Co łączy geometrię z architekturą?

Agata Dziadur

Szymon Rosiński

klasa VII

Opiekun pracy: mgr Katarzyna Jabcoń

Kraków, 27 lutego 2018 roku

Spis treści

Wstęp

Bardzo lubimy matematykę dlatego chcieliśmy wziąć udział w tym konkursie. Wybraliśmy temat związany z geometrią w architekturze, ponieważ bardzo nas zainteresował. Po zagłębieniu się w temat architektury odkryliśmy, że już przed naszą erą stosowano geometrię do budowania idealnych konstrukcji. Przykładami takiej konstrukcji jest chociażby jeden z cudów świata czyli Piramida Cheopsa. Gdyby nie geometria to wszystkie budowle na całym świecie dawno już by się zawaliły. Po bliższym spojrzeniu na znane obiekty architektoniczne poznaliśmy złoty podział, łuki, rozety, wieloliście, figury geometryczne itp., które występują w matematyce. Efekty naszej pracy mogą państwo zobaczyć poniżej.

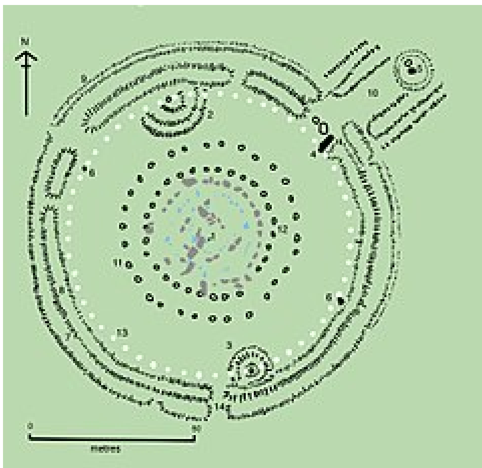
Miłej lektury! :)

Rozdział 1

Geometria na przestrzeni wieków

Geometria nie jest wykorzystywana jedynie do obliczania pól i szkicowania figur przestrzennych, jej zastosowanie jest znacznie szersze. Ciekawym obszarem jest wykorzystanie geometrii w architekturze: w projektowaniu i budowie różnych budynków. Geometria niejako odpowiada za to, co uznajemy za estetyczne.

Zastosowanie wiedzy z zakresu geometrii możemy zauważyć już w sprzed ponad 5000 lat. Takim przykładem jest ***Stonehege*** – budowla oparta w swoim zamyśle na dwóch okręgach (powstała około 2.900 roku p.n.e., choć można znaleźć także ślady wcześniejszej działalności człowieka w tym miejscu). Początkowo istniejące okręgi wyznaczone kamiennymi blokami i wałami ziemi były stopniowo komplikowane i pojawiały się kolejne okręgi wewnątrz początkowej budowli, a także prostokąty (jak wejście czy ołtarz) ustawione w świadomy sposób wobec już istniejących okręgów.



Plan Stonehenge (źródło: Wikipedia)

Inną wczesną charakterystyczną budowlą wskazującą na świadome używanie geometrii w architekturze jest ***Piramida Cheopsa***, która jest o około 400 – 500 lat „młodsza" od Stonehenge: pochodzi z około 2560 roku p.n.e. W tej budowli mamy już bardziej złożone figury geometryczne: ostrosłup o podstawie kwadratu (zewnętrzna bryła) oraz zaawansowaną wiedzę z zakresu prostych i kątów (korytarze wewnątrz).

*Piramida Cheopsa (źródło: Wikipedi*a)

Ponadto obie starożytne budowle świadczą o wykorzystaniu geometrii nie tylko do zaprojektowania i wykonania ale także do umiejscowienia obiektu architektonicznego w terenie i zorientowania wobec typowych zjawisk astronomicznych.

Starożytnym budynkiem, tym razem z początku naszej ery, wykorzystującym w znaczący sposób wiedzę architektoniczną może być na przykład ***Koloseum*** w Rzymie (wybudowane pomiędzy 70 a 80 rokiem n.e.). Wyraźnie widać tu wykorzystanie elipsy w planie całej budowli oraz charakterystyczne liczne użycie łuków w zewnętrznym i wewnętrznym murze (łuki jako element omówimy w dalszej części pracy).

