

Świat według krzywych



Maciej Płasiński, Grzegorz Ramus i Piotr Wyłupek

uczniowie klasy 5B

Szkoły Podstawowej nr 64 w Krakowie

ul. Sadzawki 1 31-465 Kraków

adres e-mail sp64krakow@pro.onet.pl tel. 12 411 15 28

Opiekun

Teresa Sklepek e-mail tmat@wp.pl

Rok szkolny 2025/2026

Zaczął się od koła. W czwartej klasie kolega opowiadał nam o okręgu i kole. Jego starszy brat powiedział mu, jak obliczyć pole koła i długość okręgu. Zainteresowaliśmy się, czy są jeszcze inne figury tego typu. Wpisaliśmy w wyszukiwarce hasło - okrąg i w Wikipedii pojawiła się następna nazwa - elipsa.

Okrąg jest szczególnym przypadkiem [elipsy](#) o równych półosiach.

Sprawdziliśmy, co można przeczytać o elipsie:

Elipsa przypadek [ograniczonej krzywej stożkowej](#), czyli [krzywej](#) będącej częścią wspólną [powierzchni stożkowej](#) oraz przecinającej ją [płaszczyzny](#).

Pojawiło się po raz pierwszy słowo **krzywa**. W Wikipedii znaleźliśmy spis krzywych:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Lista_krzywych

Podobały się nam nazwy niektórych z nich.

Piotrek wybrał krzywe: cykloida, hipotrochoida, klotoida i spirala/krzywa Fermata oraz spirala Archimedes.

Maciek zainteresował się: asteroidą, krzywą motylkową, trochoidą,

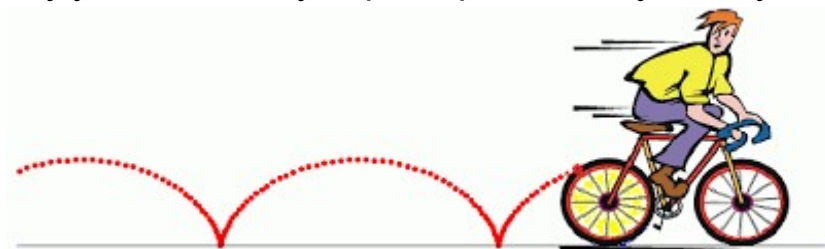
Grzesiek zaciekał się: kardiodą, krzywymi stożkowymi, krzywą Hilberta i krzywą Peana.

Postanowiliśmy dowiedzieć się o nich więcej. Szukaliśmy ciekawych zdjęć. Oto jedno z nich: Skrzyżowanie dróg stanowych w Los Angeles czyli największy węzeł drogowy na świecie. Wykorzystaliśmy je jako ilustrację strony tytułowej.



Cykloida

Piotrek znalazł informację, że cykloida to krzywa, jaką zakreśla punkt leżący na obwodzie koła, który toczy się bez poślizgu po prostej. W Wikipedii były trudne wzory i opis. Spodobał się nam rysunek:



Zainspirował nas do wykonania doświadczenia. Wycięliśmy z grubej tektury koło o różnych promieniach. Na szkolnych szafkach, które stoją na korytarzu przykleiliśmy duży papier.



W kole zrobiliśmy dziurę w pewnej odległości od brzegu koła. Umieściliśmy tam mazak. Toczyliśmy koło po podłodze, a na papierze

powstała nasza pierwsza cykloida. Pofalowana linia nie stykała się z dolnym brzegiem papieru.

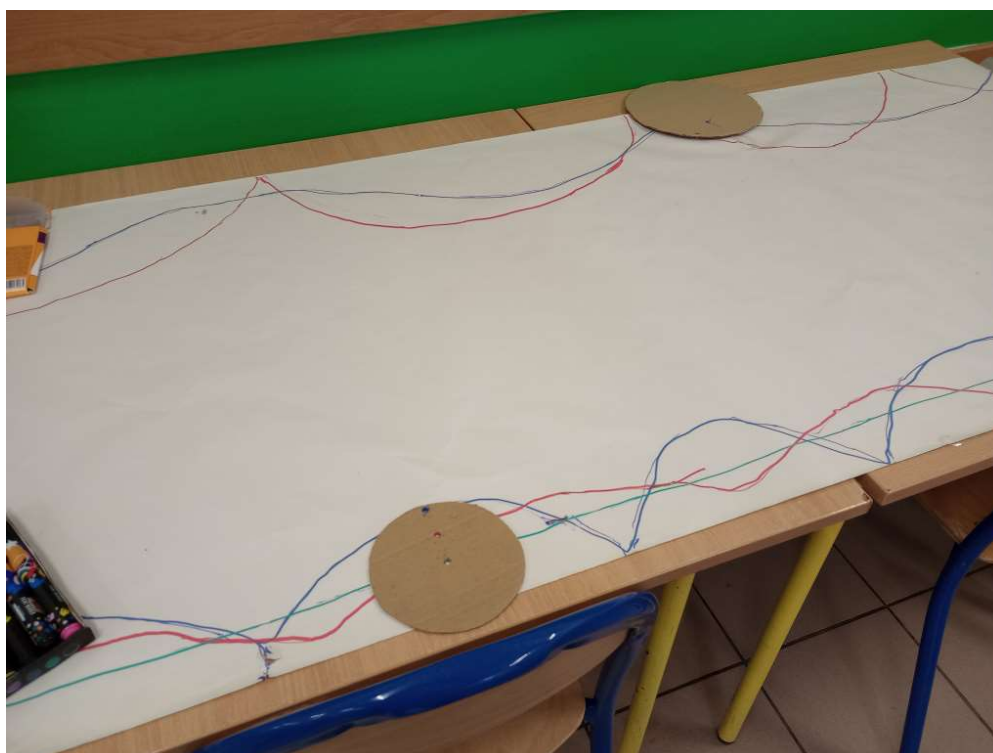




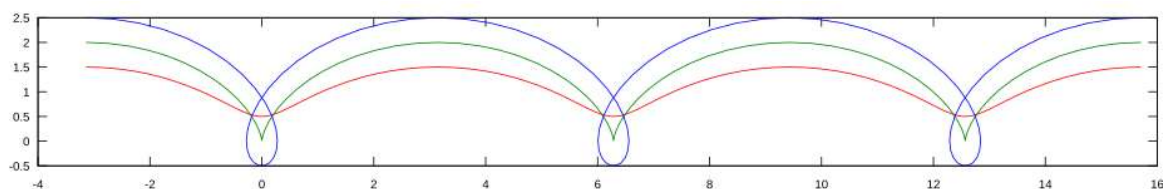
Druga - niebieska linia powstała, gdy mazak umieściliśmy blisko brzegu koła. Tym razem łuki cykloidy dotykały dolnego brzegu papieru.



Trzecia linia powstała, gdy mazak umieściliśmy w środku koła. Piotrek przewidział, że powstanie prosta. Poprawiliśmy te linie, aby były lepiej widoczne.

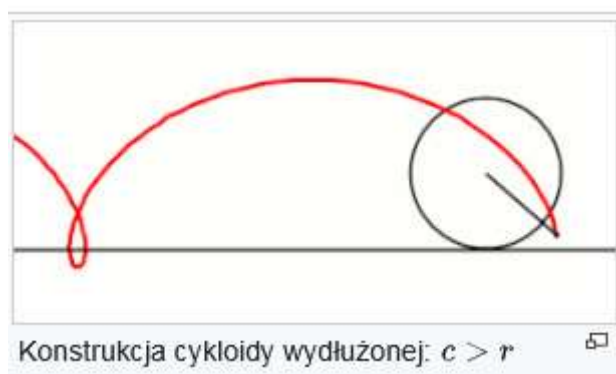


Odwróciliśmy papier do góry nogami i podobne doświadczenie wykonaliśmy z kołem o większym promieniu. Powstały większe łuki. W Wikipedii był rysunek



Nasza pierwsza cycloida jest podobna do czerwonej linii. Jest to ślad, gdy mazak był między środkiem koła, a jego brzegiem. Nasza niebieska linia na zdjęciu jest podobna do zielonej linii z rysunku, gdy mazak był na brzegu koła. Jest to zwykła cycloida. Trzecia linia z rysunku powstałaby,

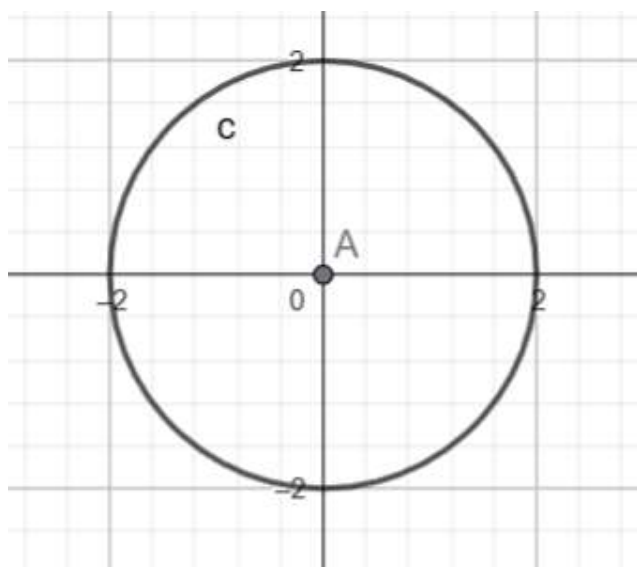
gdyby punkt zostawiający ślad był w większej odległości od środka koła niż długość promienia.



