Kolorowanie Dywanu Sierpińskiego

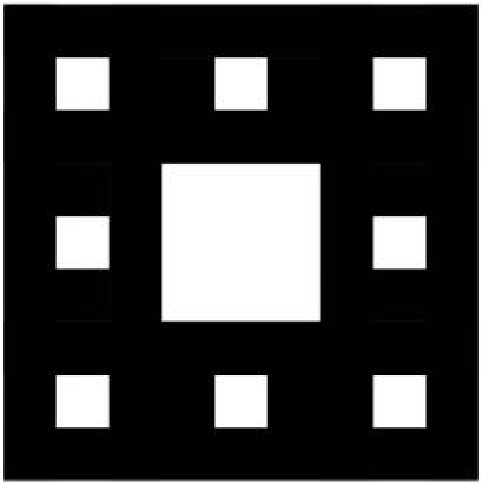
Andrzej Szablewski, Radosław Peszkowski

2018

Spis treści

Wstęp

Dywan Sierpińskiego to jeden z najbardziej charakterystycznych obiektów matematycznych i wręcz książkowy przykład figury fraktalnej. Jego pozornie prosta konstrukcja w połączeniu z fraktalną naturą daje ciekawy efekt wizualny i sprawia, że jest on prawdopodobnie najlepiej rozpoznawalnym fraktalem na świecie.



(Rysunek 1.1 Dywan Sierpińskiego w drugim kroku. Czarnym kolorem zaznaczono jego pole powierzchni, natomiast biała część nie jest częścią tego obiektu)

Problem kolorowania

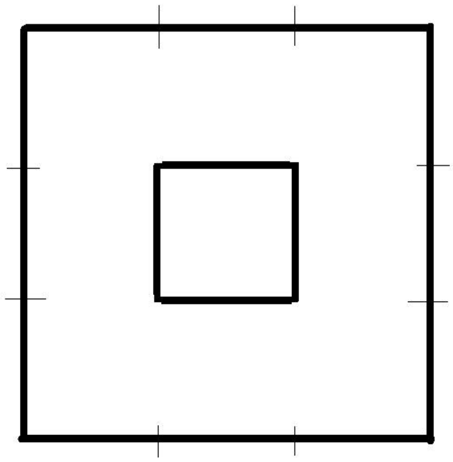
Jednocześnie jednak natura tego obiektu nie została do końca poznana. Jedną z niewiadomych była zagadka z kółka matematycznego, którego spotkania odbywały się w naszej szkole. Zadanie polegało na tym aby obliczyć ile farby potrzeba aby pomalować cały fraktal (przyjmując długość jego boku jako 1). Odpowiedź na to pytanie jest prosta, wystarczy obliczyć jego pole, które okazuje się być równe 0.

Naturalną kwestią było rozwinięcie tego problemu: ile trzeba farby aby pomalować cały dywan w n-tym kroku? Odpowiedź na to pytanie przyszła niemal równie szybko co na poprzednie: Pole fraktala w n-tym kroku to $(\frac{8}{9})^n$. Zauważyliśmy jednak, że dywan, można podzielić na 4 rodzaje kwadratów. Chcemy więc pomalować każdy rodzaj na inny kolor, oraz obliczyć ile farby potrzebujemy do tego w n-tym kroku.

Kwadraty te wyróżniamy, ze względu na ułożenie *brzegów*, gdzie *brzegami* są:

1. *Najkrótsze* po wykonaniu *n* kroków boki obiektu.
2. *Części pozostałych boków,* które zostały podzielone tak, aby ich długość była równa najkrótszym bokom po *n* krokach.

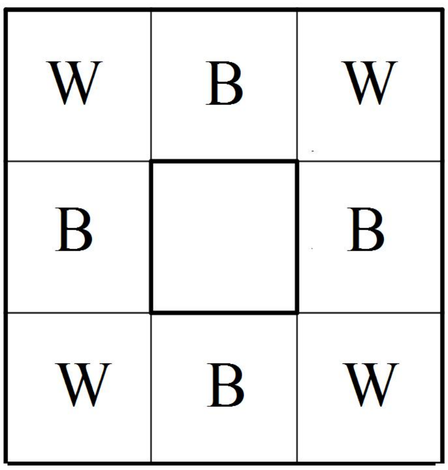
Na ilustracji poniżej zostały zaznaczone wszystkie *brzegi* po wykonaniu pierwszego kroku.