Kolosem w Rzymie

(bryła budowli – użycie elipsy)

Koloseum w Rzymie

(mury budowli)

W kolejnej epoce: Średniowieczu powstają liczne dzieła architektury sakralne jak ***Bazylika św. Piotra*** w Rzymie oraz ***Bazylika Santa Maria Maggiore***. Jednak wspomniane bazyliki są dziełami późnego Średniowiecza, o złożonym użyciu figur geometrycznych. Cechowały się tym, iż posiadały od trzech do 5 naw bocznych i nawę główną która była wyższa od pozostałych. Ciekawym elementem były **kopuły**, które miały stanowić dumę architekta i fundatorów, były one na budowane najczęściej na planie **koła** lub **wielokąta** z dachem namiotowym lub kopułą. Na planie wielokątów powstawały także, oddzielone od bazyliki, tzw. **Baptysteria** (czyli w założeniu odrębne budynki służące do chrztu).

Katedra Santa Maria del Fiore we Florencji (widoczna kopuła katedry oraz po lewej stronie baptysterium).

W budowlach średniowiecznych ciekawa jest nie tylko sama bryła budynku. Elementy geometrii w architekturze widzimy chociażby z fasadzie budynku: **rozety**, **łuki** oraz w zdobieniach wewnątrz (kształty kolumn wykorzystujące tzw. **wieloliście** czy sklepienia oparte w swojej konstrukcji na **łuku**).

Katedra Santa Maria del Fiore we Florencji (fasada budynku z rozetami i łukami).

Także architektura kolejnego okresu w kulturze: renesansu zawiera wiele elementów geometrycznych. Styl budowli nawiązuje do starożytności, wracają zatem **łuki**, **kolumnady**, bryły budynków oparte o **podstawowe figury geometryczne**, jak prostokąt czy koło.

Renesansowy dziedziniec Zamku Królewskiego na Wawelu.

Oczywiście elementy *geometrii w architekturze* pojawiają się także w kolejnych epokach (np. baroku, klasycyzmie, secesji) i w architekturze współczesnej. Jednak najciekawsza wydaje się nam architektura starożytności i średniowiecza. To właśnie te budynki, gdy spacerujemy po ulicach Krakowa, czy jedziemy na wycieczkę do Włoch, wydają się nam po prostu ładne, estetyczne, przyjemne do oglądania.

Chcemy pokazać w tej pracy, że za naszym poczuciem piękna i harmonii kryje się geometria i królowa nauk: MATEMATYKA.

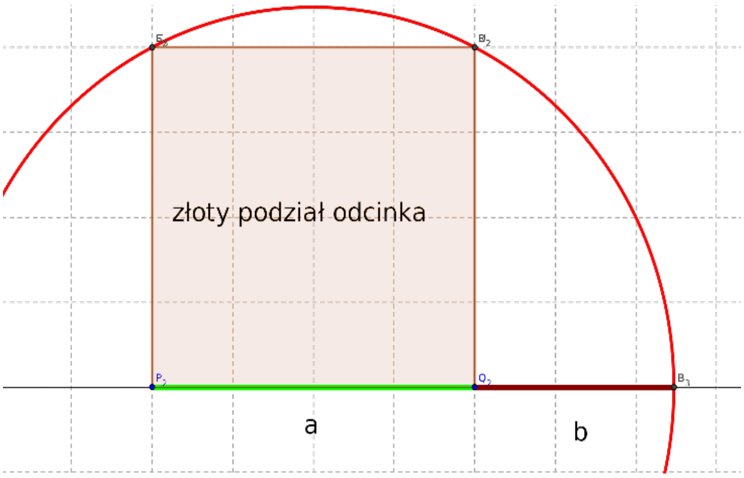
Rozdział 2

Boska proporcja

Złoty podział, inaczej nazywany ***boską proporcją,*** polega na rozkładzie odcinka na dwie części, tak aby spełnione było równanie

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \varphi.$$

to znaczy, jest to taki podział odcinka na dwie części, **by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej.**



Konstrukcja 1: Złoty podział odcinka.

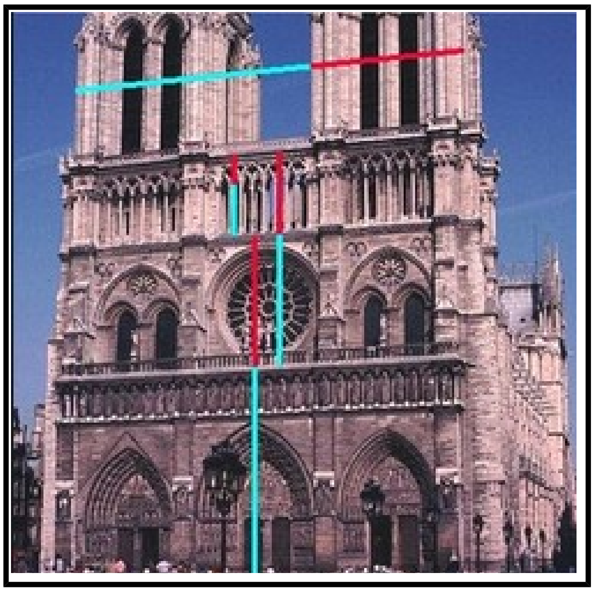
Stosunek, o którym mowa w definicji, nazywa się **złotą liczbą** i oznacza się ją grecką literą *φ* (czyt. „fi”). Jej wartość wynosi:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\,39887\ldots$$

Liczba ta jest liczbą **niewymierną** (podobnie jak znana nam liczba *π*).