Długość jednego pełnego łuku cykloidy można obliczyć ze wzoru **$8r$** , gdzie r to promień toczącego się koła.

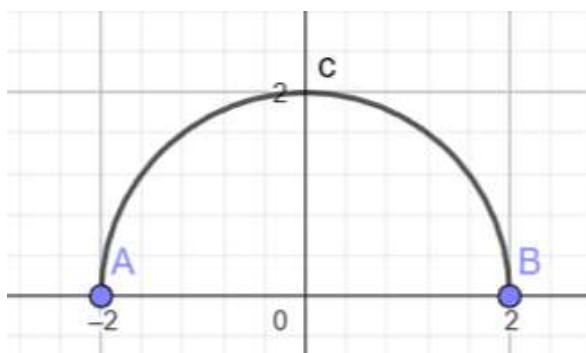
Jedno z naszych kół miało promień $r = 10\text{cm}$, więc długość odpowiedniego łuku cykloidy to 80cm .

Próbowaliśmy narysować cykloidę korzystając z programu GeoGebra. Na początku narysowaliśmy okrąg o środku A i promieniu 2 . Długość tego okręgu to **4π**



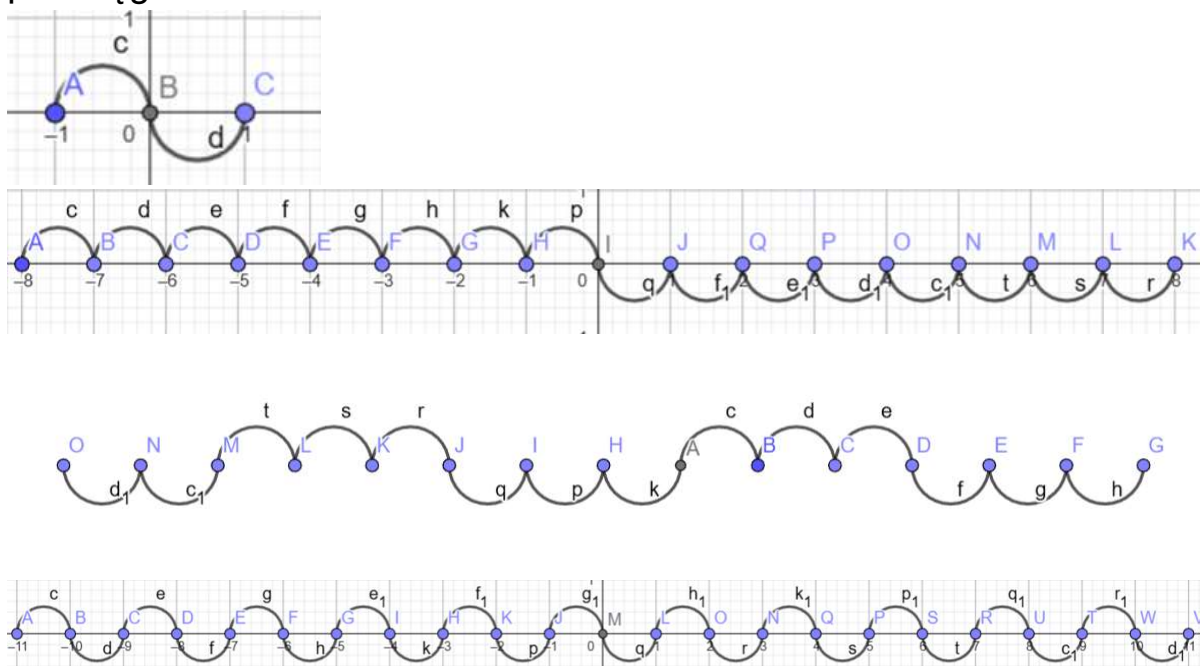
Długość okręgu obliczamy w zależności od długości promienia. Wzór to **$2\pi r$** .

Potem powstał półokrąg przechodzący przez punkty A i B, o promieniu 2.



Długość tego półokręgu o promieniu 2 to **2π** . Wzór na długość półokręgu **πr** .

W programie GeoGebra wykonaliśmy różne krzywe, które powstały z półokręgów.



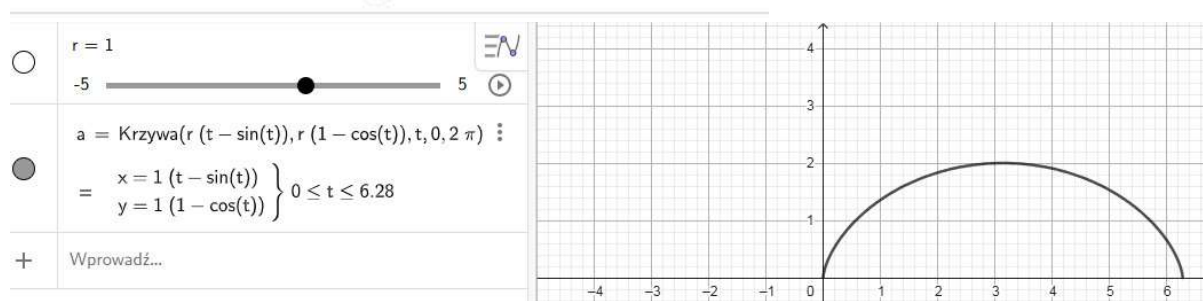
Gdy narysowaliśmy półokręgi jeden obok drugiego, powstała krzywa przypominająca cykloidę.



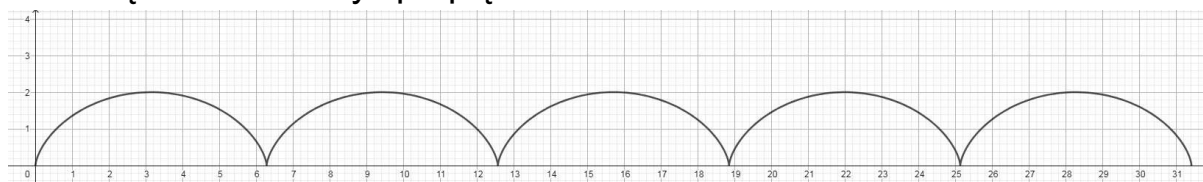
Dzięki AI znaleźliśmy wzór na jeden łuk cykloidy, po jednym obrocie koła

$$a = \text{Krzywa}(r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)), t, 0, 2\pi)$$

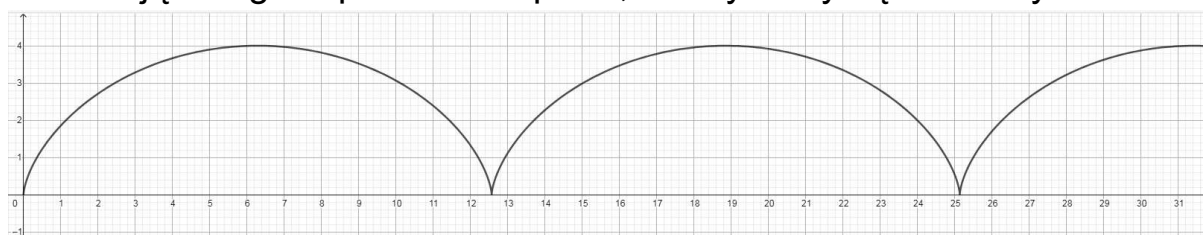
$$= \left. \begin{array}{l} x = 1(t - \sin(t)) \\ y = 1(1 - \cos(t)) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 6.28$$



Wystarczyło zmienić zakres z 2π na 10π i otrzymaliśmy cykloidę złożoną z 5 łuków czyli po pięciu obrotach koła.