(Rysunek 2.1 Cienkie linie dzielą grube boki na równe fragmenty, nazywane brzegami)

Różne rodzaje kwadratów

Zauważmy, że dywan Sierpińskiego po wykonaniu pierwszego kroku składa się z dwóch rodzajów kwadratów (rysunek 3.1). Każdy kwadrat ma krawędzie o długości równej długości *brzegu*, ale nie każdy jego bok jest naszym *brzegiem.*



(Rysunek 3.1 Dwa rodzaje kwadratów)

Jak wspomnieliśmy wcześniej na rysunku można wyróżnić dwa rodzaje kwadratów: kwadraty, których dwa boki leżące przy jednym kącie są brzegami, (na rysunku powyżej oznaczone literą W) oraz takie których dwa równoległe boki są *brzegami* (na rysunku oznaczone literą B). Jednych i drugich jest 4, co daje sumę 8 kwadratów, na jakie został podzielony Dywan Sierpińskiego po pierwszym kroku.

Przyjrzymy się teraz jakie kwadraty powstają po wykonaniu drugiego kroku:

W	B	K	K	B	K	K	B	W
B		K	K		K	K		B
K	K	S	K	B	K	S	K	K
K	K	K				K	K	K
B		B				B		B
K	K	K				K	K	K
K	K	S	K	B	K	S	K	K
B		K	K		K	K		B
W	B	K	K	B	K	K	B	W

(Rysunek 3.2 Kwadraty powstałe w drugim kroku)

Jak można zauważyć pojawiły się 2 nowe rodzaje kwadratów: mające dokładnie jeden bok będący *brzegiem*, (na rysunku oznaczone literą K) oraz nie posiadające żadnych *brzegów* (na rysunku oznaczone literą S). Po drugim kroku mamy więc 4 rodzaje kwadratów:

Własność

1. Kwadraty W, których dwa sąsiednie boki są *brzegami,*
2. Kwadraty B, których dwa przeciwległe boki są *brzegami,*
3. Kwadraty K, których jeden bok jest jednocześnie *brzegiem*,
4. Kwadraty S, których żaden bok nie jest jednocześnie b*rzegiem.*

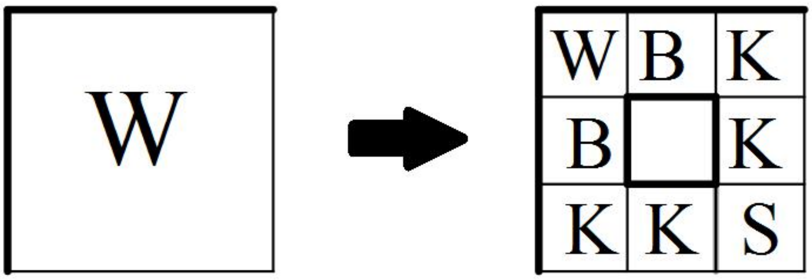
Zauważmy, że mamy 4 kwadraty W, 16 kwadratów B, 40 kwadratów K oraz 4 kwadraty S, co daje w sumie 64 kwadraty. Zwróćmy uwagę, że taka liczba kwadratów wynika z samej procedury tworzenia kolejnych kroków Dywanu Sierpińskiego:
Dany kwadrat jest dzielony na 9 kwadratów, z czego jedną z nich (środkowy kwadrat) się usuwa, w związku z czym w każdym następnym kroku mamy 8 razy więcej kwadratów niż w kroku poprzednim. Prawdziwe jest zatem twierdzenie:

Twierdzenie 1.1

$$W_n + B_n + K_n + S_n = 8^n$$

Gdzie: *n*-numer kroku, W_n, B_n, K_n, S_n, -ilości odpowiednich kwadratów w *n-tym* kroku.