Złotą proporcję możemy dostrzec w **Partenonie**, Świątyni Ateny na Akropolu w Atenach, zbudowanej w latach 448-432 p.n.e. Fronton świątyni mieścił się w złotym prostokącie.

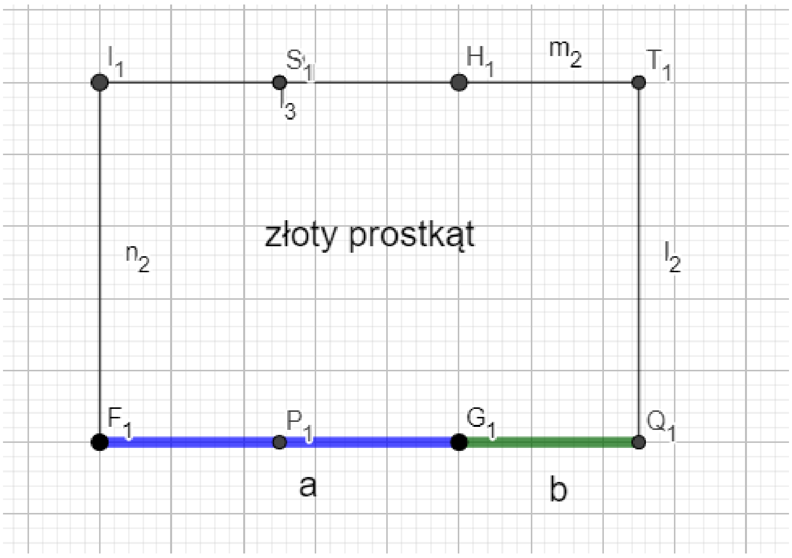
Katedra Notre Dame w Paryżu jest kolejnym przykładem budowli renesansowej zbudowanej na kanonie złotej liczby. Odcinki niebieskie i czerwone są ze sobą w relacji złotego podziału.



Od *złotego odcinka* wywodzą się następujące pojęcia:

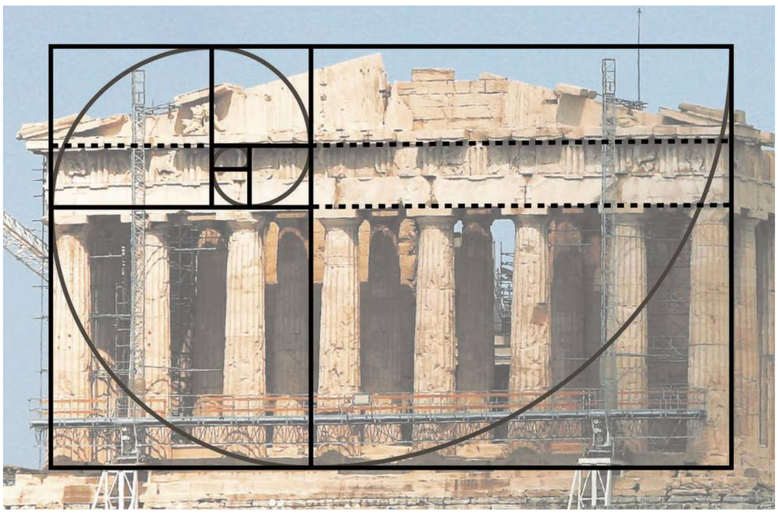
- złoty prostokąt,
- złoty trójkąt,
- złota spirala.

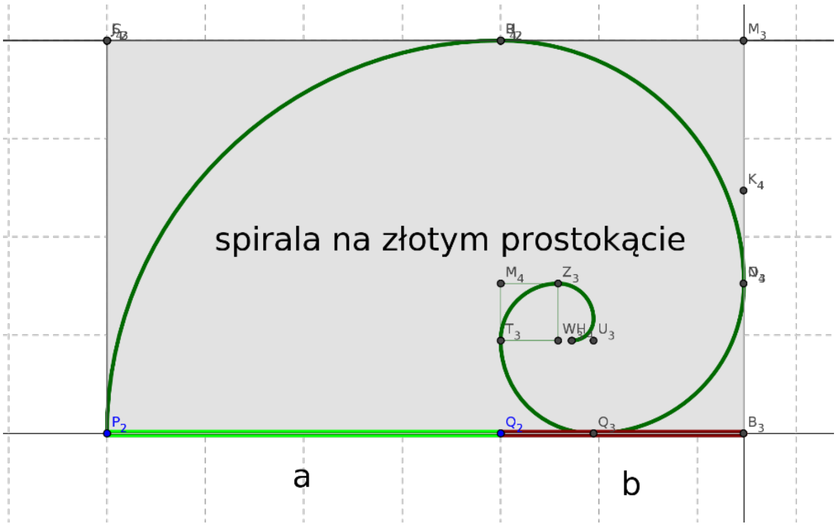
Zacznijmy od **złotego prostokąta.** Jest on nazywany tak, ponieważ jego boki pozostają w złotym stosunku. Poniższy rysunek przedstawia właśnie złoty prostokąt.