Zmieniając długość promienia np $r=2$, łuki cykloidy są dwa razy dłuższe.



Być może cykloida zainspirowała powstanie takiej zabawki.



Cykloidy pojawiły się wg nas na zdjęciach mostów.



<https://pl.aroundus.com/c/276-kamienne-mosty-i-historyczne-akwedukty-europa-azja-budowle-rzymskie>



<https://pl.aroundus.com/c/276-kamienne-mosty-i-historyczne-akwedukty-europa-azja-budowle-rzymskie>

Hipotrochoida

Wzór, który wykorzystaliśmy:

$$((R - r) \cos(t) + h \cos((R - r) / r t), (R - r) \sin(t) - h \sin((R - r) / h t), t, 0, 2\pi)$$

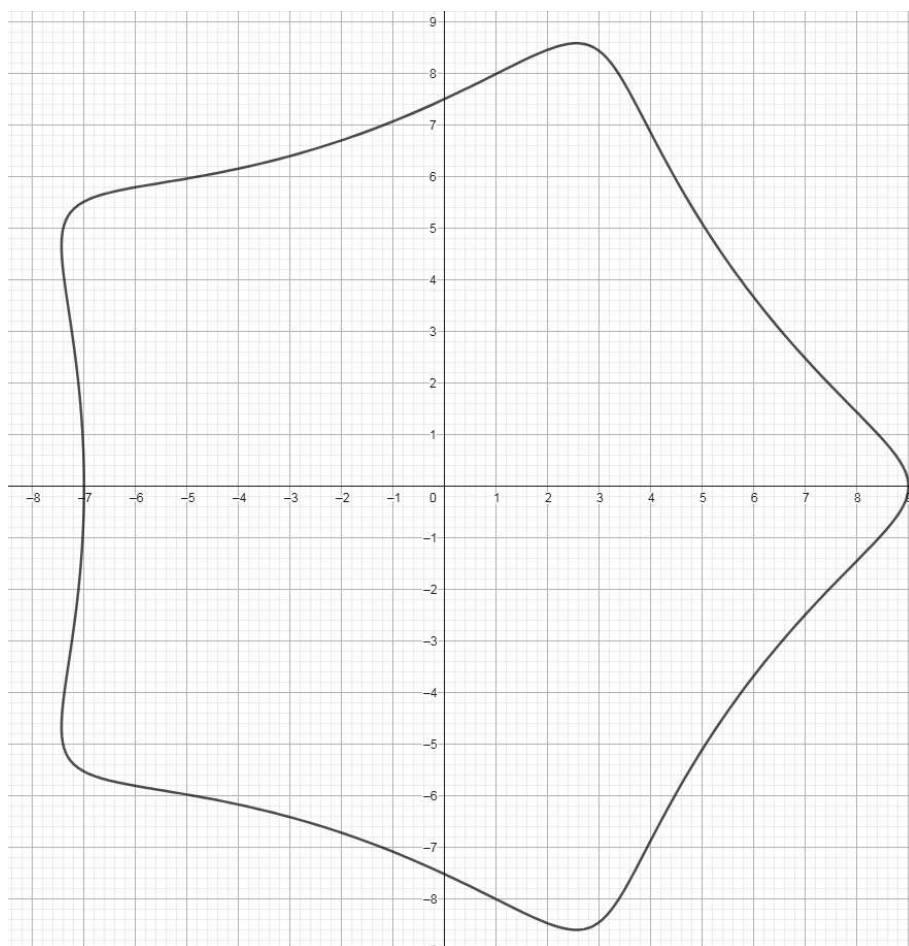
R - promień dużego koła

r - promień małego koła obracającego się wewnątrz dużego koła

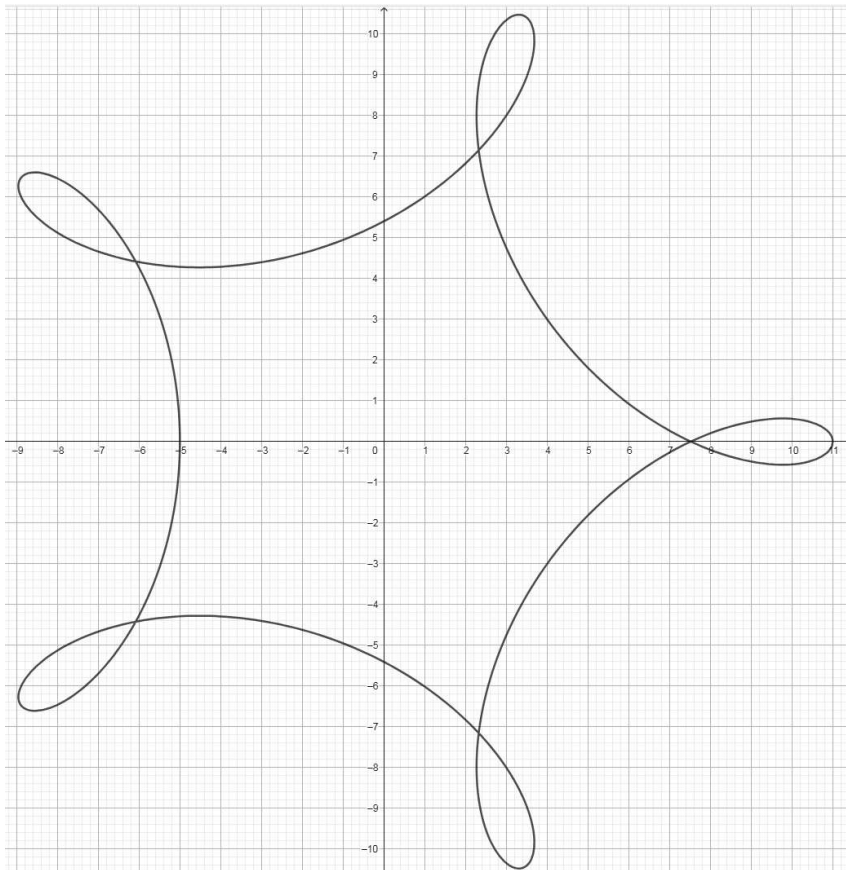
h - odległość punktu od środka koła o promieniu r

dla R= 10, r= 2 i h=1 $r>h$ powstała hipotrochoida skrócona

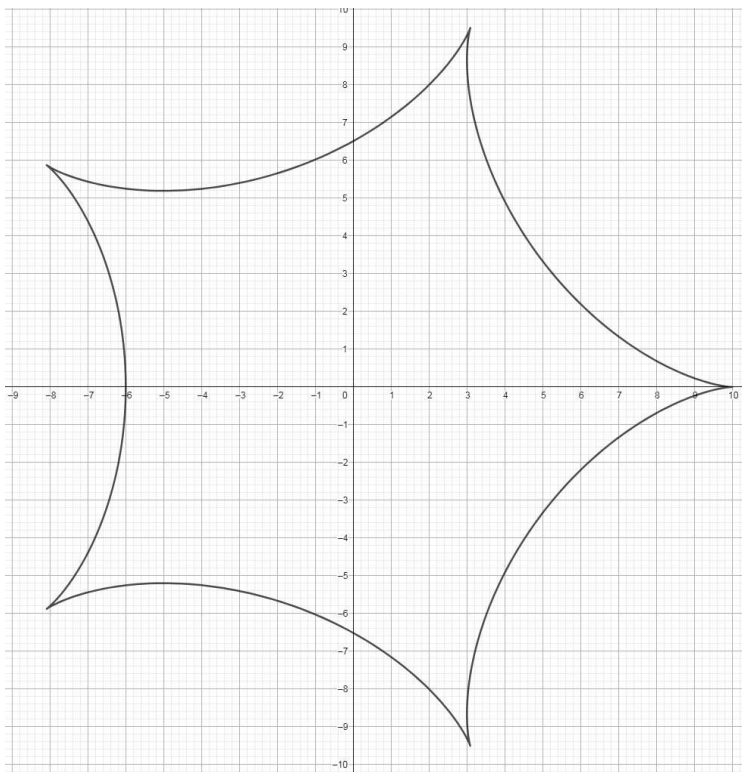
$$((10 - 2) \cos(t) + 1 \cos((10 - 2) / 2 t), (10 - 2) \sin(t) - 1 \sin((10 - 2) / 1 t), t, 0, 2\pi)$$



dla $R= 10$, $r= 2$ i $h=3$ $r<h$ powstała hipotrochoida wydłużona.