Konsekwencja natury fraktalnej



(Rysunek 4.1 Przemiana Kwadratu *W*.)

Można zauważyć, że kwadrat W_1 został podzielony w drugim kroku dokładnie na 1 kwadrat W_2, 2 kwadraty B_2, 4 kwadraty K_2 i 1 kwadrat S_2, (co pokazuje rysunek 4.1). Należy również zobaczyć, że kwadrat W_2 Zostanie podzielony na dokładnie taką samą liczbę kwadratów trzeciego kroku. Jest to obserwacja nietrywialna, która w połączeniu z fraktalną naturą Dywanu Sierpińskiego prowadzi do sformułowania następującego twierdzenia:

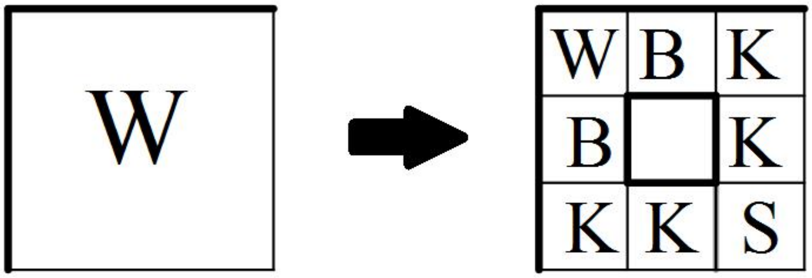
Twierdzenie 2.1

Każdy kwadrat danego rodzaju zostanie podzielony w następnym kroku w taki sam, charakterystyczny dla jego rodzaju sposób.

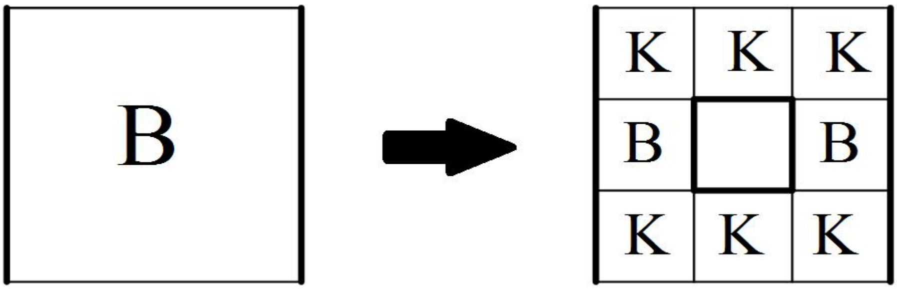
Oznacza to, że każdy kwadrat W_n zawsze zostanie podzielony na 1 kwadrat W_{n+1}, 2 kwadraty B_{n+1}, 4 kwadraty K_{n+1} i 1 kwadrat S_{n+1}. Analogicznie sprawa ma się dla kwadratów B, K, i S.

Podziały każdego z kwadratów zostały przedstawione na rysunkach (Rysunki 4.2-4.5), oraz w zestawieniu poniżej.

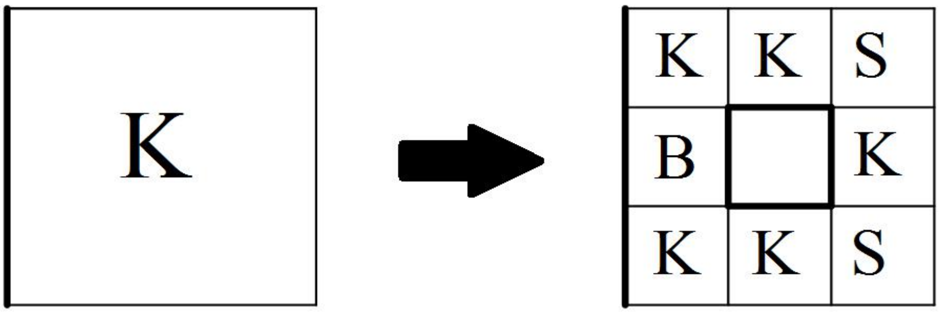
$$W_n \to W_{n+1} + 2B_{n+1} + 4K_{n+1} + S_{n+1}$$
$$B_n \to 2B_{n+1} + 6K_{n+1}$$
$$K_n \to B_{n+1} + 5K_{n+1} + 2S_{n+1}$$
$$S_n \to 4K_{n+1} + 4S_{n+1}$$