Konstrukcja 2: Złoty prostokąt.

Zauważmy, że odcinek większy złotego prostokąta staje się bokiem kwadratu, który dorysowujemy, zaś odcinek mniejszy tworzy wraz z drugim bokiem tego kwadratu prostokąt. W efekcie otrzymujemy prostokąt, podzielony ma kwadrat i mniejszy prostokąt. Następnie dzielimy mniejszy prostokąt w identyczny sposób i postępujemy tak, aż do utraty miejsca na kartce papieru. Teraz w każdym kwadracie zakreślamy ćwiartkę okręgu, o promieniu równym długości boku, a po połączeniu wszystkich ćwiartek otrzymujemy gotową spiralę, zwaną **złotą spiralą.**



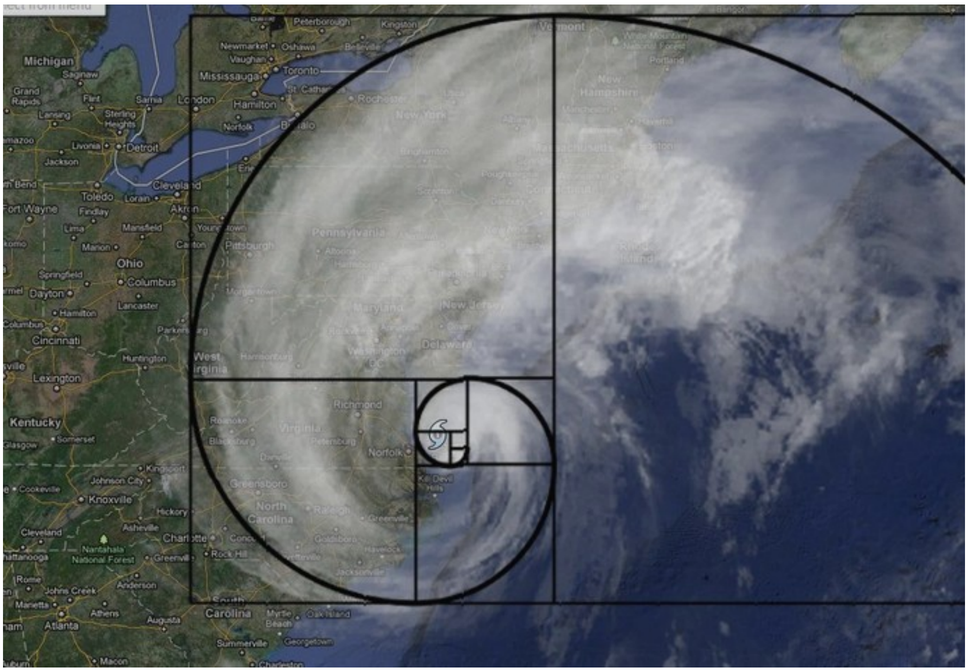


Konstrukcja 3: Spirala na bazie złotego prostokąta.

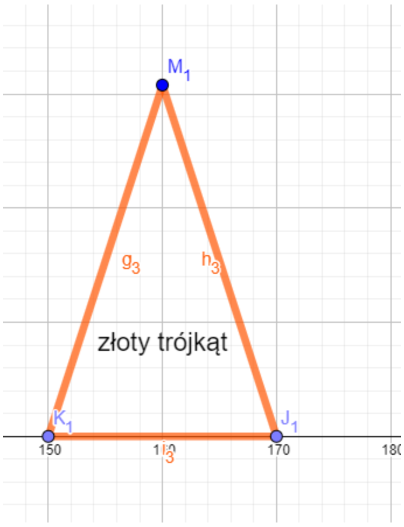
CIEKAWOSTKA!

Przyglądając się tej spirali i muszli ślimaka, od razu zauważamy wyraźne podobieństwo. Złota spirala występuje w większości kształtów **muszli ślimaków** czy **ostryg**. Jest to idealny przykład *złotej spirali* w przyrodzie.