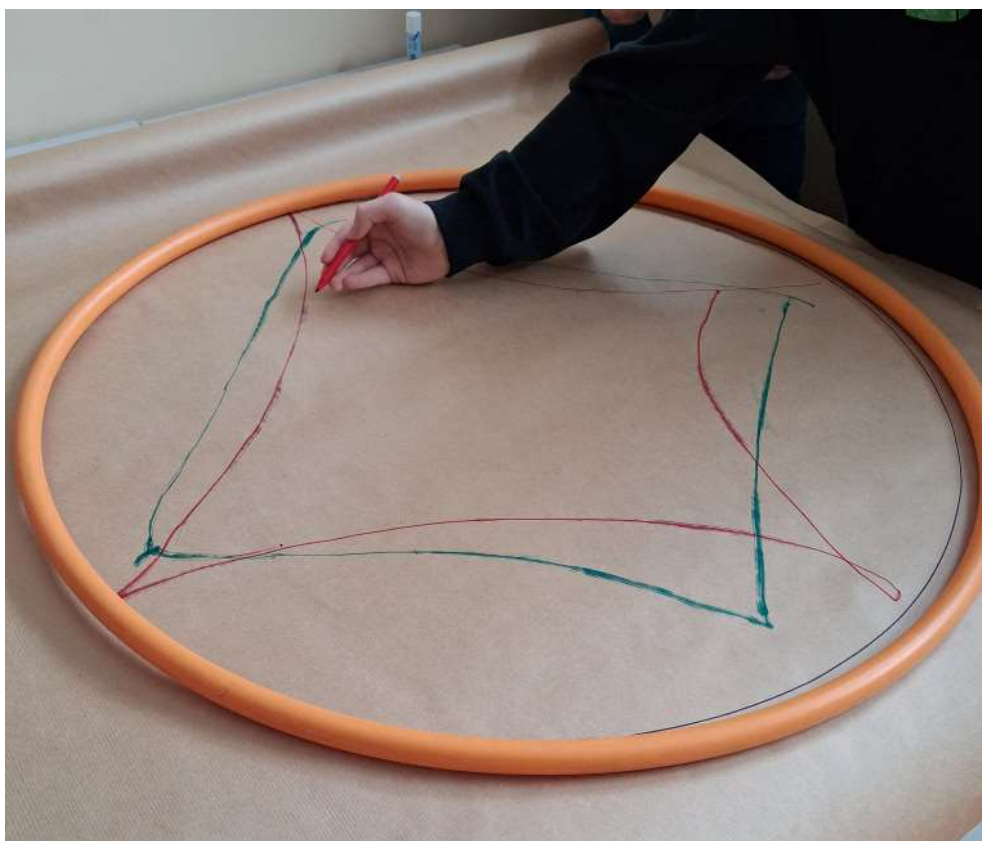


dla $R= 10$, $r= 2$ i $h=2$ $r=h$ powstała hipocykloida



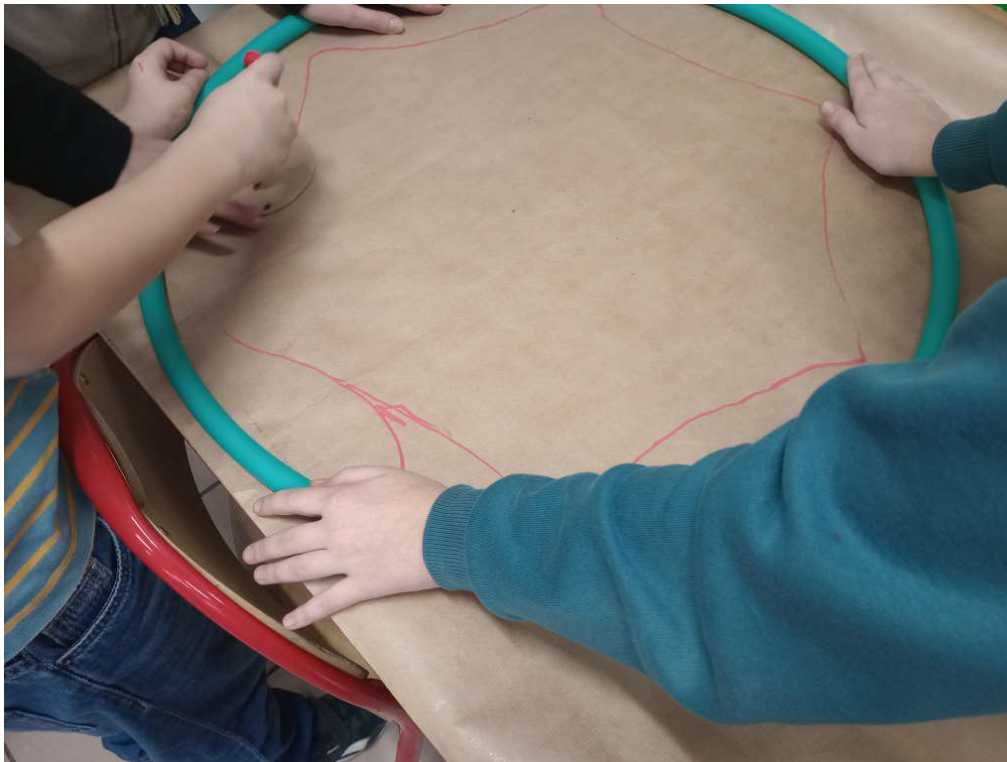
Asteroida

Maciek szukał informacji o asteroidzie. Okazało się, że tak nazywana jest hipocyklopedia, która powstaje przez obrót koła o promieniu cztery razy mniejszym niż promień koła, wewnątrz którego obracamy to małe koło.



Wykorzystaliśmy nasze wycięte koła. Pożyczyliśmy od pana wlefiisty dwa koła hula hop. Akurat pomarańczowe ma promień cztery razy większy niż jedno z naszych wyciętych kólek.

Dla zielonego hula hop najpierw narysowaliśmy czerwoną krzywą, gdy mazak był w pewnej odległości od brzegu koła, które obracaliśmy wewnątrz hula hop.



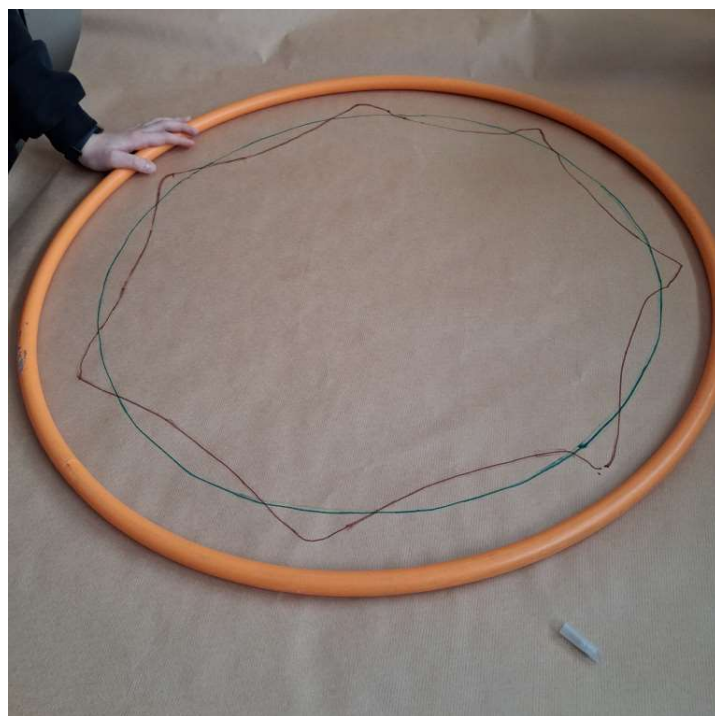
Druga, niebieska linia powstała, gdy mazak obracanego koła był blisko jego brzegu.





Następna próba była z większym kołem hula hop.

