grom hazardowym. W 1563 Girolamo Cardano pisze „Księgę o grze w kości”, w której po raz pierwszy podjął się zadania określenia szans na wygraną w tej grze. Galileusz w „Rozważaniu nad grą w kości” przeprowadza analizę wyników rzutu kilkoma kostkami. Blaise Pascal używa pojęcia kombinacja (combinaison) oraz symbolu **notacji** użyje Euler dopiero C_n^k $\binom{n}{k}$ w pracy z roku 1778. Później swój rozwój kombinatoryka zawdzięcza przede wszystkim rachunkowi prawdopodobieństwa.

Jak to zwykle w matematyce bywa wszystko to, co odkrywali europejscy uczeni było znane od stuleci w świecie islamu (Al Halil Ibn Ahmad (718-786) Abu Yusuf Yaqub Al-Kindi (VIII/IX w.)).

Tyle historia, teraz zajmijmy się tym, co kryje się za pojęciem kombinatoryki. Jak wspomniałem wcześniej z pomocą kombinatoryki możemy obliczyć np. na ile możliwych sposobów można ułożyć kostki domina, ile jest możliwości przy rzucie dwoma kostkami do gry itp. Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami. Na szczęście nie trzeba pamiętać tych wszystkich wzorów, aby szybko i skutecznie rozwiązywać zadania z kombinatoryki. Do rozwiązywania większości zadań w zupełności wystarcza reguła mnożenia i wzór na kombinację.

Reguła mnożenia przydaje się podczas rozwiązywania wielu zadań z kombinatoryki. Weźmy na przykład takie zadanie: Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia? W pierwszym rzucie może nam выпаść Orzeł lub Reszka – czyli są dwie możliwości. W drugim (a także trzecim i każdym następnym) również mamy dwie możliwości (O i R). Możemy więc powiedzieć, że w pierwszym rzucie mamy dwie możliwości i w drugim rzucie mamy dwie możliwości i w trzecim rzucie mamy dwie możliwości. W regule mnożenia zawsze spójnik i zamieniamy na znak mnożenia. A więc w tym zadaniu mamy $2 * 2 * 2 = 8$, czyli 2^3 . Mamy osiem możliwości. Podobnie, gdy rzutów monetą będzie 10 to otrzymamy wynik 2^{10} . Jeżeli zamiast monetą będziemy rzucać sześcienną kostką do gry to przy np. pięciu rzutach będziemy mieli 6^5 różnych możliwości.

Podobnie regułę mnożenia możemy zastosować np. do określenia ilości możliwych rejestracji samochodowych (nie bierzemy pod uwagę województw) składających się dla przykładu na początku z trzech liter ze zbioru A-Z (bez polskich znaków), a następnie z pięciu cyfr od 0-9. Zbiór liter zawiera 26 elementów (wliczamy Q i V), natomiast zbiór cyfr zawiera 10 elementów (0-9). Zdarzeniem elementarnym nazwiemy tu wybranie (wylosowanie) jednego elementu z odpowiedniego zbioru (liter bądź cyfr). Aby obliczyć liczbę możliwych rejestracji musimy pomnożyć przez siebie ilość możliwych zdarzeń elementarnych. Pierwsza litera to 26 możliwości, druga i trzecia to samo; pierwsza cyfra to 10 możliwości następnie również. A więc rejestrację składającą się z trzech liter na początku, a następnie z pięciu cyfr możemy ułożyć na: $26*26*26*10*10*10*10*10 = 1\,757\,600\,000$ sposobów.

Z kombinatoryką związane są takie pojęcia jak permutacja, kombinacja i wariacja. Czym to się je? Definicje są dość skomplikowane:

Permutacja jest odwzorowaniem różnowartościowym skończonego zbioru w siebie.

Kombinacja nazywamy każdy podzbiór skończonego zbioru

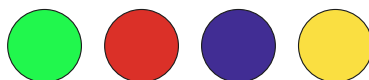
Wariacja to odwzorowanie różnowartościowe podzbioru zbioru skończonego w niego samego

Wariacja z powtórzeniami jest każdym odwzorowaniem podzbioru zbioru skończonego w niego samego

Dla mnie było to za bardzo skomplikowane, więc postanowiłem to sobie uprościć i zrozumieć te pojęcia na przykładach.

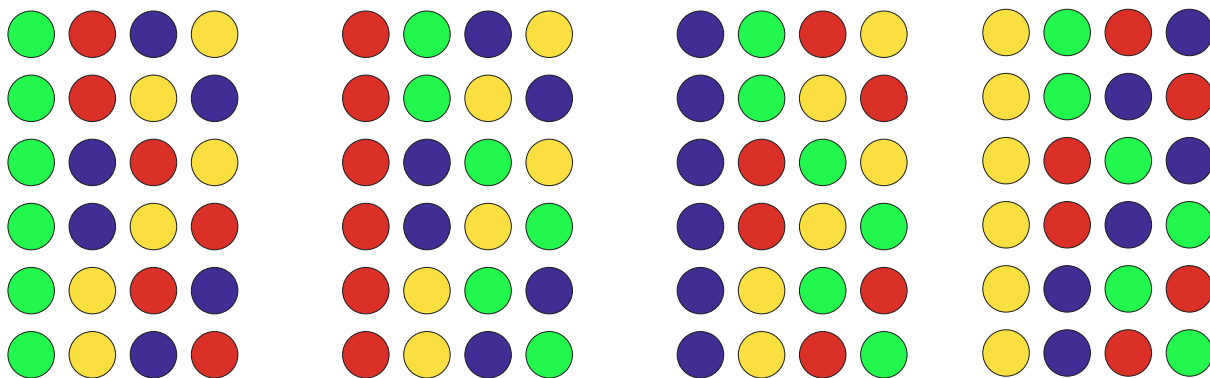
Permutacja

Mamy z nią do czynienia, gdy określamy liczbę **wszystkich ciągów**, jakie możemy utworzyć z **wszystkich elementów** danego zbioru. Na przykład mamy cztery różnokolorowe kulki (zielona, czerwona, niebieska i żółta) i pytamy na ile możliwych sposobów możemy te wszystkie cztery kule ułożyć w szeregu.



Okazuje się, że liczba ta wynosi $1*2*3*4$ czyli $4!$ [silnia, $n! = 1*2*3 \dots (n-1)*n$], a więc są 24 takie układy.

Sprawdźmy:



Kluczowa jest tutaj liczba elementów zbioru oraz to, że za każdym razem układamy ciąg ze wszystkich elementów zbioru, a więc nie możemy użyć dwa razy tego samego elementu. Zauważmy także, że układamy ciąg kulek, a więc ważna jest kolejność. Ogólnie liczbę permutacji (P) zbioru n-elementowego możemy przedstawić za pomocą wzoru:

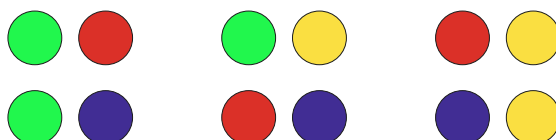
$$P_n = n!$$

Kombinacja

Mówimy o niej, jeżeli z jakiegoś zbioru wybieramy jego podzbiór. Weźmy poprzedni przykład z czterema kulkami. Pytamy teraz na ile różnych sposobów możemy wyciągnąć dwie z pośród czterech kulek, przy czym **nie ważna jest kolejność** wyciąganych kulek. Tutaj wzór jest bardziej skomplikowany niż w przypadku permutacji. Mamy przecież dwie wielkości: liczba elementów zbioru i liczba elementów podzbioru, który wybieramy. Zwróćmy uwagę, że w przypadku permutacji mówiliśmy o ciągu (ważna jest kolejność), natomiast tutaj mówimy o podzbiorze (kolejność nie jest ważna). W naszym przypadku wyboru dwóch z czterech kolorowych kulek mamy:

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4}{1 * 2 * (1 * 2)} = \frac{24}{4} = 6$$

Sprawdźmy:



Ogólnie liczbę k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego (czyli liczbę możliwych k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego) możemy przedstawić wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Wariacja (bez powtórzeń)

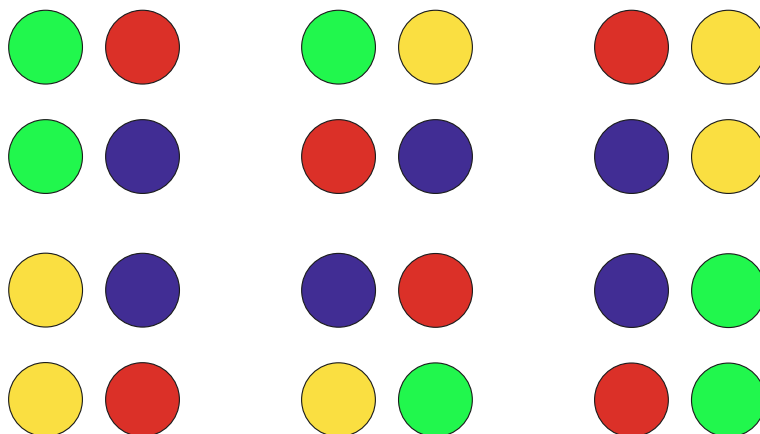
Z tym pojęciem mamy do czynienia, gdy tworzymy ciąg z elementów danego zbioru, ale ciąg nie musi składać się ze wszystkich elementów zbioru. Widzimy tu pewne podobieństwo do permutacji – tworzymy ciąg (ważna jest kolejność) elementów ze zbioru; oraz do kombinacji – tworzony ciąg nie musi zawierać wszystkich elementów głównego zbioru. Jeżeli jednak powstały ciąg ma składać się ze wszystkich elementów zbioru to mamy do czynienia z permutacją. Zwrot „bez powtórzeń” oznacza, że żaden element w tworzonym ciągu nie może się powtarzać (tzn. raz wybrany „nie wraca” już do zbioru, z którego losujemy następne).

W naszym przykładzie pytamy teraz na ile różnych sposobów możemy wyciągnąć dwie z spośród czterech kulek, przy czym **ważna jest kolejność** wyciąganych kulek. Od razu widzimy dużą zbieżność z kombinacjami, opisanymi wcześniej. Jedyna różnica polega na tym, że w przypadku wariacji ważna jest kolejność elementów. W naszym przypadku ilość możliwych ułożeń kulek powinna być dokładnie dwa razy większa od ilości kombinacji (w poprzednim przykładzie układ kulek np. {zielona, czerwona} i {czerwona, zielona} brany był jako jeden, w przypadku wariacji są to dwa układy). Ilość możliwych wyborów dwóch z spośród czterech kolorowych kulek, gdzie ważna jest kolejność wynosi:

$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4}{1 * 2} = \frac{24}{2} = 12$$

Zgodnie z intuicją wariacji bez powtórzeń w naszym przykładzie jest dokładnie dwa razy więcej niż kombinacji.

Sprawdźmy



Ogólnie liczbę k -elementowych ciągów bez powtórzeń zbioru n -elementowego możemy przedstawić wzorem:

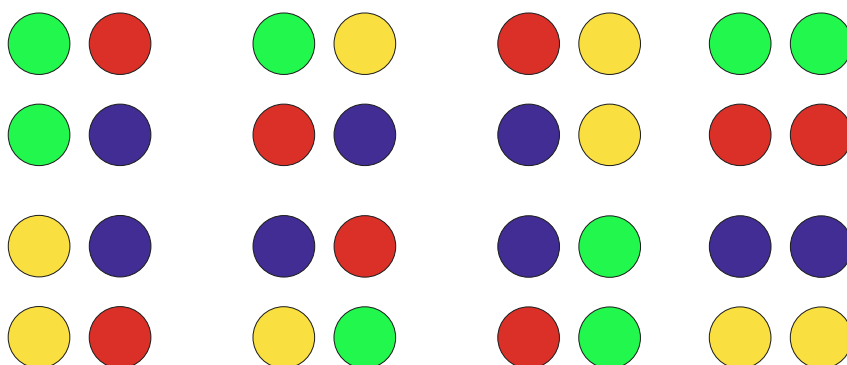
$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wariacja (z powtórzeniami)

Podobnie jak w przypadku wariacji bez powtórzeń tworzymy ciąg z elementów danego zbioru, ale nie musi on składać się ze wszystkich elementów zbioru. Różnica polega na tym, że ten sam element zbioru może być wykorzystywany wielokrotnie. Powróćmy do naszego przykładu: wyciągamy po kolei dwie kule z czteroelementowego zbioru, ale w tym przypadku po wyciągnięciu pierwszej kuli zapisujemy wynik, a następnie „wrzucamy wyciągniętą kulę do worka”. Ilość możliwych układów obliczymy:

$$4^2 = 16$$

Sprawdźmy:



Ogólnie liczbę k-elementowych ciągów z powtórzeniami zbioru n-elementowego możemy przedstawić wzorem

$$W_n^k = n^k$$

No teraz to wydaje się dużo prostsze niż tylko po przeczytaniu definicji. Zawsze, jeżeli jakiegoś pojęcia nie rozumiem, to staram się znaleźć przykłady opisujące to pojęcie i wtedy (oczywiście nie zawsze) okazuje się to dużo prostsze.