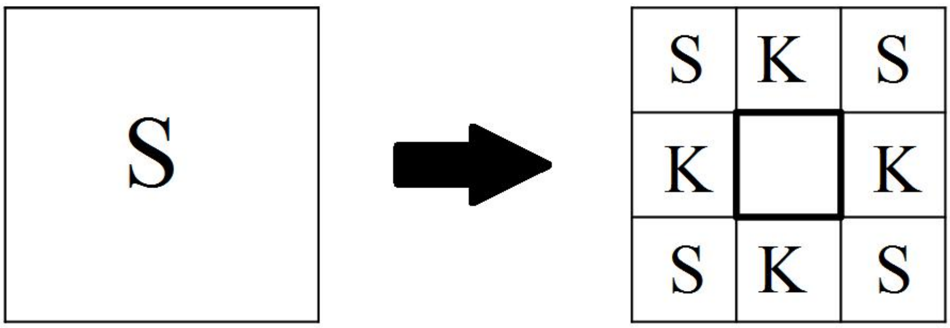
(Rysunek 4.2 Przemiana Kwadratu *W*.)



(Rysunek 4.3 Przemiana Kwadratu *B*.)



(Rysunek 4.4 Przemiana Kwadratu *K*.)



(Rysunek 4.5 Przemiana Kwadratu *S*.)

Wzory rekurencyjne

Od znajomości natury przejść konkretnych kwadratów już tylko krok do opracowania wzorów rekurencyjnych, które opisywałyby liczbę kwadratów danego rodzaju w kroku n, w zależności od ilości kwadratów, z których mogą one powstawać w kroku n-1.
Wzory te prezentują się następująco:

Twierdzenie 3.1

$$W_n = W_{n-1} = 4$$
$$B_n = 2B_{n-1} + K_{n-1} + 2W_{n-1}$$
$$K_n = 6B_{n-1} + 5K_{n-1} + 4S_{n-1} + 4W_{n-1}$$
$$S_n = 2K_{n-1} + 4S_{n-1} + W_{n-1}$$

Przekształcenie rekurencji

Wzory rekurencyjne posiadają pewną wadę, mianowicie obliczenie liczby kwadratów w danego rodzaju w kroku n wymaga znajomości ich liczby w kroku poprzednim, co znacznie utrudnia obliczenia. Należy więc, korzystając z układu równań rekurencyjnych, wyprowadzić równania nie wymagające rekurencji.

$$W_n = W_{n-1} = 4$$
$$B_n = 2B_{n-1} + K_{n-1} + 2W_{n-1}$$
$$K_n = 6B_{n-1} + 5K_{n-1} + 4S_{n-1} + 4W_{n-1}$$
$$S_n = 2K_{n-1} + 4S_{n-1} + W_{n-1}$$
$$W_n + B_n + K_n + S_n = 8^n$$

Dany jest powyższy układ równań. Można zauważyć, że:

$$K_n - S_n = 6B_{n-1} + 5K_{n-1} + 4S_{n-1} + 4W_{n-1} - 2K_{n-1} - 4S_{n-1} - W_{n-1} =$$
$$= 6B_{n-1} + 3K_{n-1} + 3W_{n-1} = 3(2B_{n-1} + K_{n-1} + 2W_{n-1}) - 3W_{n-1} =$$
$$= 3B_n - 3W_n = 3B_n - 12$$