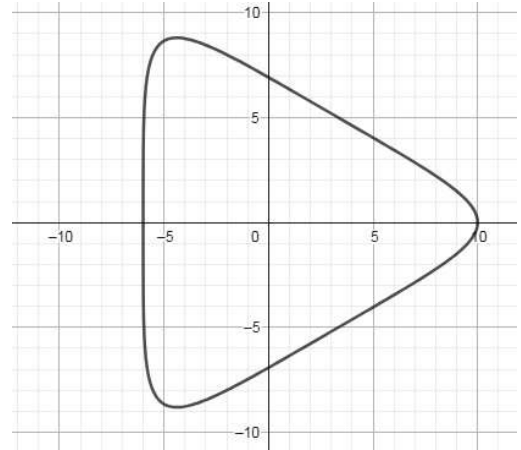




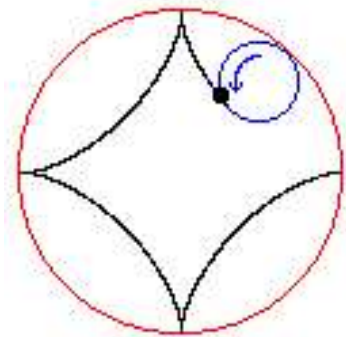
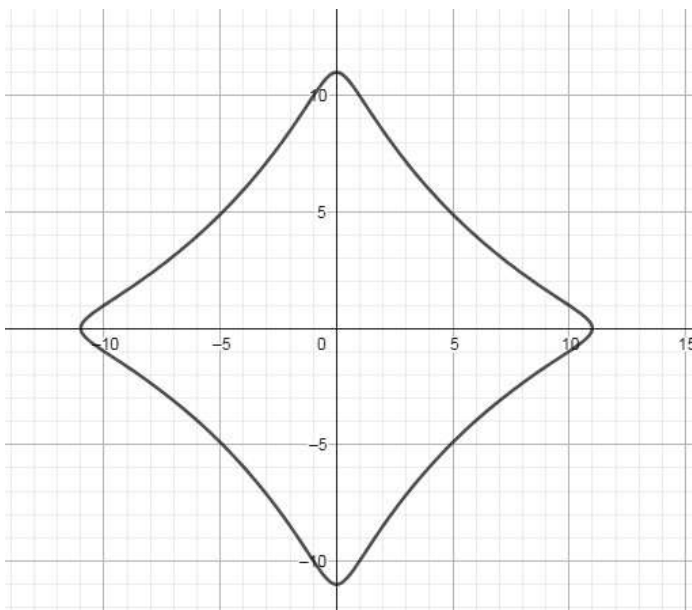
Okazuje się, że wewnątrz dużego koła otrzymujemy więcej lub mniej łuków, w zależności od promienia koła, które obracaliśmy wewnątrz hula hop. Krzywe, które powstały były hipocykloidami.

Hipocykloida

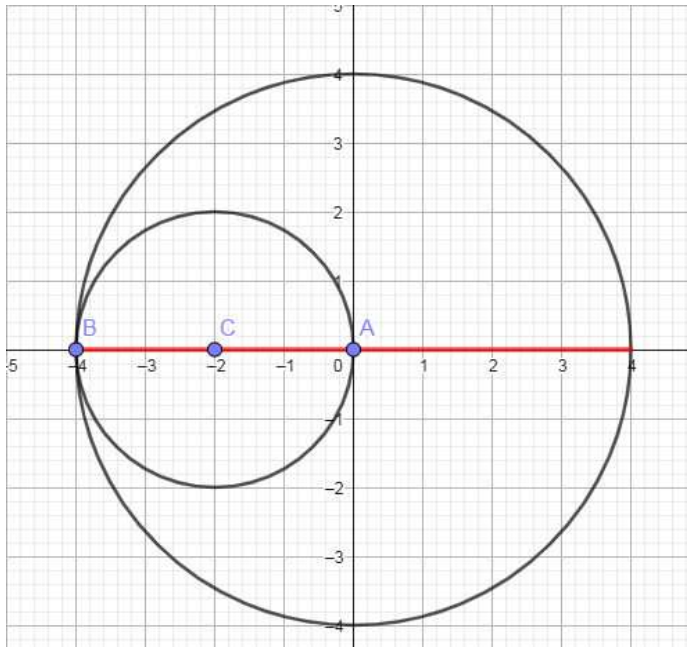
Narysowaliśmy hipocykloidy korzystając z GeoGebry.
Dowiedzieliśmy się, że jeżeli promień małego, obracanego koła jest trzy razy mniejszy niż promień dużego koła, to powstają trzy łuki, a krzywa to deltoida.



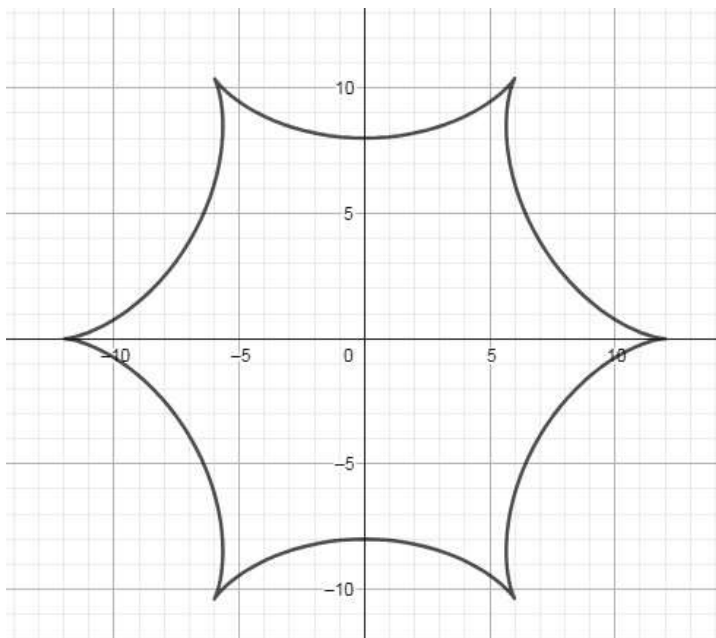
Jeżeli promień małego, obracanego koła jest cztery razy mniejszy niż promień dużego koła, to powstaje asteroida, o której pisał Maciek.



Jeżeli promień małego, obracanego koła jest dwa razy mniejszy niż promień dużego koła, to powstaje odcinek. Na rysunku otrzymaliśmy czerwony odcinek. Okazuje się, że ten przypadek nazywany jest Twierdzeniem Kopernika.

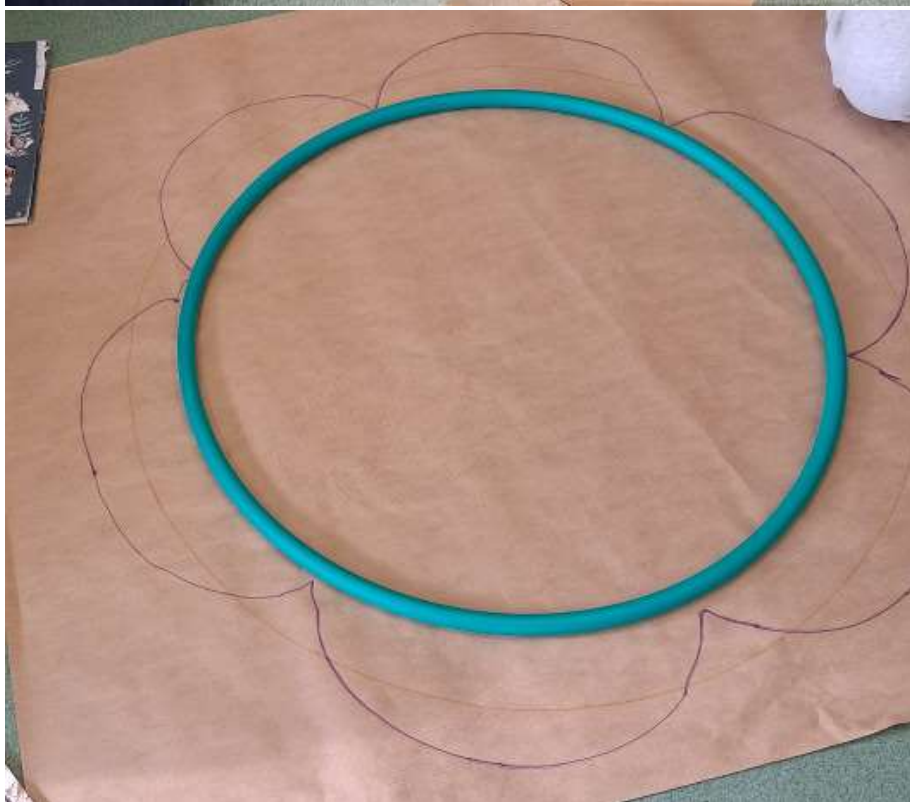
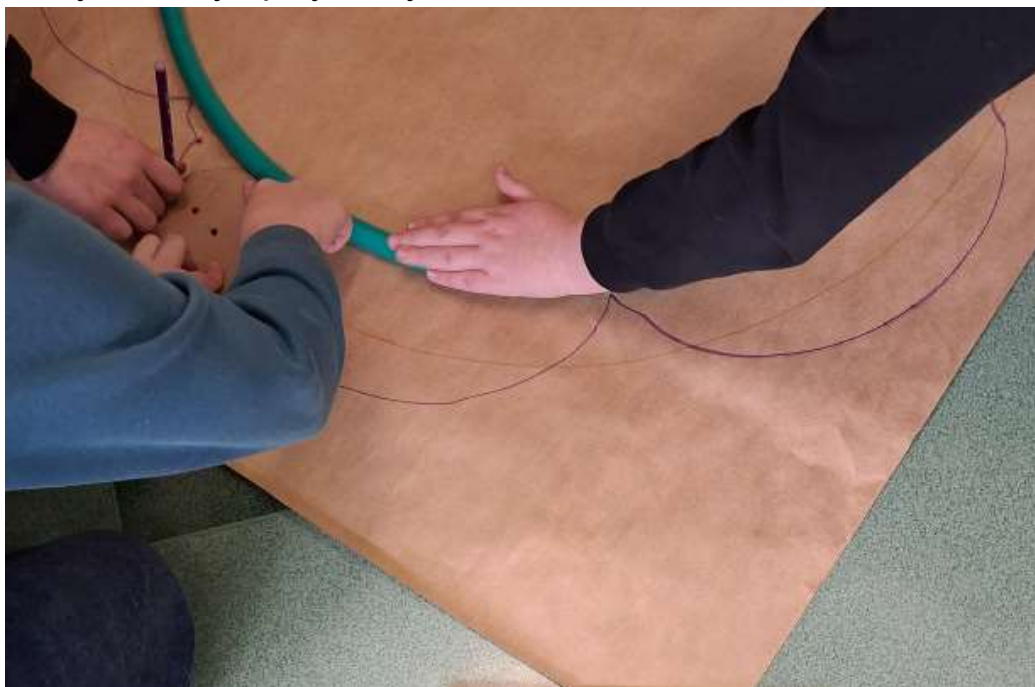