Kombinatoryka wiąże się nieodłącznie z tzw. rachunkiem prawdopodobieństwa. Ta dziedzina matematyki odpowiada na pytanie „jaka jest szansa, że dane zdarzenie nastąpi?” (oczywiście w wielkim uproszczeniu). W wielkim skrócie można powiedzieć, że prawdopodobieństwo klasyczne to stosunek ilości zdarzeń, o które nam chodzi do wszystkich możliwych zdarzeń. I znów biorąc nasz przykład z czterema kolorowymi kulkami, możemy zadać pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, że losując dwie kulki z czterech (wyciągając kulki po kolei i z powrotem je zwracając) wyciągniemy dwie kule tego samego koloru. Jak widzimy na rysunku powyżej wszystkich zdarzeń (możliwych układów 2 z 4 kulek) jest 16, natomiast takich układów, w których występują dwie kulki tego samego koloru jest tylko 4. Więc prawdopodobieństwo wylosowania 2 kulek tego samego koloru wynosi $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Ale prawdopodobieństwo nie przyda nam się przy obliczaniu ilości możliwych układów w kostce Rubika więc nie będziemy się tu nim zajmować. Napisałem te kilka zdań o prawdopodobieństwie, żeby zaznaczyć, że kombinatoryka nieodłącznie wiąże się z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Kostka Rubika

Terminologia

narożnik	krawędź	narożnik
krawędź	środek	krawędź
narożnik	krawędź	narożnik

Jako, że pewne określenia dotyczące kostki Rubika mogą wprowadzać w błąd wytrawnego matematyka (krawędzie, środki) obok przedstawiam takie dwuznaczne określenia. Dla każdej ścianki w łamigłówce 3x3x3 mamy trzy rodzaje klocków:

Środek – jeden dokładnie na środku ściany.

Narożniki – cztery w czterech rogach ściany

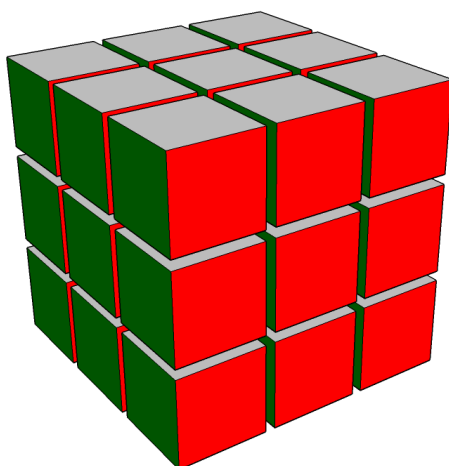
Krawędzie – cztery – na środkach boków pomiędzy krawędziami

Dla większych kostek lub łamigłówek o kształtach innych niż sześciany te definicje będą trochę inne, ale intuicyjnie bazując na powyższych określeniach będziemy określać podobnie.

W trakcie pracy zamiennie stosowałem sformułowania ilość możliwych ułożeń i ilość kombinacji, wiedząc oczywiście, że w matematycznym sensie nie są one tożsame, a liczba ułożeń czasami ma więcej wspólnego z wariacjami i permutacjami niż z kombinacjami

3x3x3

Standardowa kostka Rubika to sześcián podzielony wzdłuż każdej krawędzi na trzy części. A więc czysto teoretycznie (nie biorąc pod uwagę budowy kostki) składa się $3 \times 3 \times 3 = 27$ małych sześciáników, które mają pokolorowane ścianki na 6 kolorów (biały, żółty, zielony, niebieski, pomarańczowy, czerwony).

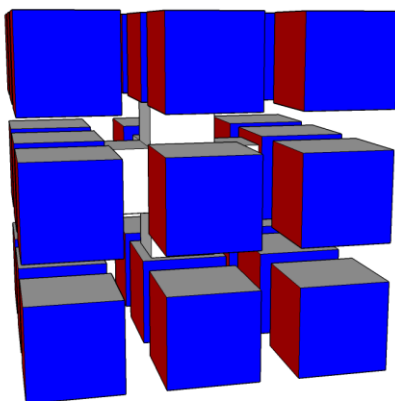


Jak obliczyć ilość możliwych ułożeń takiego sześcianu? Zobaczmy: każda z 27 małych kosteczek może być ułożona na sześć różnych sposobów. Czyli pierwszy sześcianik możemy ułożyć na 6 sposobów i drugi możemy ułożyć na 6 sposobów i trzeci również na 6 i ... dwudziesty siódmy także na 6 sposobów. Przypomina nam to coś? Oczywiście! Regułę mnożenia opisaną wcześniej. A więc liczba wszystkich możliwych układów takiej „teoretycznej kostki” to

$$6^{27} = 1,02 * 10^{21}$$

możliwości. Jest to ogromna liczba, ale aby zobrazować jej wielkość użyjmy przykładów. **[Obliczenia 1]** Gdyby ułożono kostki jedna na drugiej w ilości odpowiadającej powyższej liczbie to wyszłoby prawie 390mln razy więcej niż odległości naszej planety od Słońca. Mało? Dobrze jeszcze jedno porównanie odległości. Gdyby u podstawy naszej wieży zapalić latarkę, to promień światła dotarłby do jej drugiego końca po ponad 6 tysiącach lat!!!! Na tych przykładach widać jak wielka jest liczba możliwości ułożenia takiej czysto teoretycznej kostki.

Dlaczego teoretycznej? Gdyż nie uwzględnia budowy wewnętrznej kostki Rubika. Po pierwsze prawdziwa kostka nie ma wewnętrznego sześcianika. Ma nie 27 a 26 małych kosteczek. W środku znajduje się tzw. krzyżak



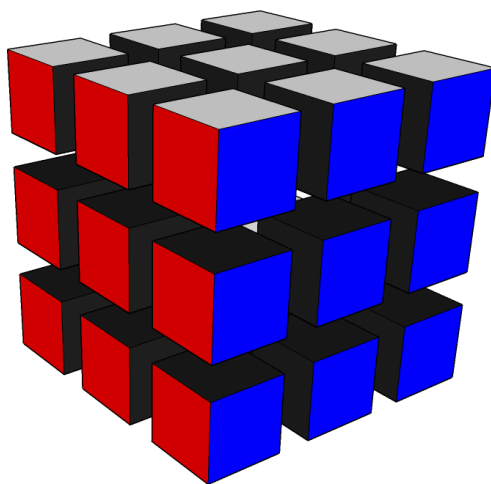
Jeżeli jest mniej małych sześcianików, to jest mniej wszystkich możliwych układów. Ile razy mniej? Brak jednego klocka, więc ilość układów wynosi

$$6^{26} = 1,70 * 10^{20}$$

Czyli sześć razy mniej. To dalej olbrzymia liczba.

[Obliczenia 2] Biorąc pod uwagę poprzednie przykłady, wieża z takiej ilości kostek miałaby długość większą od odległości Ziemi od Słońca około 65 mln razy, a światło z jednego krańca do drugiego biegłoby około tysiąca lat.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej kostce Rubika. W przykładach powyżej wszystkie kosteczki były takie same (sześciokolorowe sześcianiki). Natomiast w prawdziwej kostce Rubika wszystkie jej elementy są różne. Dlaczego? Otóż tylko boki klocków, które „wychodzą” na zewnątrz są pokolorowane, w któryś z sześciu kolorów. Natomiast ściany zwrócone do wewnątrz mają kolor neutralny (tutaj czarny).



Kostkę możemy rozłożyć na 26 różnych klocków:



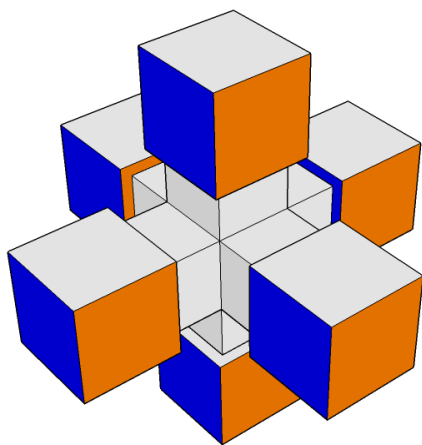
Przyjmijmy na razie, że każdy z tych elementów możemy umieścić w kostce Rubika w dowolnym miejscu (jest ich 26). Ile będzie możliwych układów przy takich założeniach? Na pewno ma zastosowanie liczba podana wcześniej, czyli 6^{26} , ale to nie wszystko. Zauważmy, że na rysunku powyżej, elementy rozłożonej kostki ustawiliśmy ciąg, który możemy mieszać (przy założeniu przyjętym wyżej, że dowolna kostka może być w każdym miejscu). Oczywiście jest to permutacja. A więc wykorzystując metodę mnożenia ogólna ilość układów takiej specyficznej kostki wynosi:

$$6^{26} * 26! = 6,88 * 10^{46}$$

Przy tak ogromnej liczbie nasze przykłady także wymykają się naszemu pojmowaniu, ale gdyby ktoś chciał zobaczyć, ile lat promień światła biegłby od jednego do drugiego końca wieży ułożonej z takiej ilości kostek Rubika odsyłam do **[Obliczenia 3]**. Dodam tylko, że nasza wieża nie

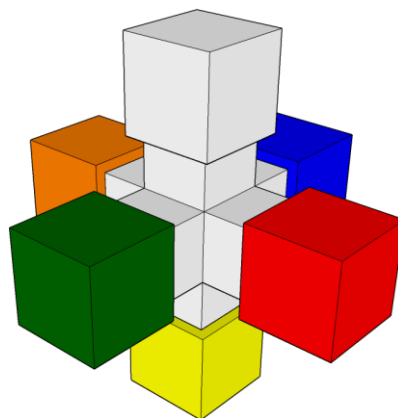
zmieściłaby się w znanym nam wszechświecie (szacowana średnica wszechświata to około 92 mld lat świetlnych)

Oczywiście takie rozważania i obliczenia są czysto teoretyczne. Dlaczego? Każdy, kto kiedyś rozbierał kostkę Rubika wie, że poszczególne elementy pasują tylko w pewne ściśle określone miejsca. A niektórych w ogóle nie można „oderwać” od mieszczącego się we wnętrzu kostki krzyżaka.



Zacznijmy w takim razie ograniczać ilość możliwych kombinacji ułożeń kostki Rubika. Będziemy po kolei wykorzystywać pewne właściwości budowy kostki, aby zmniejszyć liczbę możliwych ułożeń. Rozpocznijmy od środków ścian. W sześciannie mamy sześć ścian, tak też jest w naszej kostce. Jeżeli rozbierzemy na części naszą łamigłówkę, zobaczymy, że środki ścian są na stałe przymocowane do krzyżaka.

Tak wyglądałoby to w teoretycznej kostce, gdzie każdy z małych sześcianników jest sześciokolorowy. W prawdziwej kostce Rubika środki ścian mają tylko jeden kolor (kolor ściany) – tylko jedna ścianka jest widoczna, pozostałe są ukryte i nigdy nie biorą udziału układaniu kostki. Tak więc wycinek prawdziwej kostki wyglądałby tak:



Tak naprawdę to małe sześcianniki w prawdziwej kostce Rubika mają pomalowaną tylko zewnętrzną ściankę, reszta jest w kolorze neutralnym (np. w czarnym). Na rysunku przedstawiłem to tak, aby jeszcze bardziej pokazać, że sześć z pośród 26 kosteczek jest jednokolorowych.