Huragany powstają w złotej spirali. Na zdjęciu poniżej możemy zobaczyć **huragan Irene**, który w 2011 roku uderzył m.in. w **Nowy Jork**.

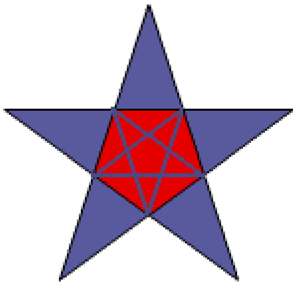


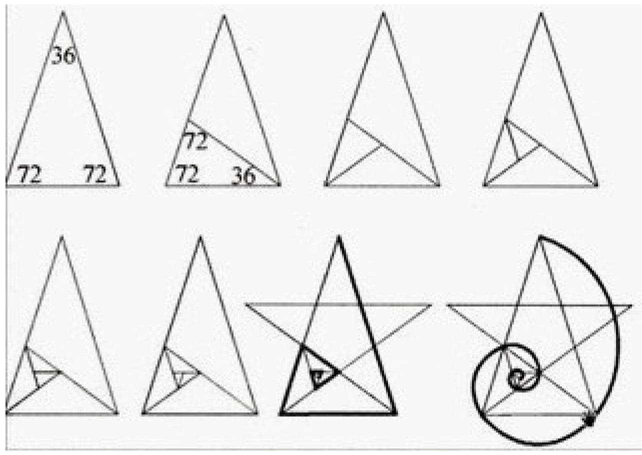
Złoty trójkąt jest bardzo podobny do złotego prostokąta, ponieważ posiada taką samą własność. Jest to trójkąt równoramienny, w którym stosunek boku do podstawy jest równy liczbie φ.



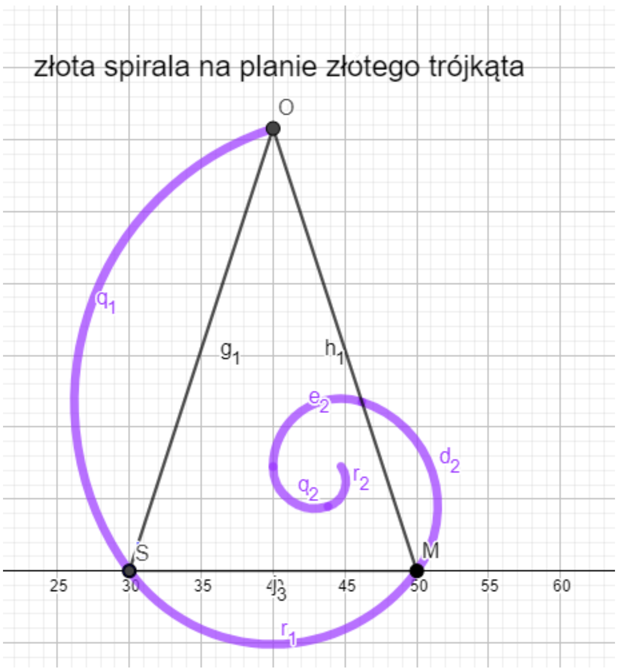
Konstrukcja 4: Złoty trójkąt.

Złoty trójkąt jest częścią **pentagramu,** którego WSZYSTKIE ramiona przecinają się według zasad złotego podziału.





Podobnie jak w złotym prostokącie, który możemy dzielić na mniejsze złote prostokąty, **złoty trójkąt** również posiada tę własność. Na powstałych kolejno trójkątach można zakreślić łuki, które razem tworzą kolejną **ciekawą spiralę.**



Konstrukcja 5: Spirala na bazie złotego trójkąta.

Rozdział 3

Od łuku przez rozety do wielościanu

Pierwszą rzeczą, którą zajmiemy się w tym rozdziale są łuki. **Łuk** jest to krzywa, która jest pewną częścią okręgu. W geometrii łuk jest definiowany jako część okręgu. Parametry łuku odnoszone są do wielkości promienia oraz kąta środkowego okręgu, którego częścią jest łuk. Typowym parametrem wyliczanym dla łuku jest długość łuku, wyliczana ze wzoru:

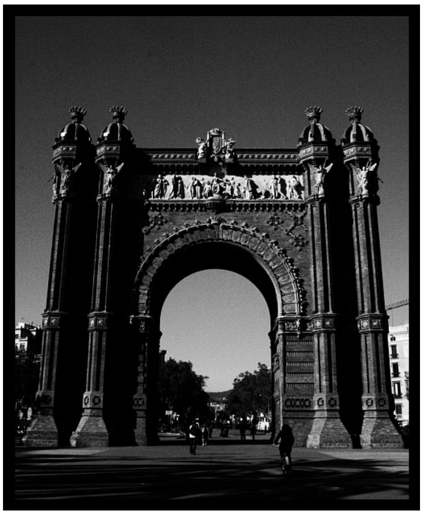
$$d = \alpha \times R$$

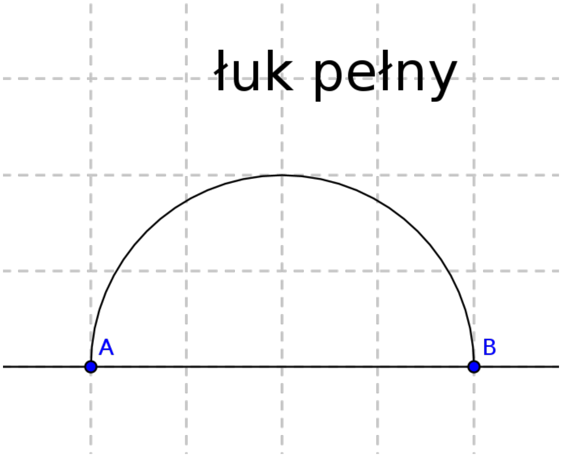
gdzie *d* oznacza długość łuku, *α* miarę kąta środkowego, którego ramiona wyznaczają ten łuk, wyrażoną w radianach, a *R* promień okręgu, którego częścią jest wyliczany łuk.

W architekturze łuki można znaleźć w konstrukcji do podtrzymywania ścian. Poniżej przedstawimy różne rodzaje łuków oraz ich przykłady występowania w architekturze.

Rodzaje łuków

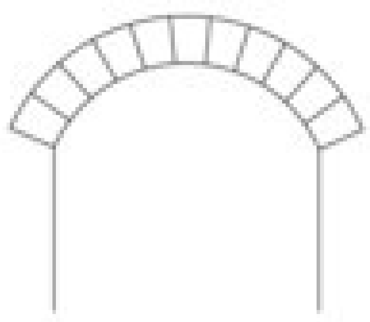
1. Łuk pełny

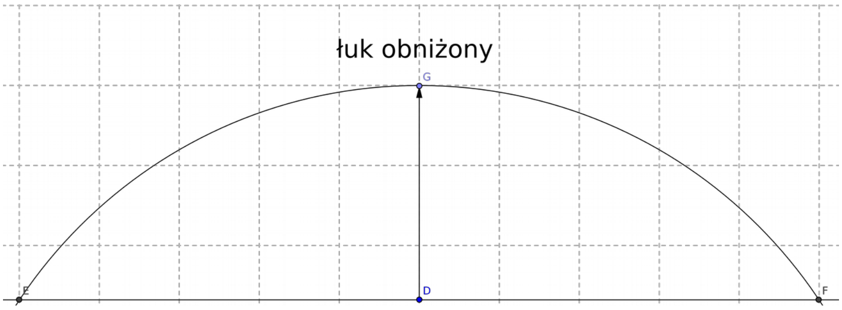




Konstrukcja 6: Łuk pełny.

2. Łuk obniżony



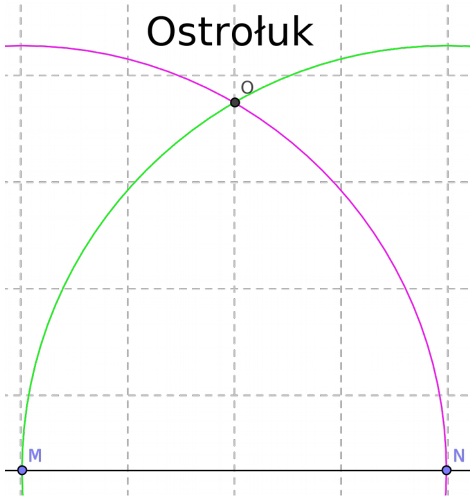


Konstrukcja 7: Łuk obniżony.

3. Łuk podwyższony

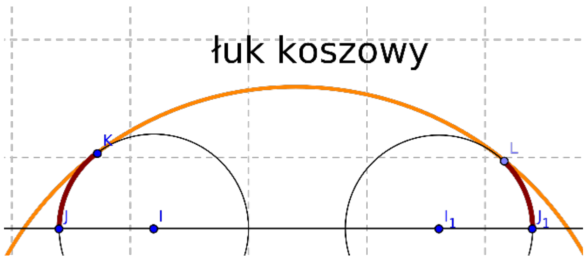
Konstrukcja 8: Łuk podwyższony.