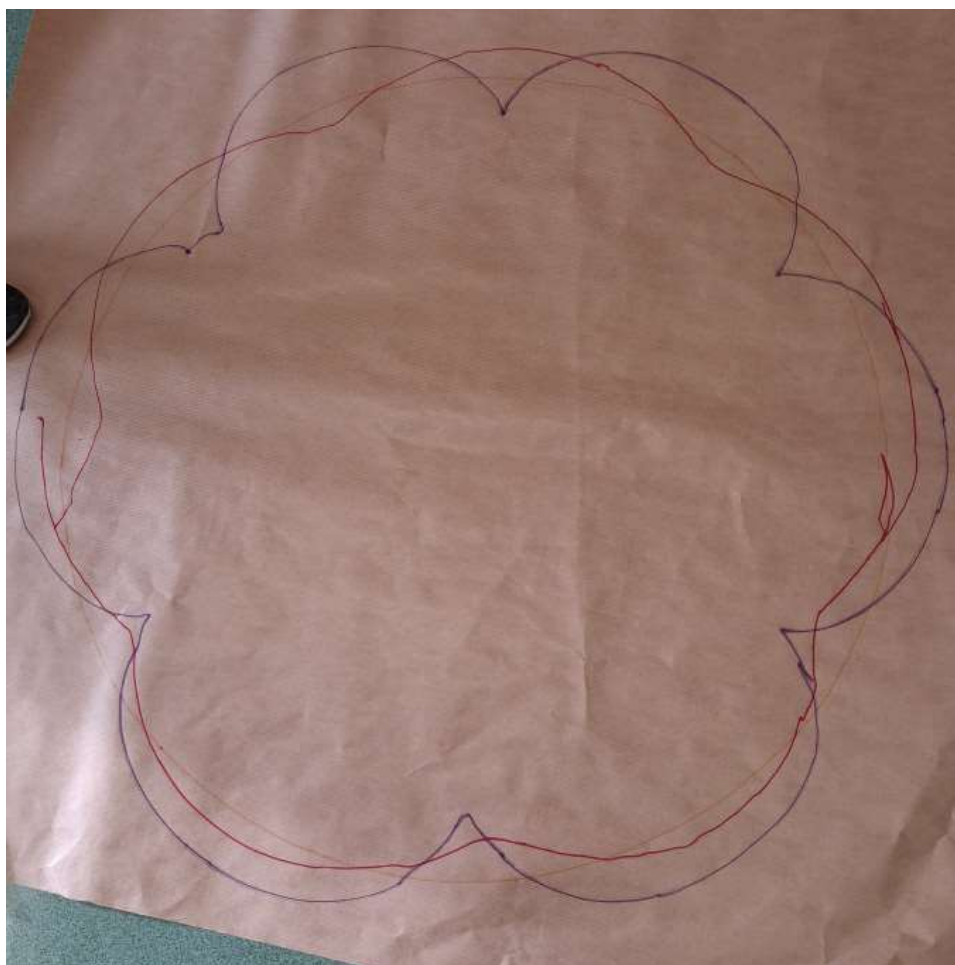
Promień małego koła jest mniejszy 6 razy od dużego - powstaje sześcioramienna "gwiazdka".



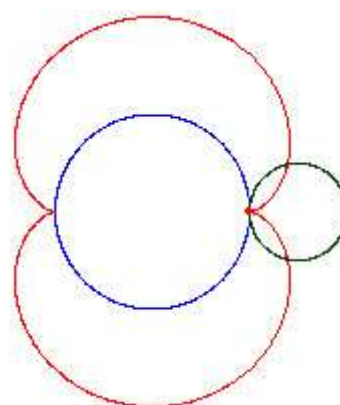
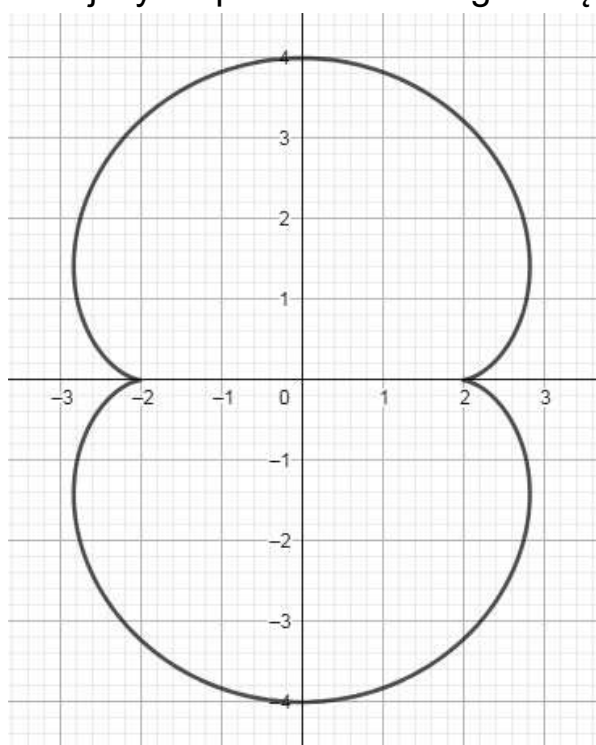
Epicykloida

Wykonaliśmy doświadczenie z toczeniem koła po dużym kole.
Otrzymaliśmy epicykloidy.