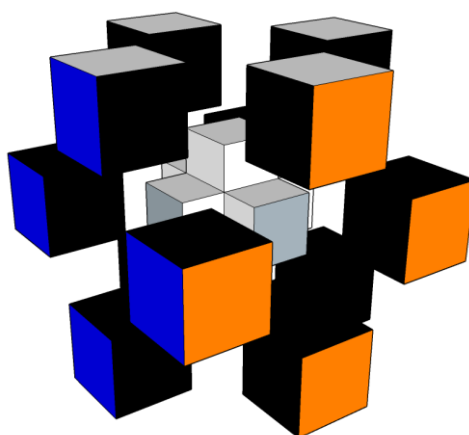
Znowu więc możemy wykluczyć następne kosteczki z naszej układanki. Mamy w tym przypadku stały krzyżak z sześcioma jednokolorowymi kostkami i 20 sześciannikami w sześciu kolorach. Mamy więc tak jak dotychczas liczyliśmy 6^{20} możliwych układów sześciokolorowych kostek, które

możemy ułożyć w 20 możliwych miejscach (27 -1 [klocek centralny] – 6 [środki ścian przymocowane na stałe do krzyżaka] = 20). A więc ilość kombinacji zmniejszyła się nam do:

$$6^{20} * 20! = 8,90 * 10^{33}$$

[Obliczenia 4] Podobnie jak wcześniej jest to tak ogromna liczba, że nawet przykłady z latami świetlnymi nie są w stanie oddać jej wielkości. I tak samo wieża nie zmieściła by się w znanym nam wszechświecie.

Jak dalej możemy ograniczyć liczbę możliwych układów? Przyjrzyjmy się dokładnie kostce, oprócz sześciu nieruchomych środków ma ona dwanaście dwukolorowych krawędzi:



Kolor czarny jest tutaj kolorem neutralnym. Tak więc od 20 kosteczek (z poprzedniego ograniczania) musimy jeszcze odjąć 12 sześcianików, wprowadzając ruchomych, ale tylko dwukolorowych. Każdy z tych 12 elementów może występować w dwunastu różnych pozycjach. Jaka jest możliwa liczba takich układów? Z dwunastoelementowego zbioru wybieramy także dwunastoelementowe ciągi. Jest to permutacja, więc liczba układów wynosi 12!. Każdy z tych dwukolorowych klocków może występować w dwóch pozycjach (nie bierzemy pod uwagę koloru neutralnego, którym to kolorem klocki są zwrócone zawsze do wnętrza kostki). Pierwszy element ma dwie możliwe pozycje i drugi również dwie i trzeci i czwarty i ... dwunasty ma również dwie pozycje. Kłania się reguła mnożenia, tu ilość możliwych układów wynosi $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^{12}$

Tak więc ogólna ilość układów krawędzi wynosi $12! * 2^{12}$

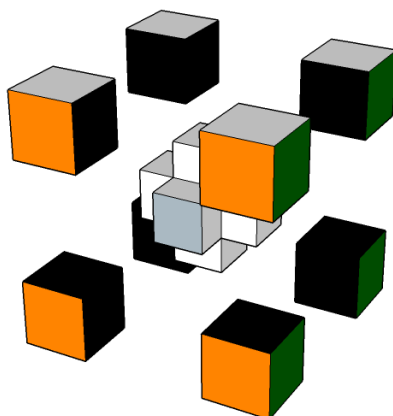
Z 27 elementów „ruchomych” elementów zesłaliśmy w tym momencie do 8 (1 centralnego – brak; 6 środków jest nieruchomych; 12 krawędzi może zająć tylko określone pozycje). Pozostaje nam więc tylko 8 dowolnie ruchomych (na razie) klocków. Tak więc liczba możliwych ułożeń kostki to

$$6^8 * 8! * 2^{12} * 12! = 1,33 * 10^{23}$$

Teraz udało nam się ograniczyć ilość kombinacji o rząd 10^{10} , a więc bardzo dużo.

[Obliczenia 5] Powracając do naszych przykładów wieża byłaby większa 50 000 000 000 razy od odległości Ziemi od Słońca, a promień światła wędrowałby od jednego krańca wieży do drugiego nieco poniżej 800 000 lat.

Pozostałe osiem klocków to tzw. narożniki



Podobnie jak przy rysunku z krawędziami kolor czarny jest tutaj kolorem neutralnym. Narożniki mają tylko trzy kolory. Obliczamy podobnie jak przy krawędziach: mamy osiem narożników i możemy je rozmieścić w ośmiu różnych lokalizacjach (permutacja, czyli liczba możliwych układów to $8!$); każdy z trzykolorowych narożników może przyjąć trzy różne orientacje (liczba możliwych układów to 3^8). Otrzymujemy więc ogólną liczbę możliwych układów w kostce Rubika:

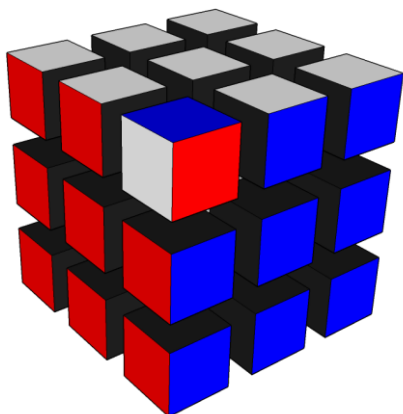
$$12! * 2^{12} * 8! * 3^8 = 5,19 * 10^{20}$$

[Obliczenia 6] Wieża zbudowana z takiej ilości kostek Rubika miałaby wysokość prawie 200 milionów razy większą niż odległość Ziemi od Słońca, a promień światła biegłby wzdłuż niej 3115 lat.

Czy to już koniec obliczeń? Wydaje się, że tak. Opisałem już wszystkie rodzaje klocków w kostce:

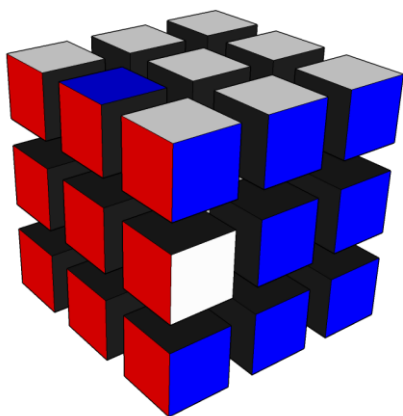
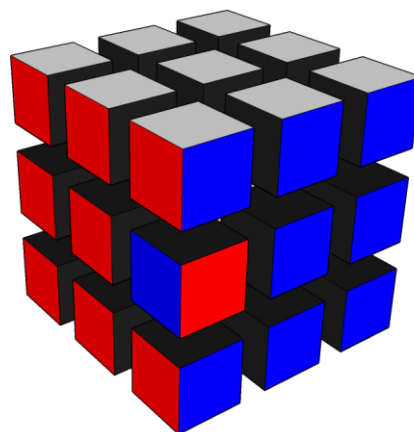
- nieruchome, jednokolorowe środki (6);
- ruchome (ale mogące zająć tylko 12 różnych pozycji), dwukolorowe krawędzie (12)
- ruchome (ale mogące zająć tylko 8 różnych pozycji) narożniki (8).

Z mojej praktyki układania kostek Rubika wiem, że istnieją tak zwane stany niemożliwe. Koledzy w szkole kilka razy dawali mi do ułożenia kostki „specjalnie spreparowane”. Otóż np. wyjmowali z kostki **jeden** z narożników i wkładali go odwróconego, to samo można zrobić z **jedną** krawędzią, albo zamieniali **dwie** dobrze zorientowane krawędzie. Takie kostki są nie do ułożenia. Przy próbie układania wychodzi nam, że np. mamy 7 dobrze ułożonych narożników, a ósmy jest źle zorientowany, albo 11 krawędzi jest OK, a dwunasta nie pasuje, albo 10 krawędzi jest dobrze ułożonych, a dwie pozostałe są zamienione miejscami. Takie ułożenia nazywamy stanami niemożliwymi (bez rozbierania kostki i ręcznego manipulowania klockami).



Można powiedzieć inaczej, że jeżeli mamy siedem narożników dobrze ułożonych to ósmy także musi być dobrze ułożony (ma trzy kolory, czyli jedna pozycja z trzech jest prawidłowa – ilość kombinacji dzielimy przez 3). Taka niemożliwa sytuacja przedstawiona jest na rysunku obok.

Albo jeżeli 11 krawędzi jest OK to dwunasta także musi być dobrze ułożona (te kostki są dwukolorowe, a więc tylko jedna z dwóch pozycji jest prawidłowa – więc dzielimy przez 2)



Albo mamy 10 krawędzi dobrze ułożonych, i pozostałe dwie są dobrze zorientowane, to także one muszą być OK (podobnie jak poprzednio – kostki dwukolorowe – dzielimy przez 2).

Tak więc osiągniętą powyżej liczbę możliwych ułożeń kostki Rubika musimy podzielić na $3 * 2 * 2 = 12$. Czyli na koniec ilość możliwych, różnych ułożeń standardowej kostki Rubika (3x3x3) wynosi:

$$\frac{3^8 * 8! * 2^{12} * 12!}{12} = 4,33 * 10^{19}$$

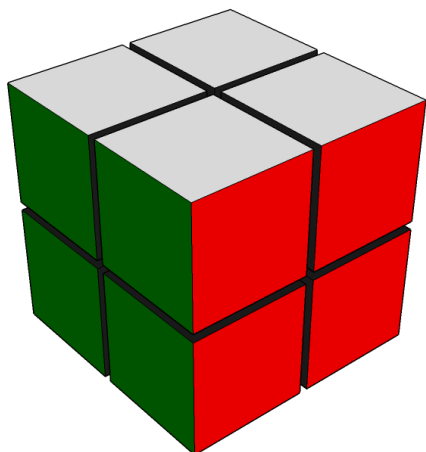
A dokładniej **43 252 003 274 489 856 000**

Uff! Wreszcie koniec obliczeń! Teraz na sam koniec obliczmy, ile rzeczywiście miałyby nasza wieża ułożona z takiej ilości kostek Rubika 3x3x3 **[Obliczenia 7]** Jej wysokość byłaby większa ponad 16 miliona razy od odległości Ziemi od Słońca, a promień światła biegłby od jednego do drugiego jej końca prawie 260 lat.

Mimo, że ograniczaliśmy ilość możliwych ułożeń kostki Rubika 3x3x3 to i tak otrzymaliśmy tak ogromną liczbę, że dopiero przykłady umożliwiły nam jej ogarnięcie. 260 lat świetlnych miałyby wieża ułożona z tak maleńkich kostek (przecież jedna kostka to tylko 57 mm wysokości!). Do najbliższej gwiazdy poza naszym układem (Alfa Centauri) światło podróżuje trochę powyżej 4 lat.