3. Ostrołuk



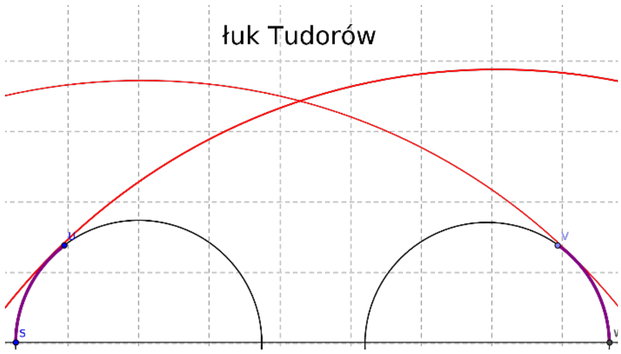
Konstrukcja 9: Ostrołuk.

4. Łuk koszowy



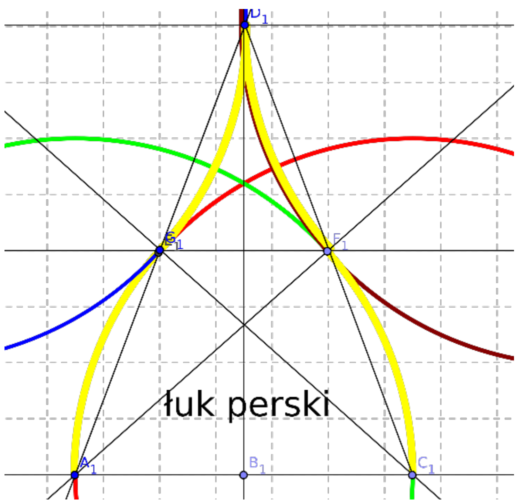
Konstrukcja 10: Łuk koszowy.

5. Łuk Tudorów



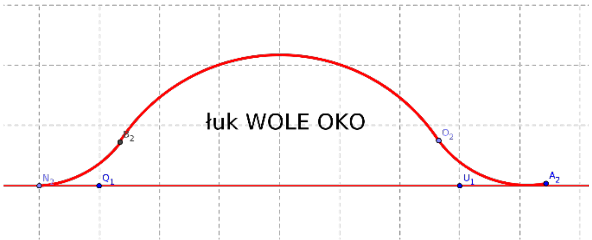
Konstrukcja 11: Łuk Tudorów.

6. Łuk perski



Konstrukcja 12: Łuk perski.

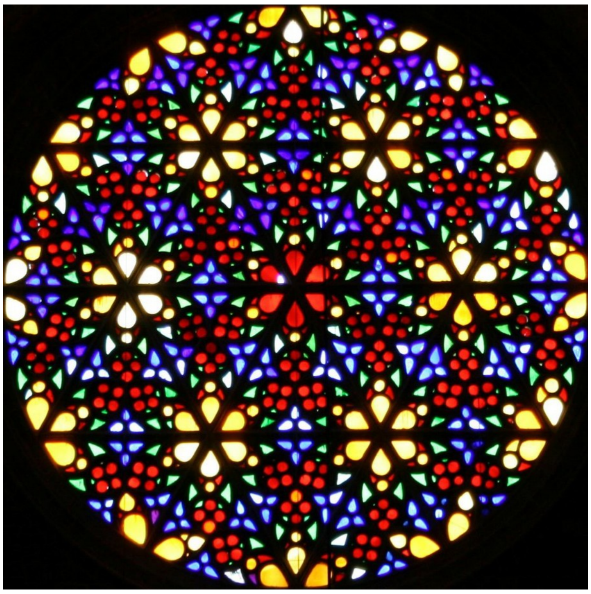
7. Wole Oko

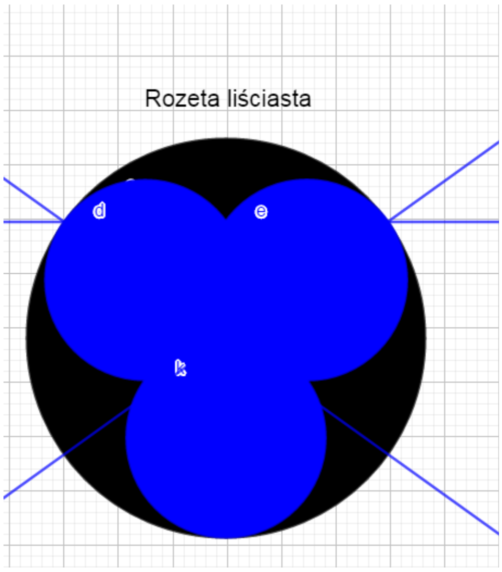


Konstrukcja 13: Łuk typu Wole Oko.

Kolejną rzeczą do omówienia są **rozety.** Rozety są ściśle powiązane z okręgami i łukami. Związku z tym można obliczać ich pola dzięki wzorowi na pole koła, czyli P=πr^2.