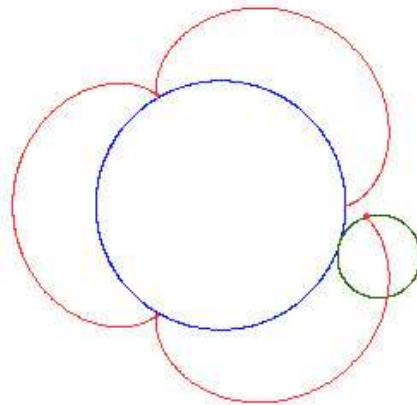
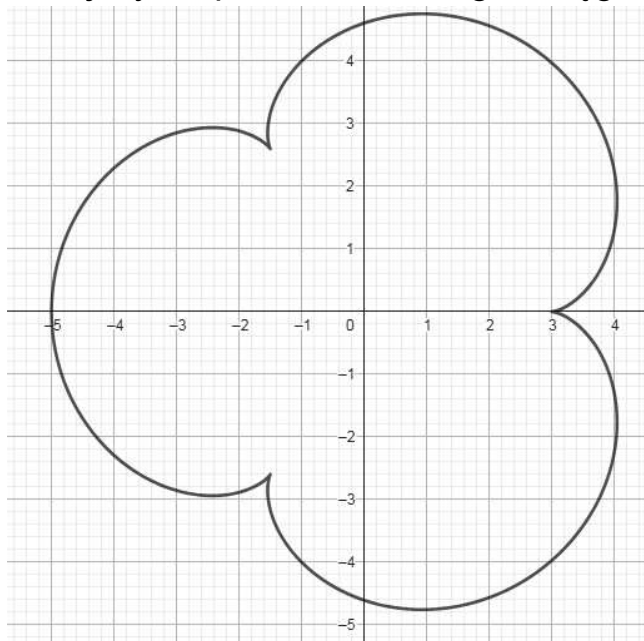




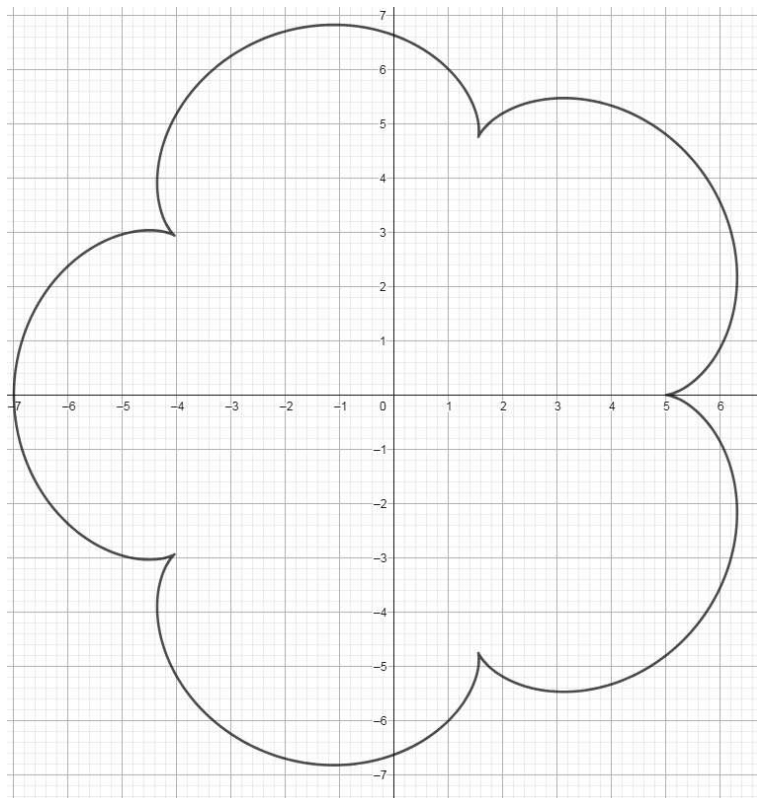
Jeśli promień okręgu toczącego się po dużym okręgu jest dwa razy mniejszy od promienia dużego okręgu, otrzymamy **nefroidę**.



Jeśli promień okręgu toczącego się po dużym okręgu jest trzy razy mniejszy od promienia dużego okręgu, otrzymamy trzy łuki.



Jeśli promień okręgu toczącego się po dużym okręgu jest pięć razy mniejszy od promienia dużego okręgu, otrzymamy pięć łuków.

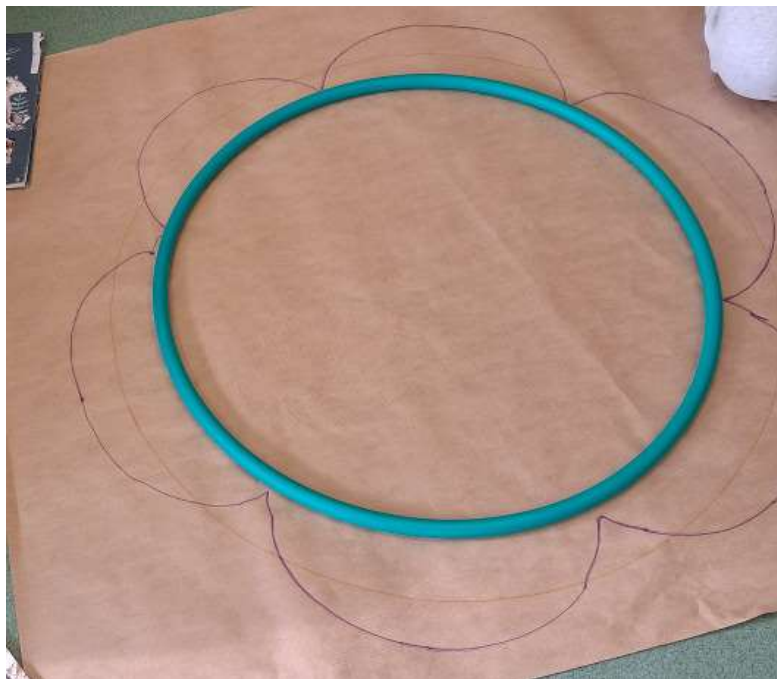


Rondo w Chinach

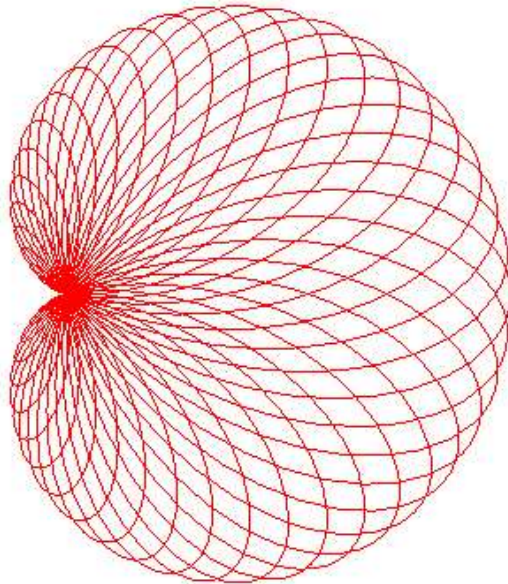


https://home.agh.edu.pl/~zobmat/2017/3_kozlowskijakub/

W naszym doświadczeniu koło hula hop miało promień sześć razy większy od promienia koła, które toczyliśmy i otrzymaliśmy sześć łuków.



Kardioida



Grzesiek znalazł wzór dla kardioidy zwanej krzywą sercową:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$$

Pole ograniczone kardioidą można obliczyć ze wzoru

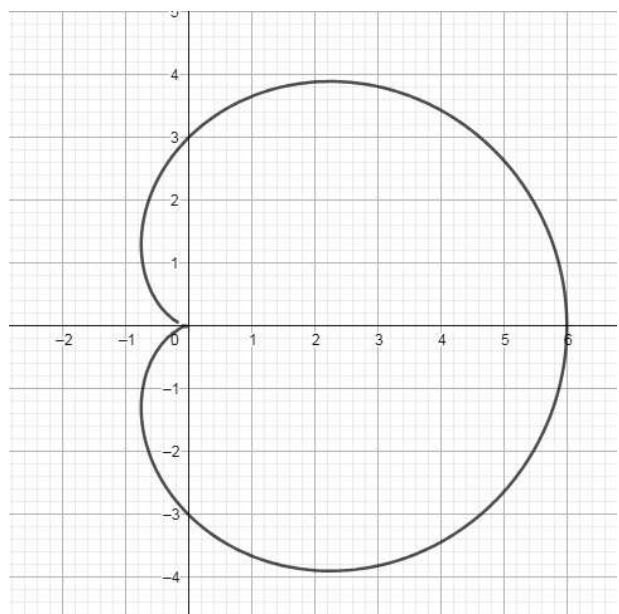
$$\frac{3}{2} \pi a^2$$

obwód $8a$.