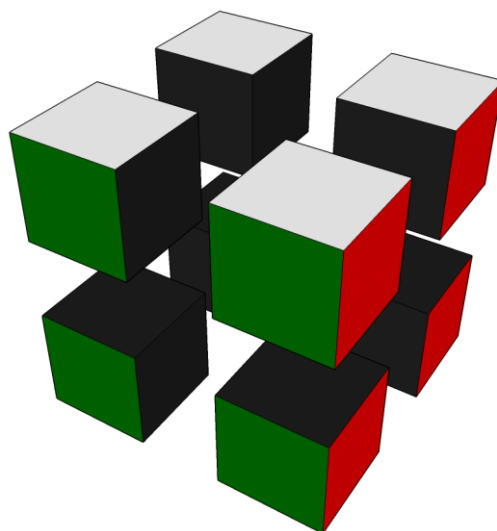
2x2x2

Skoro nabraliśmy już wprawy w obliczeniach to teraz spróbujmy określić liczbę możliwych ułożeń innej kostki Rubika. Trochę mniejszej – mającej wymiar zamiast trzech – dwóch klocków



Nie będziemy przechodzić już tak długiej drogi jak w przypadku kostki 3x3x3. Wiemy przecież już dużo więcej niż na początku. Nauczyliśmy się już określać pewne charakterystyczne części kostki: jednokolorowe, nieruchome środki; dwukolorowe krawędzie i trzykolorowe narożniki. Zobaczmy jak ta wiedza przyda nam się przy obliczaniu możliwych kombinacji ułożeń układanki 2x2x2. Podobnie jak w przypadku jej większej siostry rozbierzemy ją na mniejsze elementy:

Od razu rzuca się nam w oczy, że mała kostka nie posiada wszystkich elementów wymienionych wcześniej. Brak jej krawędzi i środków. Właściwie składa się tylko i wyłącznie z narożników. Dokładnie ośmiu narożników. Przecież coś takiego obliczaliśmy już wcześniej: mamy *osiem narożników i możemy je rozmieścić w ośmiu różnych lokalizacjach (permutacja, czyli liczba możliwych układów to 8!); każdy z trzykolorowych narożników może przyjąć trzy różne orientacje (liczba możliwych układów to 3⁸)* dokładna kopia tekstu z kilku stron wcześniej. Ale przecież nie ma się co dziwić. Kostka 3x3x3 posiada dokładnie tyle samo narożników co jej mniejszy odpowiednik. A więc i obliczenia będą takie same. Ilość możliwych ułożeń ośmiu narożników (a w przypadku kostki 2x2x2 – wszystkich elementów) to:



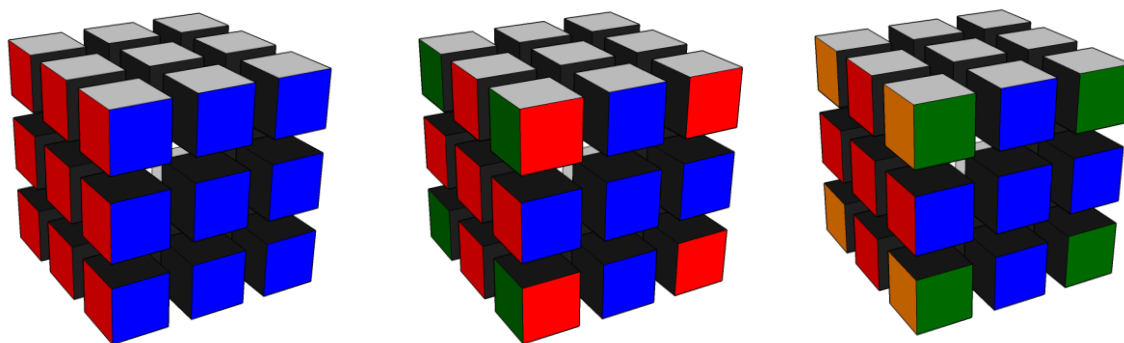
$$8! \cdot 3^8 = 264\,539\,520$$

Czy to wszystko? Oczywiście że nie! W mniejszej kostce także występują sytuacje niemożliwe! Jakie? W większej łamigłówce występowały trzy rodzaje niemożliwości: jedna dotycząca narożników oraz dwie odnoszące się do krawędzi. Skoro w rozpatrywanej kostce są tylko

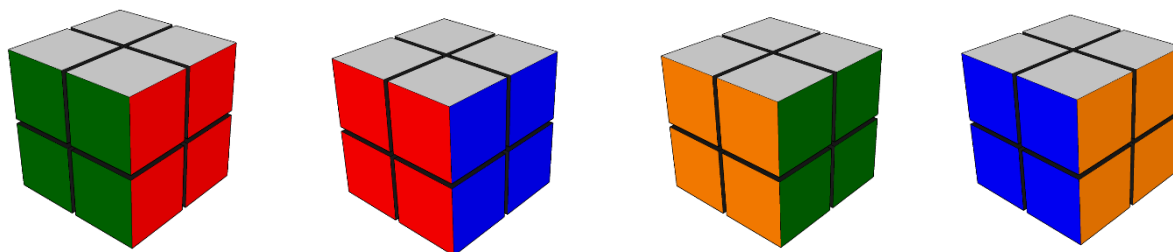
narożniki, więc: *jeżeli mamy siedem narożników dobrze ułożonych to ósmy także musi być dobrze ułożony (ma trzy kolory, czyli jedna pozycja z trzech jest prawidłowa – ilość kombinacji dzielimy przez 3).* Czy liczba możliwych ułożeń zmniejszyła się nam do:

$$\frac{8! * 3^8}{3} = 8! * 3^7 = 88\,179\,840$$

I znowu zadam pytanie: czy to już wszystko? Długo sądziłem, że tak! Na szczęście na biurku miałem jeszcze rozłożoną na czynniki pierwsze kostkę 3x3x3. Były tam: 20 luźnych kosteczek oraz krzyżak z przyczepionymi na stałe 6 środkami. W kostce 2x2x2 nie ma nieruchomych środków, są tylko i wyłącznie ruchome narożniki. Zacząłem się zastanawiać. Wziąłem do ręki kostkę 3x3x3 i zacząłem zmieniać tylko narożniki:



Wszystkie te ułożenia są różne. Natomiast zrobiłem to samo (zmieniałem ułożenia **wszystkich** narożników – czyli po prostu obracałem nią „bez skręcania”) z kostką 2x2x2:



Oczywiście nie poruszyłem żadnym klockiem, po prostu obracałem kostką dookoła pozostawiając białą ścianę „na górze”. Skoro niczym nie poruszyłem to ułożenia klocków względem siebie pozostały identyczne. A przecież wszystkie te ułożenia uwzględniłem w poprzednim wzorze! I tu ujawnia się bardzo ważna różnica pomiędzy kostką 3x3x3 a 2x2x2. (a jak się później okazało pomiędzy kostkami „parzystymi” [2x2x2, 4x4x4 ...] oraz „nieparzystymi” [3x3x3, 5x5x5]) Większa posiada nieruchome – jakby zorientowane w przestrzeni środki. Zmieniając tylko i wyłącznie narożniki, otrzymujemy różne ułożenia kostki. Natomiast w mniejszej łamigłówce brak jest

nieruchomych środków. Obracając kostkę dookoła jednej z jej osi symetrii, mamy na początku narożnik biało-zielono-czerwony przed oczami, za chwilę jest to narożnik biało-pomarańczowo-zielony, następnie biało-niebiesko-pomarańczowy itd. A przecież kostka pozostaje w takim samym ułożeniu. Więc oprócz sytuacji niemożliwej wymienionej wcześniej musimy wykluczyć jeszcze inne sytuacje. Ile ich może być? Mamy sześć ścian i każda może być w czterech stanach (patrz rysunek na stronie poprzedniej). $6 \times 4 = 24$ musimy więc otrzymaną liczbę kombinacji podzielić jeszcze przez 24.

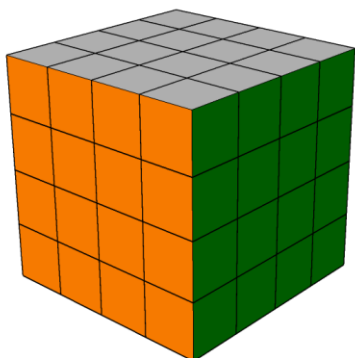
$$\frac{8! * 3^8}{3 * 24} = \frac{8! * 3^8}{72} = \frac{8! * 3^8}{8 * 9} = \frac{8! * 3^8}{8 * 3^2} \\ = 7! * 3^6 = 3\,674\,160$$

Całe szczęście, że miałem rozłożoną kostkę 3x3x3 na biurku. Gdybym jej nie zauważył pewnie popełniłbym błąd.

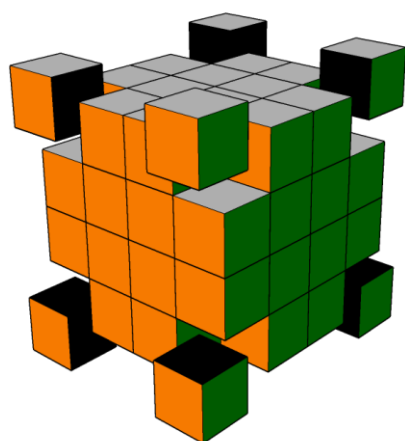
3 674 160 – no to już jest jakaś liczba „do ogarnięcia” Popatrzmy, jak wyglądałaby na naszych przykładach **[Obliczenia 8]**. Dla jakości porównywania w przykładach wykorzystujemy tylko i wyłącznie standardowe kostki 3x3x3. A więc jeżeli z 3 674 160 kostek 3x3x3 ułożymy wieżę to będzie ona miała 209 km. Jest to ok. jednej milionowej odległości Ziemi od Słońca. I chyba nie ma sensu 200 km porównywać do roku świetlnego 😊 (Dociekliwych odsyłam do rozdziału z obliczeniami).

4x4x4

Skoro już obliczyliśmy ilość możliwych kombinacji w kostkach 2x2x2 oraz 3x3x3 spróbujmy przymierzyć się do większej łamigłówki 4x4x4:



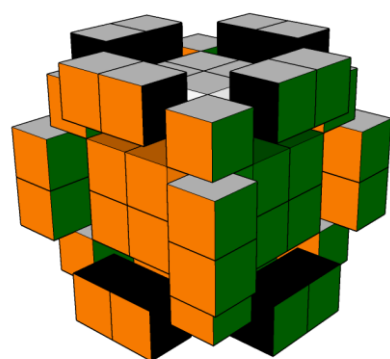
Od razu widać, że pewne charakterystyczne części, które występują w mniejszych kostkach, są także i tu:



Narożniki:

Jest ich **8** trzykolorowych.

Identycznie jak w mniejszych kostkach

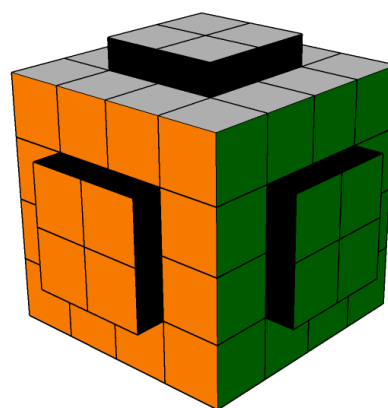


Krawędzie:

Krawędzie (dwukolorowe) także występują, ale jest ich dwa razy więcej, niż w kostce 3x3x3. W mniejszej kostce krawędź stanowiła jedna kostka, tutaj dwie. Klocków stanowiących krawędzie jest **24**

Środki:

Środki (jednokolorowe) także występują, ale podobnie jak w przypadku krawędzi jest ich więcej. W kostce 3x3x3 na każdej ścianie był jeden klocek pełniący tę funkcję. W tym przypadku mamy cztery klocki na każdą ścianę. Jest ich 6 ścian x 4 klocki = **24**



Czyli w sumie mamy $8(\text{narożniki}) + 24(\text{krawędzie}) + 24(\text{środki}) = \mathbf{56}$ klocków

Aby znaleźć zależności pomiędzy układanymi klockami, a szczególnie 3 kosteczkami tworzącymi środki sześciu ścian oraz 2 kostkami tworzącymi każdą z dwunastu krawędzi „oblepiłem” moją kostkę 4x4x4 tak jak na zdjęciu poniżej:



Do dzieła:

Narożniki:

Mamy 8 narożników trzykolorowych, a więc ilość wszystkich możliwych ułożeń, podobnie jak w poprzednich przypadkach, wynosi: $8! \cdot 3^8$, i tak jak poprzednio siedem rogów może być niezależnie obracanych, a orientacja ósmego zależy od pozostałych, więc musimy tę liczbę podzielić przez trzy (3 kolory). Ogólna ilość kombinacji narożników wynosi

$$\frac{8! \cdot 3^8}{3}$$

Krawędzie:

Mamy dwanaście krawędzi po 2 klocki na jedną, co daje nam 24 dwukolorowe klocki.



Ale jak wynika z moich doświadczeń, przedstawionych na rysunku obok, każda z 24 kostek w danym miejscu może posiadać tylko jedną orientację. A więc ilość możliwych ułożeń krawędzi wynosi (permutacja):

24!