I dalej:

$$-S_n = 3B_n - 12 - K_n$$
$$S_n = K_n + 12 - 3B_n$$
$$W_n = 4$$

A więc:

$$4 + B_n + K_n + S_n = 8^n$$
$$S_n = K_n + 12 - 3B_n$$
$$4 + B_n + K_n + K_n + 12 - 3B_n = 8^n$$
$$16 + 2K_n - 2B_n = 8^n$$
$$8 + K_n - B_n = 4 \cdot 8^{n-1}$$
$$K_n = 4 \cdot 8^{n-1} - 8 + B_n$$
$$S_n = 4 \cdot 8^{n-1} - 8 + B_n + 12 - 3B_n = (-2B_n) + 4 \cdot 8^{n-1} + 4$$

Zauważmy, że skoro:

$$B_n = 2B_{n-1} + K_{n-1} + 8$$
$$K_{n-1} = 4 \cdot 8^{n-2} - 8 + B_{n-1}$$

To po podstawieniu:

$$B_n = 3B_{n-1} + 4 \cdot 8^{n-2}$$

Jest to kolejny wzór rekurencyjny, zwróćmy jednak uwagę na jego charakter:

$$B_1 = 4$$

$$B_2 = 3^1 \cdot 4 + 4 \cdot 8^0$$

$$B_3 = 3(3^1 \cdot 4 + 4 \cdot 8^0) + 4 \cdot 8^1 = 3^2 \cdot 4 + 3^1 \cdot 4 \cdot 8^0 + 3^0 \cdot 4 \cdot 8^1$$

$$B_4 = 3(3^2 \cdot 4 + 3^1 \cdot 4 \cdot 8^0 + 3^0 \cdot 4 \cdot 8^1) =$$

$$= 3^3 \cdot 4 + 3^2 \cdot 4 \cdot 8^0 + 3^1 \cdot 4 \cdot 8^1 + 3^0 \cdot 4 \cdot 8^2$$

$$B_n = 4(3^{n-1} + 3^{n-2} \cdot 8^0 + 3^{n-3} \cdot 8^1 ... + 3^0 \cdot 8^{n-2})$$

Po wyłączeniu przed nawias 3^{n-2}dostajemy:

$$B_n = 4 \cdot 3^{n-2}(3^1 + 3^0 \cdot 8^0 + 3^{-1} \cdot 8^1 + 3^{-2} \cdot 8^2 ... + 3^{2-n} \cdot 8^{n-2})$$

Mamy więc równanie zawierające pewną sumę, którą możemy zapisać jako:

$$B_n = 4 \cdot 3^{n-2}(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{8^k}{3^k} + 3)$$

Z uwagi na to, że w równaniu pojawia się szereg geometryczny, to jego sumę

możemy rozumieć jako:

$$\frac{1 - \frac{8^{n-2}}{3^{n-2}}}{1 - \frac{8}{3}}$$

Czyli wzór przedstawia się tak:

$$B_n = 4 \cdot 3^{n-2} \left(\frac{1 - \frac{8^{n-2}}{3^{n-2}}}{1 - \frac{8}{3}} + 3 \right)$$

Co po serii kolejnych przekształceń daje nam:

$$B_n = 16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5})$$

(Przekształcenia te nie znalazły się w pracy z racji tego, iż jest to po prostu skracanie powyższego wzoru, nie wymagające żadnych dodatkowych spostrzeżeń.)

Teraz należy jeszcze sprecyzować wzory na K_n i S_n:

$$K_n = B_n + 4 \cdot 8^{n-1} - 8 = 16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}) + 4 \cdot 8^{n-1} - 8$$

$$S_n = (-2B_n) + 4 \cdot 8^{n-1} + 4 = 4 \cdot 8^{n-1} + 4 - 32(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5})$$

Ostatecznie wzory prezentują się więc następująco:

Twierdzenie 4.1

$$W_n = 4$$

$$B_n = 16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5})$$

$$K_n = 16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}) + 4 \cdot 8^{n-1} - 8$$

$$S_n = 4 \cdot 8^{n-1} - 32(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}) + 4$$

Rozwiązanie problemu

Dysponując powyższymi wzorami możemy w końcu odpowiedzieć na postawione na początku pytanie. Przypomnijmy, że dotyczyło ono łącznego pola kwadratów danego rodzaju.