Przykład rozety liściastej

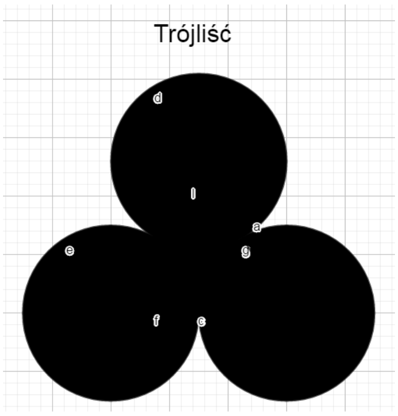




Konstrukcja 14: Rozeta liściasta.

Ostatnim tematem poruszanym w tym rozdziale są **wieloliście**. Wieloliście są także powiązane z okręgiem, ale w nieco odmienny sposób niż łuki i rozety. Wieloliście, podobnie jak rozety, mogą być wpisane w okrąg ale nie jest to warunek konieczny. Elementem ułatwiającym konstrukcje wieloliścia może być także trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny lub inne wielokąty foremne.

Przykłady wieloliści



Konstrukcja 15: Trójliść.

Konstrukcja 17: Czteroliść.

Konstrukcja 16: Sześcioliść.

Zakończenie

Dzięki napisaniu tej pracy nauczyliśmy się wielu nowych rzeczy. Poznaliśmy bardzo interesujący program **GEOGEBRA,** który pozwolił nam na stworzenie konstrukcji do naszej pracy (był ich aż 16!). W przyszłości na pewno jeszcze do niego wrócimy.

Oprócz programu dowiedzieliśmy się wielu ciekawostek ze świata architektury i geometrii. Przy robieniu tego projektu spędziliśmy mile czas na odkrywaniu wielu nowych rzeczy w świecie cudownej MATEMATYKI. Mamy nadzieje, że udowodniliśmy, że geometria jest zauważalna w architekturze i bez niej tworzenie budynków byłoby niemożliwe.

Bibliografia

- https://sites.google.com/site/zlotyxpodzial/testimonials-1
- http://designer.info.pl/proporcje-w-projektowaniu/
- http://swietageometria.info/podstawowe-pojecia?start=10
- http://www.zobaczycmatematyke.krk.pl/przyklady/Badecka/architektura.htm
- http://home.agh.edu.pl/~zobmat/2016/wyr_piskorskipiotr/
- https://nnka.wordpress.com/2016/02/20/spirala-krysztalowa-vs-spirala-fibonacciego/
- https://www.slideshare.net/olawlodek/architektura-matematyka1
- https://www.theglobeandmail.com/life/home-and-garden/architecture/in-search-of-the-golden-ratio-in-architecture/article20040240/
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Stonehenge
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Piramida_Cheopsa
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Koloseum
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Katedra_Santa_Maria_del_Fiore
- http://florencja.lovetotravel.pl/santa_maria_del_fiore
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Architektura_renesansu_w_Polsce
- Wojciech Guzicki, *Geometria maswerków gotyckich,* Wyd. Omega, 2011.

Pozostałe elementy pracy mamy dzięki naszemu opiekunowi (Katarzyna Jabcoń).

Opinia nauczyciela

Agata i Szymon są uczniami bardzo zdolnymi i pilnymi. Zawsze aktywnie uczestniczą w lekcjach matematyki oraz chętnie pomagają rówieśnikom tłumacząc im niezrozumiałe zadania. Brali udział w konkursach matematycznych takich jak Małopolski Konkurs Matematyczny oraz Olimpiada Matematyczna Olimpus. Często rozwiązują zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności. Podejmują się dodatkowych referatów, dzięki którym koledzy i koleżanki z klasy mogą dowiedzieć się ciekawych i wykraczających poza podstawę programową informacji. Przyswajanie wiadomości z lekcji przychodzi im z wielką łatwością, dlatego też często potrzebują zadań dodatkowych, gdyż typowe zadania ich nudzą. Wybrany temat pracy (spośród kilku zaproponowanych przeze mnie) całkowicie wykracza poza wiadomości szkolnej matematyki. Opracowany przez nich materiał, czyli całkowicie samodzielnie wykonane rysunki w programie Geogebra, są związane z wielogodzinnymi zmaganiami z poznaniem programu. Moja pomoc polegała na wstępnym zaznajomieniu ich z programem (po pierwsze – poinformowaniu, że taki istnieje) oraz opiece merytorycznej, korygowaniu informacji, które zaczerpnęli ze źródeł. Włożyli oni ogrom energii na wykonanie całej pracy.

Katarzyna Jabcoń