Środki:

Mamy $4 \times 6 = 24$ jednokolorowe środki. Skoro są one w jednym kolorze to orientacja zawsze jest taka sama i mamy 24! liczby ułożeń. Ale jeżeli przyjmiemy, że nie zależy nam na ułożeniu środków w takim układzie jak na moim zdjęciu (1,2,3,4) - czyli przyjmiemy, że 4 kostki stanowiące środek są nierozróżnialne to wyżej obliczoną ilość ułożeń musimy ograniczyć. O ile? 4 kostki w środku można ułożyć na $4! = 24$ sposobów.



Środków jest sześć, a więc 24! musimy podzielić przez 24^6

$$\frac{24!}{24^6}$$

I to chyba wszystko. Obliczyliśmy ilość możliwych ułożeń wszystkich rodzajów klocków tworzących kostkę Rubika 4x4x4: narożniki, krawędzie i środki. Teraz te liczby musimy pomnożyć (reguła mnożenia) i ogólna ilość możliwych ułożeń kostki 4x4x4 wynosi:

$$\frac{8! * 3^8 * 24! * 24!}{3 * 24^6}$$

Ale podobnie jak w kostce 2x2x2 tutaj nie mamy ustalonych, nieruchomych środków. Zakładamy oczywiście, że obracanie kostki, bez skręcania jej elementów daje nam identyczne ułożenia.

I znowu musimy otrzymaną liczbę podzielić przez $6 \times 4 = 24$

$$\frac{8! * 3^8 * 24! * 24!}{24 * 3 * 24^6} = \frac{8! * 3^8 * 24! * 24!}{3 * 24^7} =$$

$$\frac{8! * 3^7 * 24! * 24!}{24^7}$$

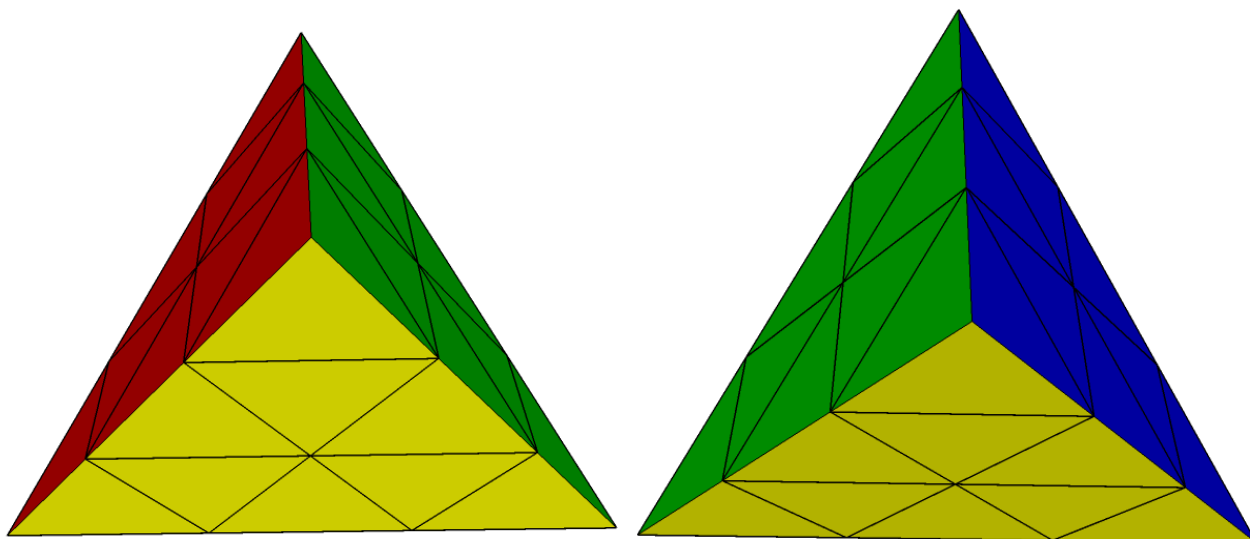
czyli

$$7,40 * 10^{45}$$

I znowu odwołując się do przykładów, aby zobrazować tę liczbę **[Obliczenia9]** światło od jednego krańca wieży do drugiego biegłoby aż $4,44 * 10^{28}$ lat (i to zakładając, że kostka 4x4x4 ma takie same wymiary jak ta 3x3x3). Tu już nawet moje przykłady nie są w stanie zobrazować tak wielkiej liczby.

Pyraminx

Po doświadczeniu zdobytym przy obliczaniu ilości możliwych ułożeń w kostkach sześciennych spróbujemy zmierzyć się z układanką w kształcie piramidy, czyli PYRAMINX.



Jest to czworościan foremny, a więc układanka z czterema kolorami. Zazwyczaj są to: czerwony, niebieski, zielony i żółty. W tym przypadku nie możemy używać prostej kalki z obliczeń układanek w kształcie sześcianu.



O ile przy kostkach sześciennych możliwe ruchy elementów są dla nas intuicyjne (a przynajmniej dla kogoś, kto chociaż raz w życiu próbował ułożyć standardową kostkę Rubika) to przy kostkach czworościennych musimy choć trochę czasu poświęcić ruchom, które można wykonać.

W kostkach sześciennych kolejne ruchy elementów następują „wokół środków”. Natomiast w tym przypadku osią, wokół której obracamy klocki jest prosta zawierająca wysokość czworościanu, czyli prosta (lub odcinek) prostopadła do podstawy przechodząca przez przeciwległy wierzchołek.

Obok widać Pyraminx całkowicie ułożony. Tworzy on czworościan foremny.

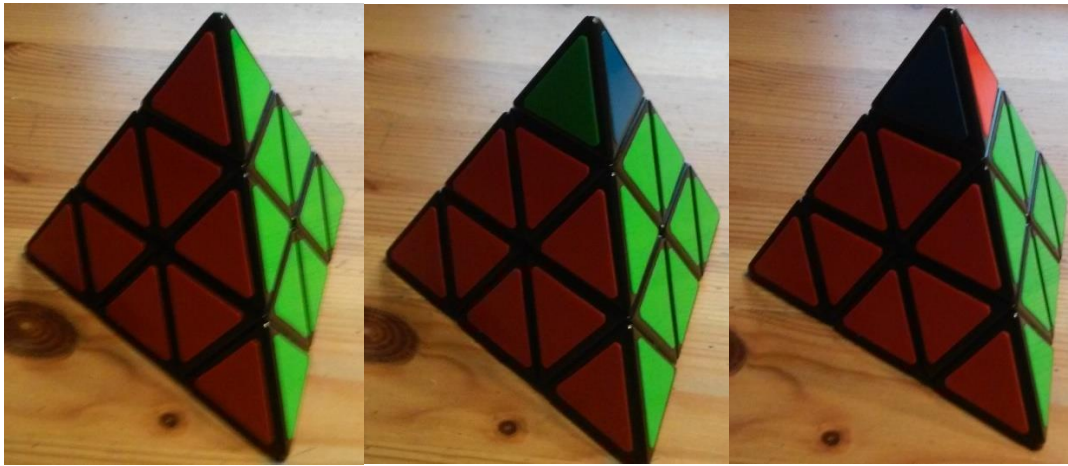
Aby pokazać możliwe ruchy wykonałem każdą z trzech warstw po połowie pełnego obrotu.



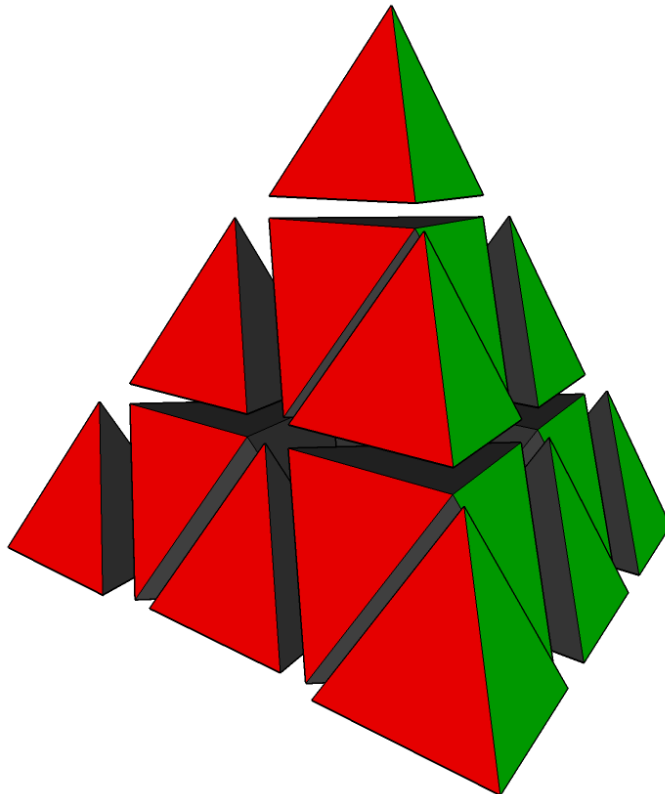
Po dokończeniu ruchów znowu otrzymamy czworościan foremny tworzący kostkę (tym razem już pomieszaną). Pyraminx podobnie jak układanki wcześniej wymienione należą do układane, które nie zmieniają kształtów.

Tak, tak – jest grupa kostek Rubika (i to do tego całkiem liczna), które zmieniają swój kształt.

I jeszcze jedna ciekawa rzecz dotycząca tej łamigłówki. Otóż elementy stanowiące narożniki poruszają się niezależnie od siebie. Każdy z nich (4) można poruszać nie zmieniając położenia pozostałych trzech.

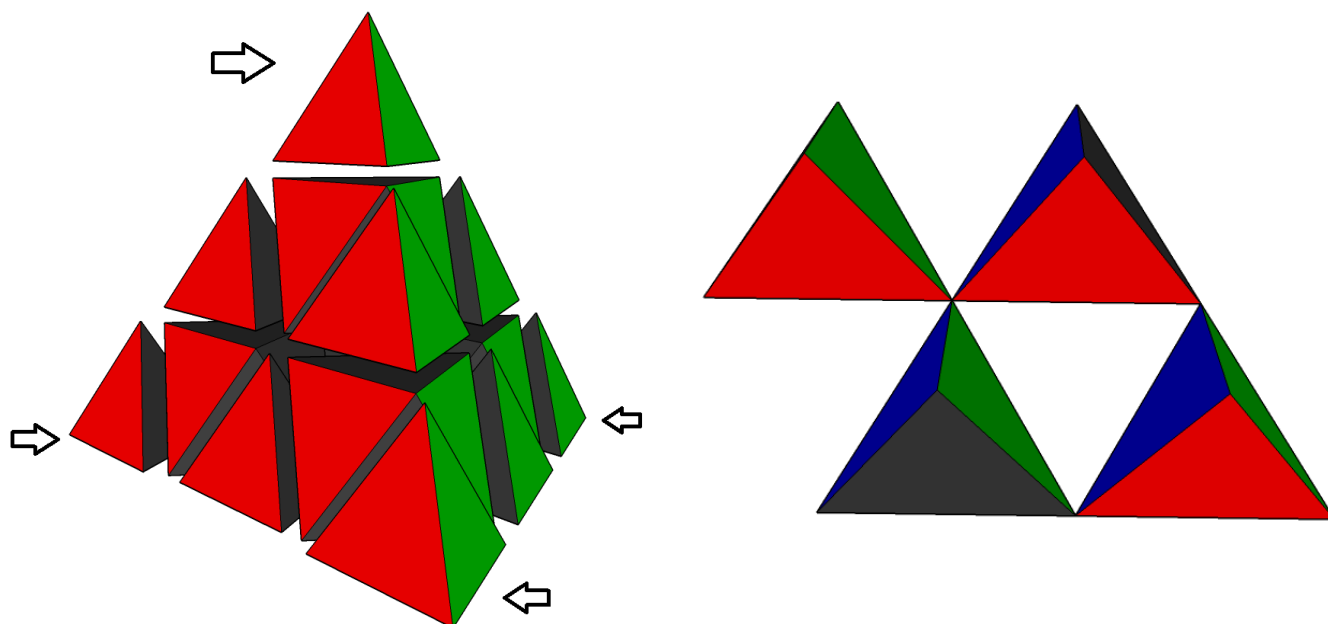


Jest to bardzo istotne przy obliczaniu możliwych kombinacji. Gdy już poznaliśmy (tak z grubsza biorąc zasady poruszania Pyraminxem, musimy przyjrzeć się budowie takiej zabawki.