Wiemy, że długość boku całego fraktala jest równa 1. W drugim kroku każdy bok dzielony jest na 3 części, podobnie jak w każdym następnym, czyli długość boku kwadratu to 3^{-n} a więc jego pole to 3^{-2n}. Łączne pola kwadratów danego typu to więc:

Dla W $3^{-2n} \cdot 4$

Dla B $3^{-2n} \cdot (16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}))$

Dla K $3^{-2n} \cdot (16(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}) + 4 \cdot 8^{n-1} - 8)$

Dla S $3^{-2n} \cdot (4 \cdot 8^{n-1} - 32(\frac{2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}}{5}) + 4)$

Chcielibyśmy także wiedzieć, jaką część całego fraktala zajmują poszczególne kwadraty, jest to zwyczajnie iloraz pola poszczególnych kwadratów oraz pola całości:

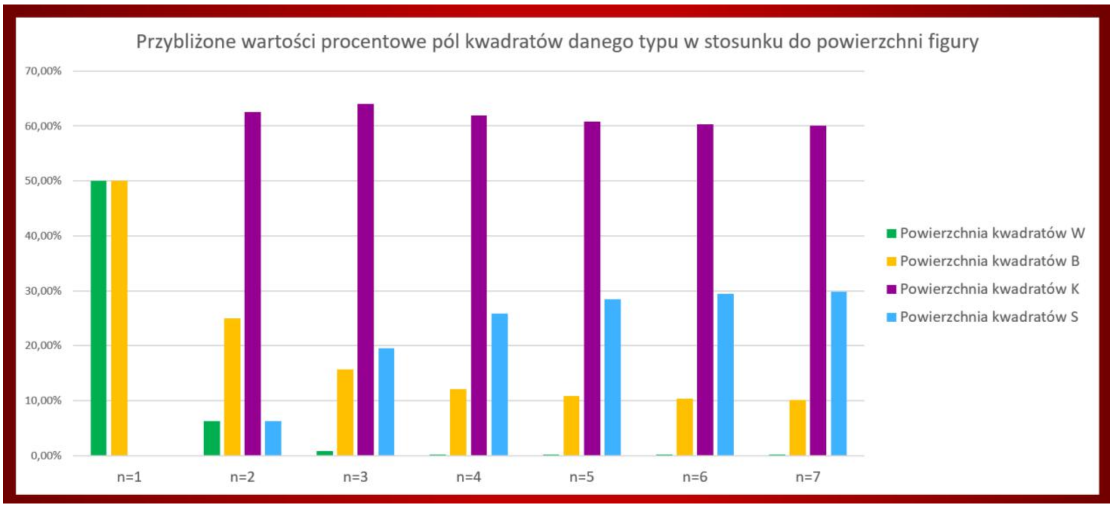
$$Dla\ W\colon \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-2n} \cdot 4}{\left(\frac{8}{9}\right)^n} = 0$$

$$Dla\ B\colon \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-2n} \cdot 16 \cdot (2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1})}{5 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$Dla\ K\colon \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{16}{5} \cdot (2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}) + 4 \cdot 8^{n-1} - 8) \cdot 3^{-2n}}{\left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$Dla\ S\colon \lim_{n\to\infty} \frac{(4 \cdot 8^{n-1} - \frac{32}{5} \cdot (2 \cdot 8^{n-2} + 3^{n-1}) + 4) \cdot 3^{-2n}}{\left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

A tak prezentują się procenty, po 7 kroku różnice były minimalne:



Zakończenie

Z pomocą matematyki udało nam się rozwiązać zadanie oraz odkryć jedną z własności Dywanu Sierpińskiego. Można teraz przenieść problem wymiar wyżej, na np.: Kostkę Mengera, albo na inną figurę fraktalną, np.: Trójkąt Sierpińskiego. Z pewnością jednak sam Dywan skrywa jeszcze wiele tajemnic, które należy odkryć.