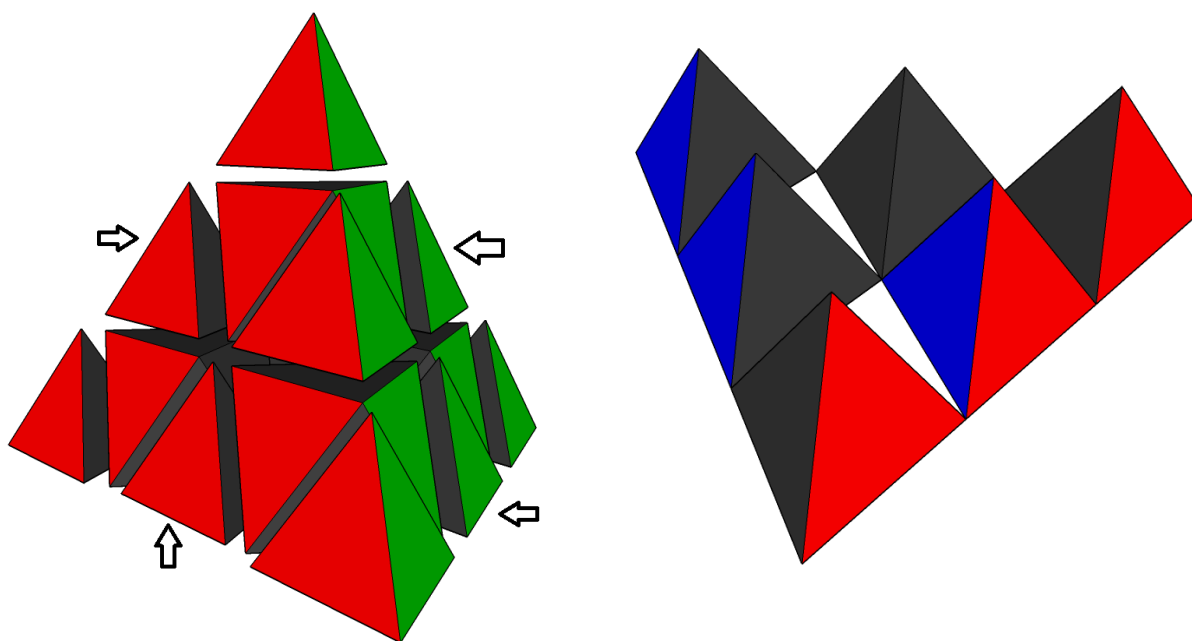


Na początek policzmy z ilu i jakich klocków się składa. Tak jak poprzednio ściany elementów, które zawsze zwrócone są „do środka” pomalowane są kolorem neutralnym (tutaj czarny).

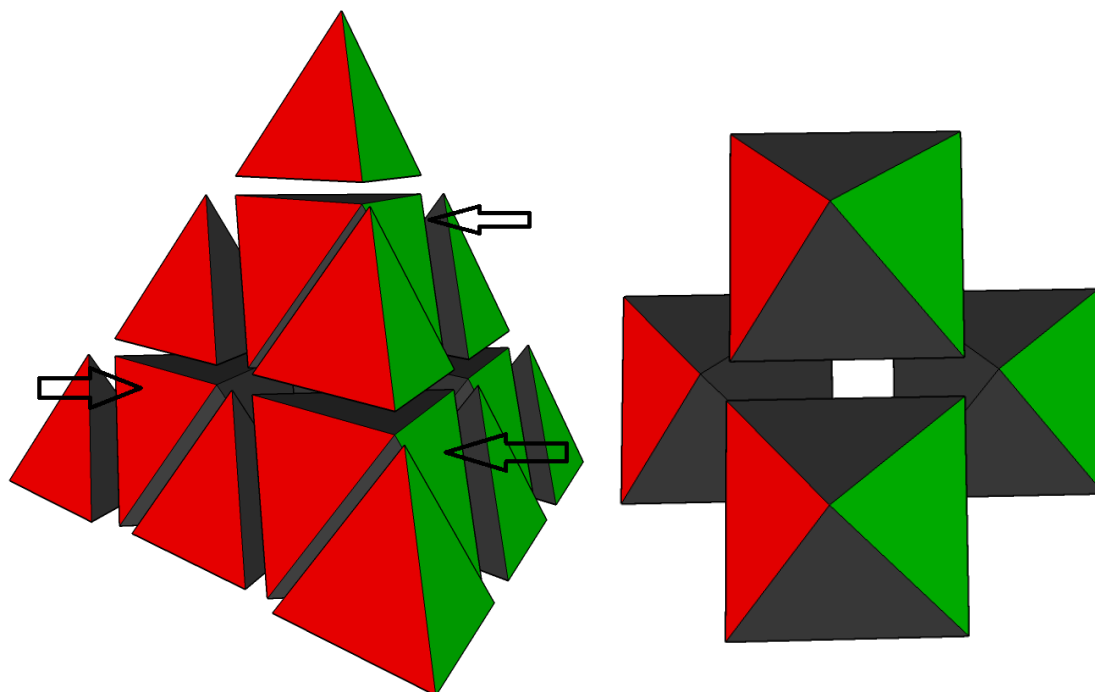
Po pierwsze mamy 4 trzykolorowe klocki umieszczone na narożnikach naszej piramidy:



Po drugie mamy 6 dwukolorowych klocków, tak jak poprzednio w kształcie czworościanu foremnego, które umieszczone są „na środkach” krawędzi.



I po trzecie mamy 4 klocki w kształcie ośmiościanu foremnego, pomalowane na trzy kolory.



Wszystkie trzy grupy elementów są ruchome.

Narożniki: 3^4

Mamy 4 narożniki w trzech kolorach. Klocki te nie mogą zmieniać położenia. Mogą tylko orientację. A więc ilość możliwych ułożeń wynosi 3^4 . W tej układance nie mamy z narożnikami kombinacji niemożliwych, gdyż wszystkie cztery poruszają się niezależnie.

Krawędzie: $\frac{6! \cdot 2^6}{4}$

Mamy 6 dwukolorowych klocków stanowiących krawędzie. Mogą one wędrować i zajmować sześć różnych pozycji. A więc liczba możliwych kombinacji tych elementów wynosi: $6! \cdot 2^6$. Ale podobnie jak w kostkach sześciennych mamy sytuacje niemożliwe: jedna krawędź (jeden klocek) w dobrym miejscu, ale nieprawidłowo odwrócony (wynik dzielimy przez 2) oraz dwie tylko krawędzie zamienione (znowu dzielimy przez 2)

Ośmiościany foremne: 3^4

Nie używam tutaj nazwy środki, gdyż akurat w tej kostce te klocki pełnią zupełnie inną funkcję. W takich klocków cztery i są one trzykolorowe. Więc podobnie jak przy narożnikach ilość możliwych ułożeń wynosi 3^4 .

Czy musimy podobnie jak w parzystych kostkach sześciennych musimy uwzględniać orientację w przestrzeni? Nie, gdyż narożniki, mimo że są ruchome to nie mogą zmieniać położenia. A więc sama kostka pyraminx jest już „zorientowana” w przestrzeni.

I to już koniec obliczeń. Widać, że po doświadczeniach z kostkami sześciennymi coraz szybciej można obliczać ilość możliwych ułożeń innych kostek. Szczególnie przydatne wydaje się powolne ograniczanie liczby ułożeń przy kostce 3x3x3.

Ilość wszystkich możliwych kombinacji klocków w kostce pyraminx wynosi:

$$\frac{3^4 * 3^4 * 6! * 2^6}{4} = 3^8 * 6! * 2^4$$
$$= 75\,582\,720$$

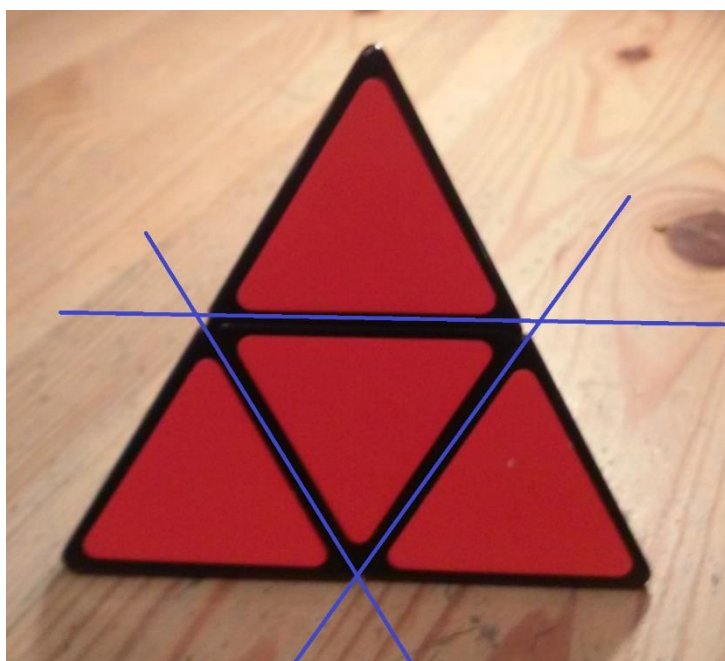
Jest to liczba wielokrotnie mniejsza od ilości wszystkich ułożeń standardowej kostki 3x3x3. Ale z drugiej strony znacznie większa od tej ilości przy kostce 2x2x2. **[Obliczenia 10]** Wieża ułożona z takiej ilości kostek 3x3x3 miałaby tylko 4308,22 km. Są to prawie 3 stutysięczne odległości Ziemi od Słońca. Podobnie jak w kostce 2x2x2 nie ma sensu przekształcać tak małej ilości kilometrów w lata świetlne.

Pyramorphix

Na zakończenie spróbujmy się zmierzyć z kostką, która zmienia kształt. Do tej pory każda łamigłówka, którą się zajmowaliśmy po każdym pełnym ruchu powracała do pierwotnego wyglądu (sześcián, czworościan foremny). Pyramorphix jest zupełnie inną układanką. Właściwie po każdym ruchu zmienia kształt na inny. Gdy jest ułożona – jest podobna do Pyraminx'a – jest czworościanem foremnym.



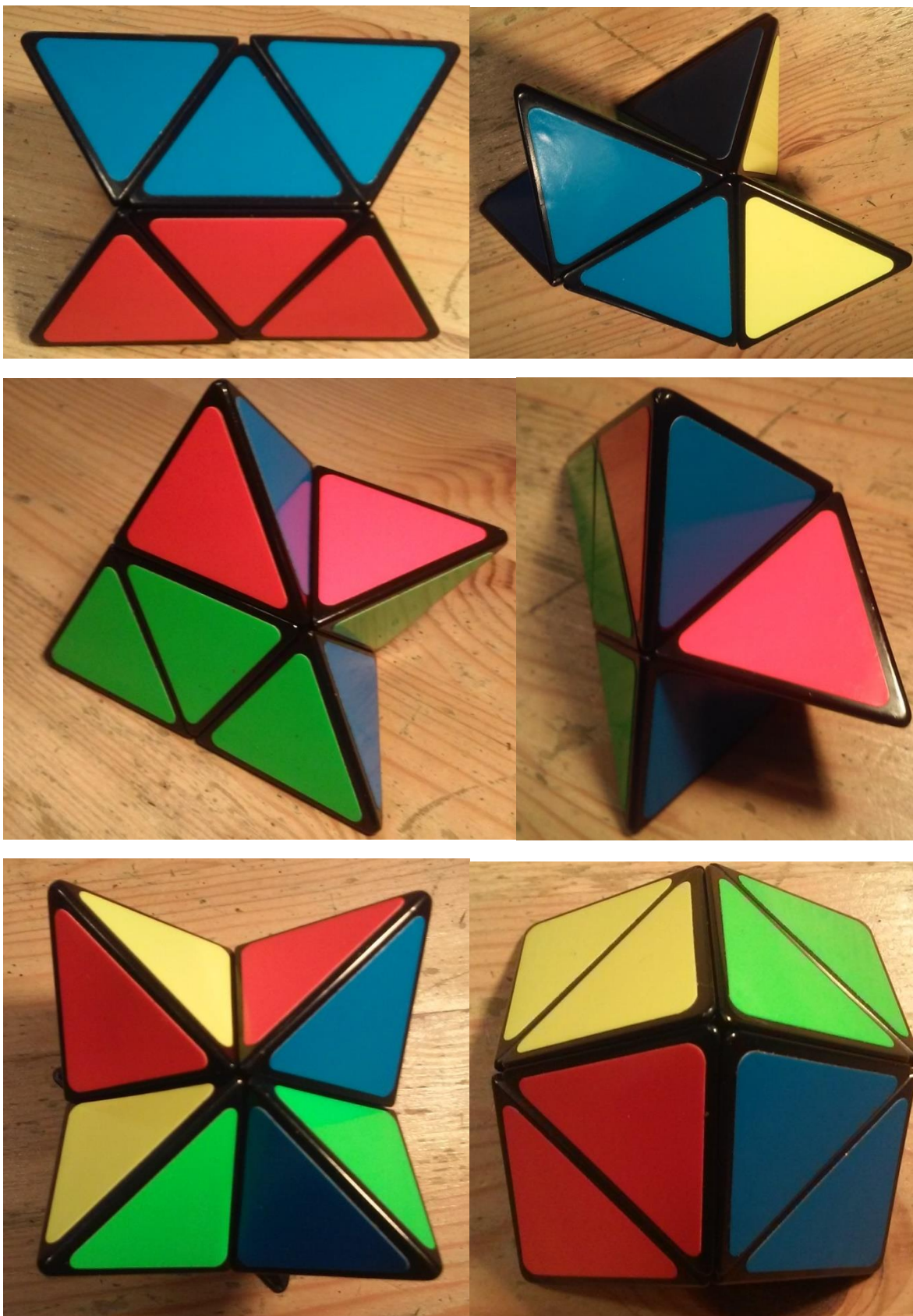
I tu właściwie podobieństwo się kończy. Pyraminx posiada narożniki, które poruszają się, że powiem „logicznie” – wokół osi zawierającej wysokość czworościanu. Pyramorphix'ie elementy obracamy wzdłuż krawędzi (na rysunku obok zaznaczono je kolorem niebieskim).



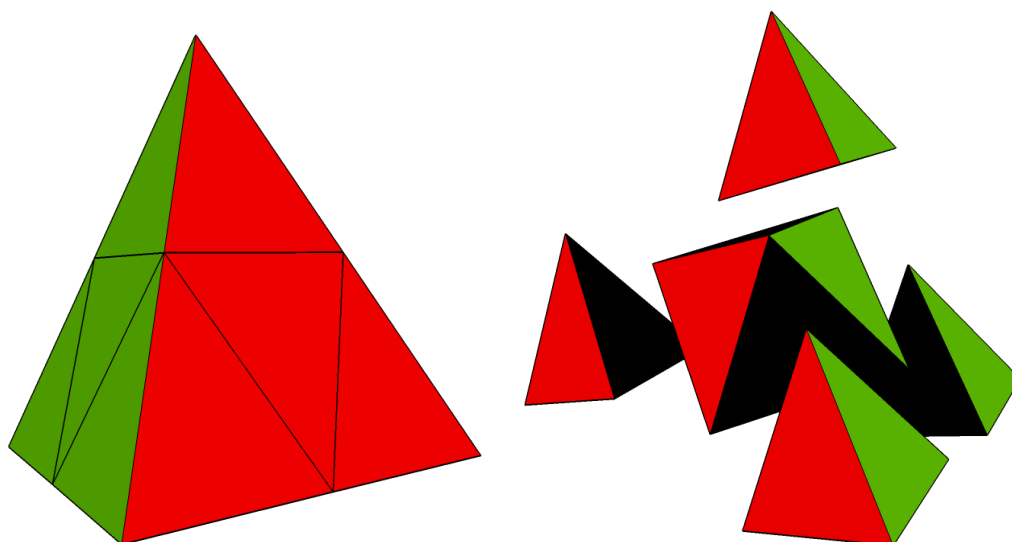
tak

w

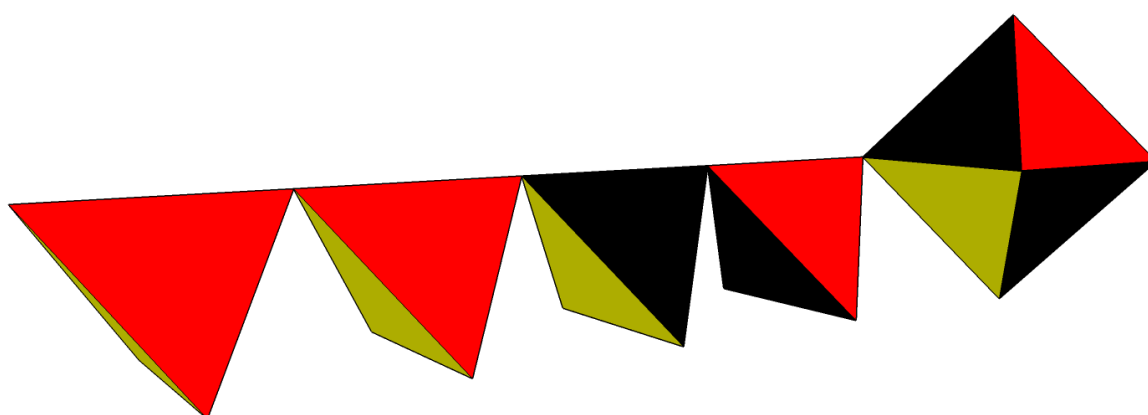
Po kilku ruchach kostka przyjmuje przedziwne kształty:



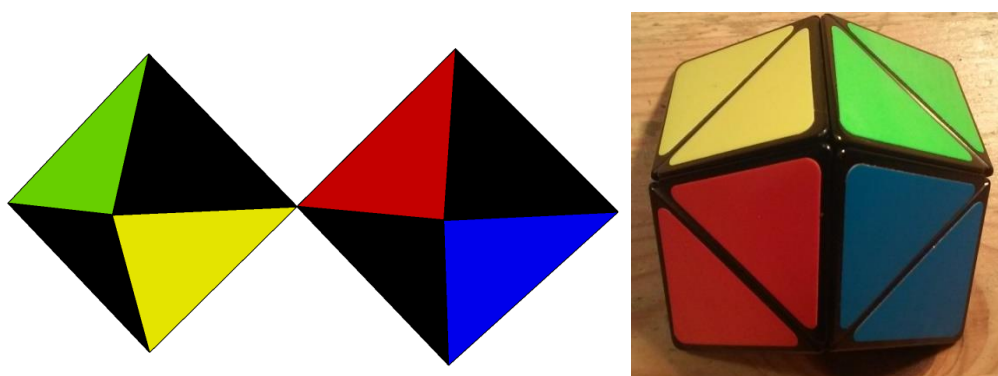
Na zdjęciach bardzo trudno oddać mechanizm ruchów Pyramorphix'a. Spróbujmy jednak policzyć ilość kombinacji, korzystając z poprzednich doświadczeń. Na początek zobaczmy jak ta łamigłówka jest zbudowana. Jak już mówiłem kształtem przypomina piramidę.



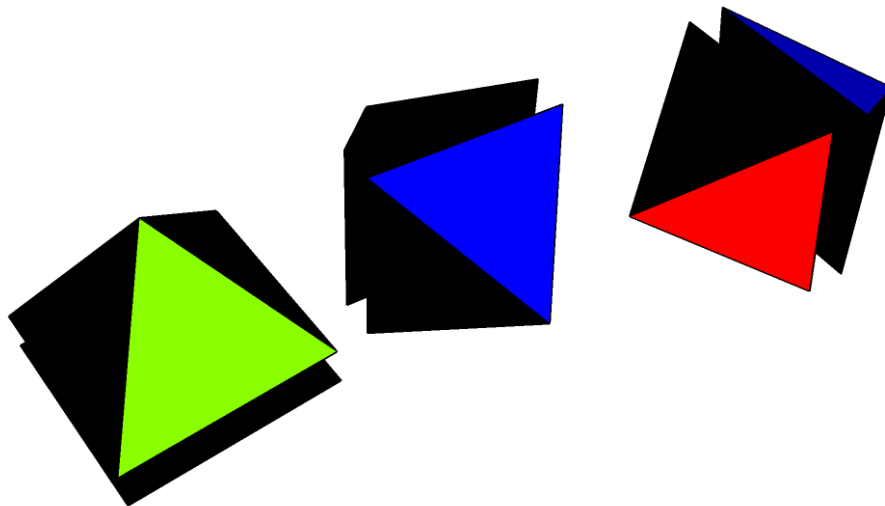
Natomiast po rozłożeniu na elementy pierwsze widzimy cztery czworościany foremne oraz jeden ośmiościan foremny:



Mamy więc teoretycznie pięć brył. Ale przypatrzmy się jeszcze raz ośmiościanowi foremnemu:



Na rysunku widzimy, że żadne „kolorowe ściany” nie stykają się ze sobą krawędziami. Natomiast fotografia pokazuje sytuację, gdzie kolorowe ściany sąsiadują ze sobą. Wynika z tego, że największa bryła jest podzielona:



I można (a nawet trzeba) traktować ją jako cztery bryły. Dlaczego cztery, a nie osiem? Gdyż tylko cztery ściany są widoczne i można nimi poruszać. Pozostałe cztery są „pomalowane na czarno” (w kolor neutralny) i nie biorą udziału w naszych obliczeniach. Na początek możemy sobie wyobrazić naszą układankę jako tylko i wyłącznie ośmiościan foremny, który możemy poruszać po wszystkich jego „kwadratowych” przekrojach (3). Mamy więc osiem ścian, które mogą być w każdym miejscu (8! kombinacji). Do tego „dokładamy” cztery narożniki (każdy w trzech kolorach) mamy więc 3^4 możliwości. Czy to już koniec obliczeń? Nie! Podobnie jak w kostce 2x2x2 (i każdej sześcienniej „parzystej”) tak także w tym przypadku brakuje nam orientacji w przestrzeni. W kostce 2x2x2 ilość możliwych kombinacji dzieliliśmy przez 24, gdyż mieliśmy sześć ścian i cztery możliwości „obrotu”. W Pyramorphix’ie mamy w środku ośmiościan i trzy sposoby obrotu. Więc w tym przypadku również będziemy dzielić przez 24 ($8 * 3 = 24$). Czy mamy w tym przypadku jakieś ułożenia niemożliwe? Według mojej praktyki nie. Każda kombinacja elementów układanki jest możliwa (podobnie jak środki w kostce 4x4x4 – i każdej większej sześcienniej). Końcowy wzór na ilość kombinacji elementów wynosi więc

$$\frac{8! * 3^4}{24} = 136\ 080$$

Jest to zdecydowanie najmniejsza liczba kombinacji, które tutaj obliczaliśmy. Powracając do naszych przykładów: **[Obliczenia11]** Wieża ułożona z takiej ilości kostek 3x3x3 miałaby „zaledwie” 7,76 km.

Obliczenia dla przykładów

Założenia:

Wymiary standardowej kostki Rubika 3x3x3 57mmx57mmx57mm

Prędkość światła 300 000 km/h

Rok świetlny = $60 * 60 * 24 * 365,25] * 300000 = 9\,467\,280\,000\,000$ km

czyli w przybliżeniu $9,5 * 10^{12}$ km

Odległość Ziemi od słońca 149 600 000 km

[Obliczenia 1] $1,02 * 10^{21}$

$1,02 * 10^{21} * 57 \text{ mm} = 5,81 * 10^{22} \text{ mm} = 5,81 * 10^{16} \text{ km}$

$5,81 * 10^{16} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km (odległość Ziemi od Słońca)} = 388\,368\,983,96$

$5,81 * 10^{16} \text{ km} / 9,5 * 10^{12} \text{ km (rok świetlny w km)} = 6115,79$

[Obliczenia 2] $1,70 * 10^{20}$

$1,70 * 10^{20} * 57 \text{ mm} = 9,69 * 10^{21} \text{ mm} = 9,69 * 10^{15} \text{ km}$

$9,69 * 10^{15} / 149\,600\,000 \text{ km} = 64\,772\,727,27$

$9,69 * 10^{15} / 9,5 * 10^{12} \text{ km} = 1020$

[Obliczenia 3] $6,88 * 10^{46}$

$6,88 * 10^{46} * 57 \text{ mm} = 3,92 * 10^{48} \text{ mm} = 3,92 * 10^{42} \text{ km}$

$3,92 * 10^{42} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 2,62 * 10^{34}$

$3,92 * 10^{42} \text{ km} / 9,5 * 10^{12} \text{ km} = 4,13 * 10^{29}$

[Obliczenia 4] $8,90 * 10^{33}$

$8,90 * 10^{33} * 57 \text{ mm} = 5,07 * 10^{35} \text{ mm} = 5,07 * 10^{29} \text{ km}$

$5,07 * 10^{29} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 3,39 * 10^{21}$

$5,07 * 10^{29} \text{ km} / 9,5 * 10^{12} \text{ km} = 5,33 * 10^{16}$

[Obliczenia 5] $1,33 \cdot 10^{23}$

$$1,33 \cdot 10^{23} \cdot 57 \text{ mm} = 7,58 \cdot 10^{24} \text{ mm} = 7,58 \cdot 10^{18}$$

$$7,58 \cdot 10^{18} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 5,06 \cdot 10^{10}$$

$$7,58 \cdot 10^{18} \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 797\,894$$

[Obliczenia 6] $5,19 \cdot 10^{20}$

$$5,19 \cdot 10^{20} \cdot 57 \text{ mm} = 2,96 \cdot 10^{22} \text{ mm} = 2,96 \cdot 10^{16} \text{ km}$$

$$2,96 \cdot 10^{16} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 197\,860\,962$$

$$2,96 \cdot 10^{16} \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 3\,115$$

[Obliczenia 7] 43 252 003 274 489 856 000

$$43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \cdot 57 \text{ mm} = 2465364186645921 \text{ km}$$

$$2465364186645921 \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 16\,479\,707$$

$$2465364186645921 \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 259$$

[Obliczenia 8] 3 674 160

$$3\,674\,160 \cdot 57 \text{ mm} = 209 \text{ km}$$

$$209 \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 1,40 \cdot 10^{-6}$$

$$209 \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 2,20 \cdot 10^{-11}$$

[Obliczenia 9] $7,40 \cdot 10^{45}$

$$7,40 \cdot 10^{45} \cdot 57 \text{ mm} = 4,22 \cdot 10^{41}$$

$$4,22 \cdot 10^{41} \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 2,82 \cdot 10^{33}$$

$$4,22 \cdot 10^{41} \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 4,44 \cdot 10^{28}$$

[Obliczenia 10] 75582720

$$75582720 \cdot 57 \text{ mm} = 4308,22 \text{ km}$$

$$4308,22 \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 2,88 \cdot 10^{-5}$$

$$4308,22 \text{ km} / 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 4,53 \cdot 10^{-10}$$

[Obliczenia 11] 136080

$$75582720 * 57 \text{ mm} = 7,76 \text{ km}$$

$$7,76 \text{ km} / 149\,600\,000 \text{ km} = 5,18 * 10^{-8}$$

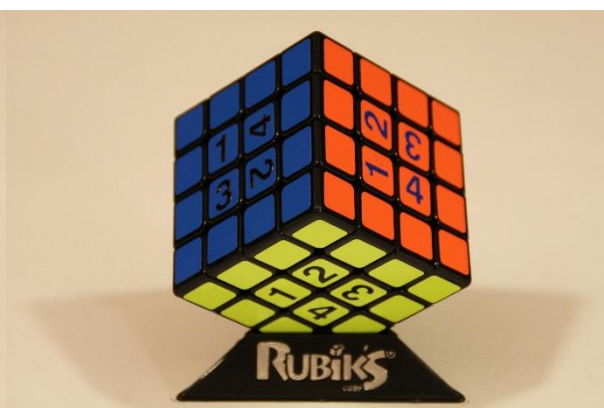
$$7,76 \text{ km} / 9,5 * 10^{12} \text{ km} = 8,16 * 10^{-13}$$

Moja kolekcja „rubików”

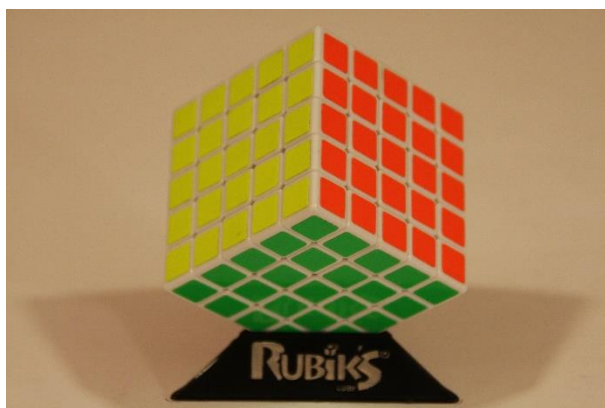
* czerwoną gwiazdką zaznaczyłem te kostki, których nie potrafię jeszcze „rozwiązać”



3x3x3



4x4x4



5x5x5



6x6x6



2x2x2



Mirror



Gear cube



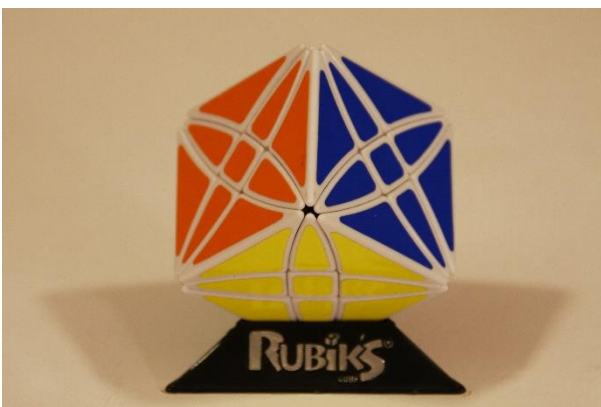
Skewb



Helicopter cube



Dino cube



NoName *



Square-1



Fisher cube



Megaminx



Kilominx



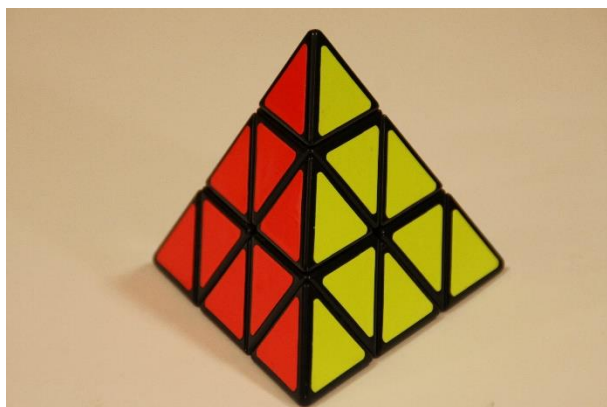
NoName



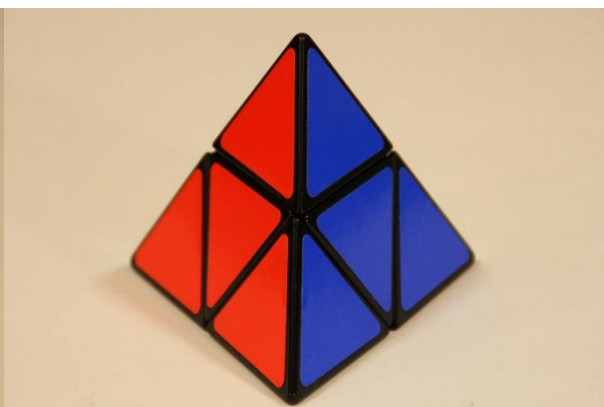
Rhombic dodecahedron



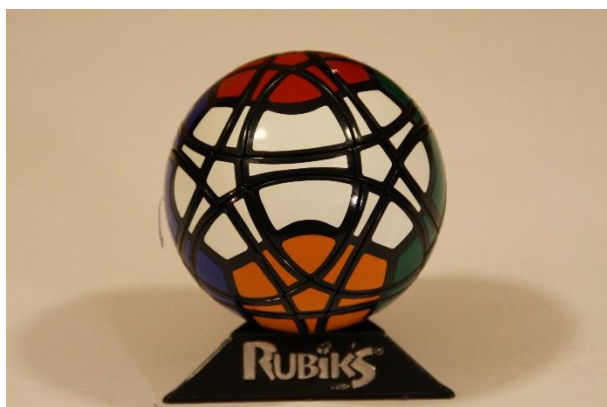
Octahedron



Pyraminx



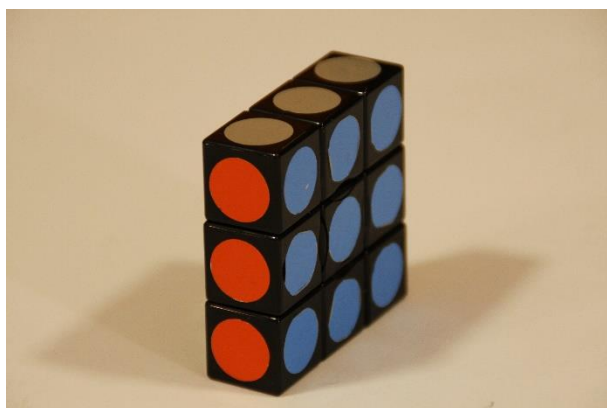
Pyramorphix



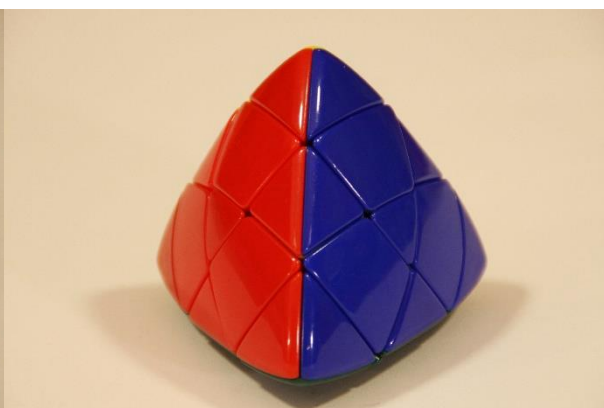
Megaminx ball (6-color megaminx)



Tetris cube *



3x3x1 (super floppy cube)



master pyramorphix

Źródła

1. Matematyka olimpijska: Kombinatoryka Beata Bogdańska
2. www.speedsolving.com
3. eu.rubiks.com
4. wikoperdia.org
5. kostkarubika.net/
6. www.worldcubeassociation.org

Zakończenie

I na tym kończę moją pracę nad ilościami możliwych ułożeń różnego rodzaju kostek Rubika. Ale wcale nie jest to koniec mojej zabawy przy tych łamigłówkach. Już w trakcie pisania tej pracy powiększyłem moją kolekcję układanek o dwie następne: kostkę 6x6x6 oraz square-1. W wolnych chwilach męczę moją młodą główkę coraz to trudniejszymi algorytmami do układania „rubików”. Idę dwoma torami: po pierwsze staram się odnaleźć sposoby na rozwiązanie coraz to nowych kostek, tworzonych już nie przez Rubika, ale poprzez jego licznych naśladowców (Fisher – i jego kostka; Nathan Wilson: Deep Cubic Megaminx, Rubic Knife oraz Oskar van Deventer: Deep Skewb, Gear Cube Extreme). A po drugie staram się poprawić mój rekord na jak najszybsze ułożenie standardowej kostki Rubika 3x3x3 poprzez naukę coraz to nowszych algorytmów (F2L, OLL, PLL(CFOP)) W każdej z tych „rodzin” algorytmów jest po kilkanaście, a czasami po kilkadziesiąt sposobów układania.

Przy obliczaniu ilości kombinacji, a właściwie przy rozpatrywaniu budowy różnego rodzaju kostek próbowałem budować papierowe elementy (bryły) w większości wielościany foremne.



Jednak efekt nie był zbyt imponujący. O ile wiele nauczyłem się o budowie łamigłówek o tyle graficzna strona nie była zbyt poprawna. Dlatego też do przedstawiania budowy kostek wykorzystałem program Sketchup. Wszystkie rysunki w niniejszej pracy, które nie są fotografiami zostały sporządzone w tym właśnie programie.