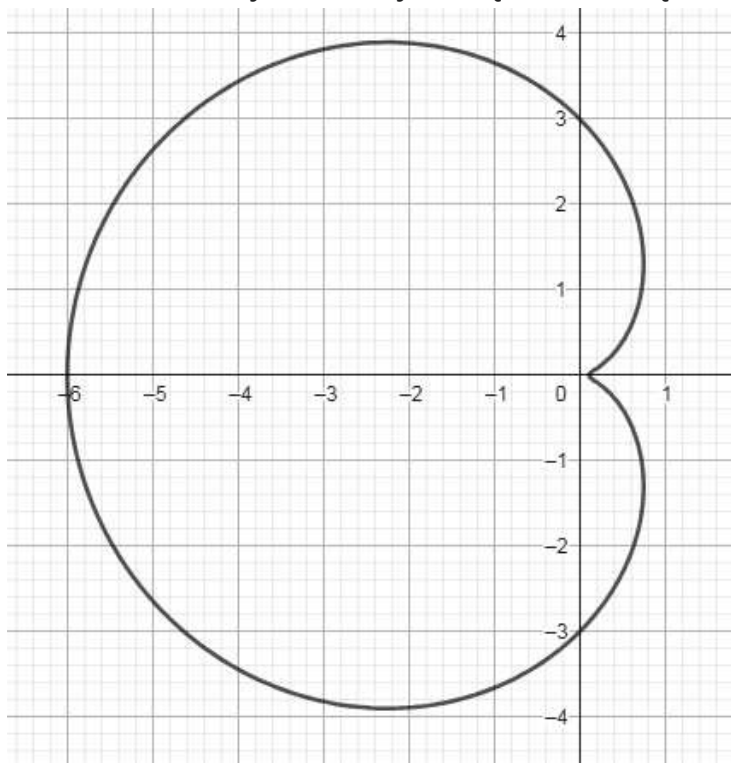
Dla $a=3$

$$(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 3^2 (x^2 + y^2)$$

Obwód tej kardioidy $8 \cdot 3 = 24$



Dla $a = -3$ otrzymaliśmy taką kardioidę.

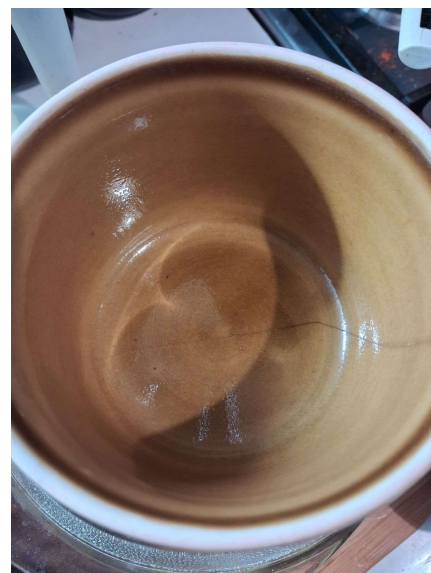


Zrobiliśmy dwa zdjęcia z kardioidą.



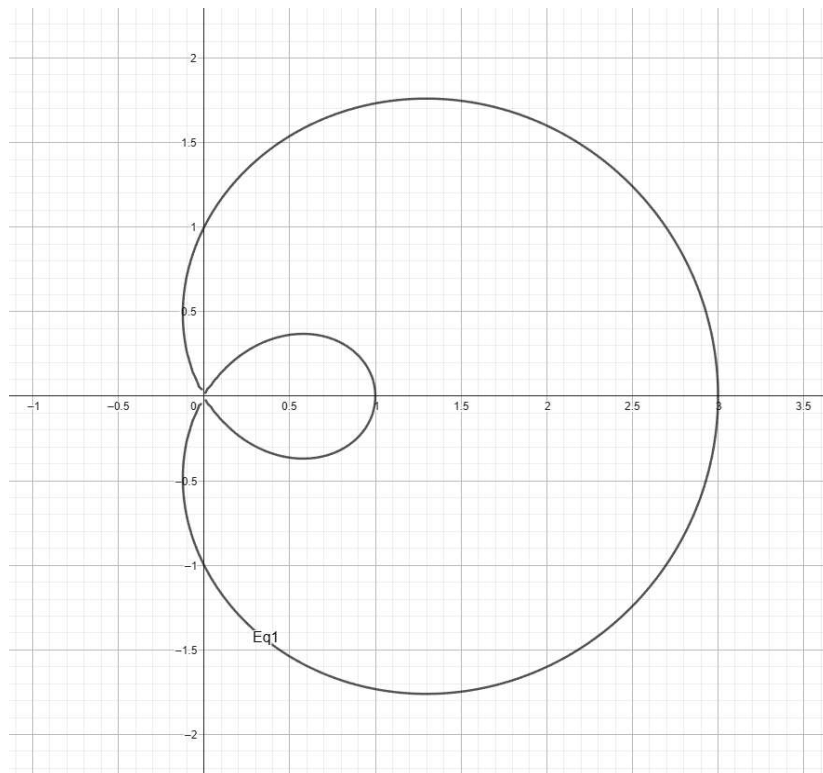
Kardioda w garnku

i

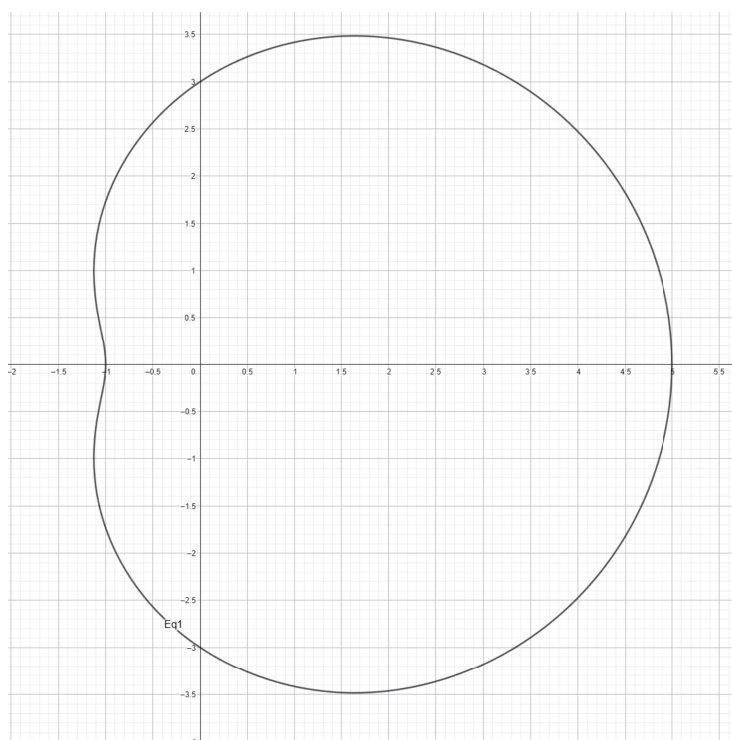


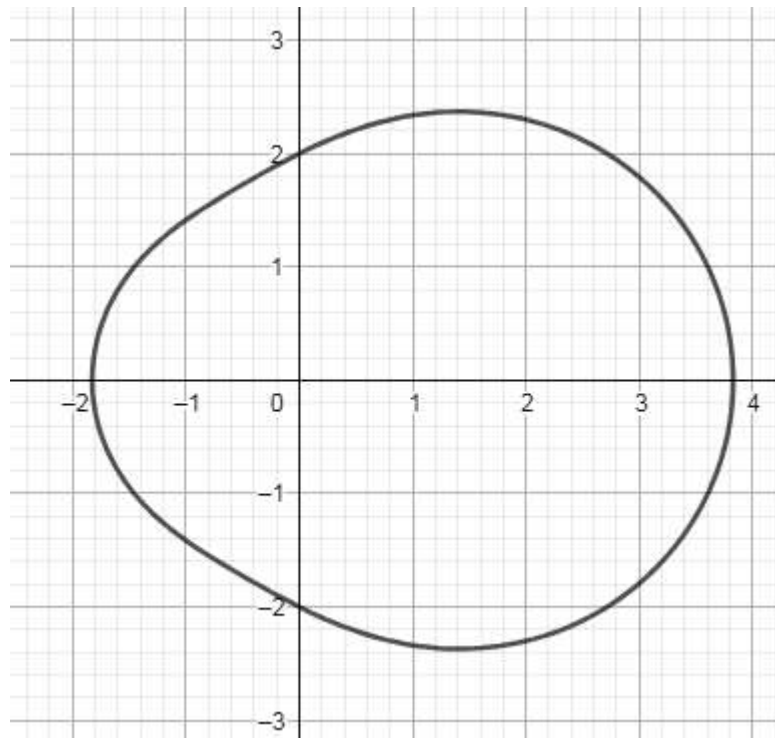
w misce

Zmienialiśmy liczby we wzorze dla kardiody i otrzymaliśmy inne krzywe.

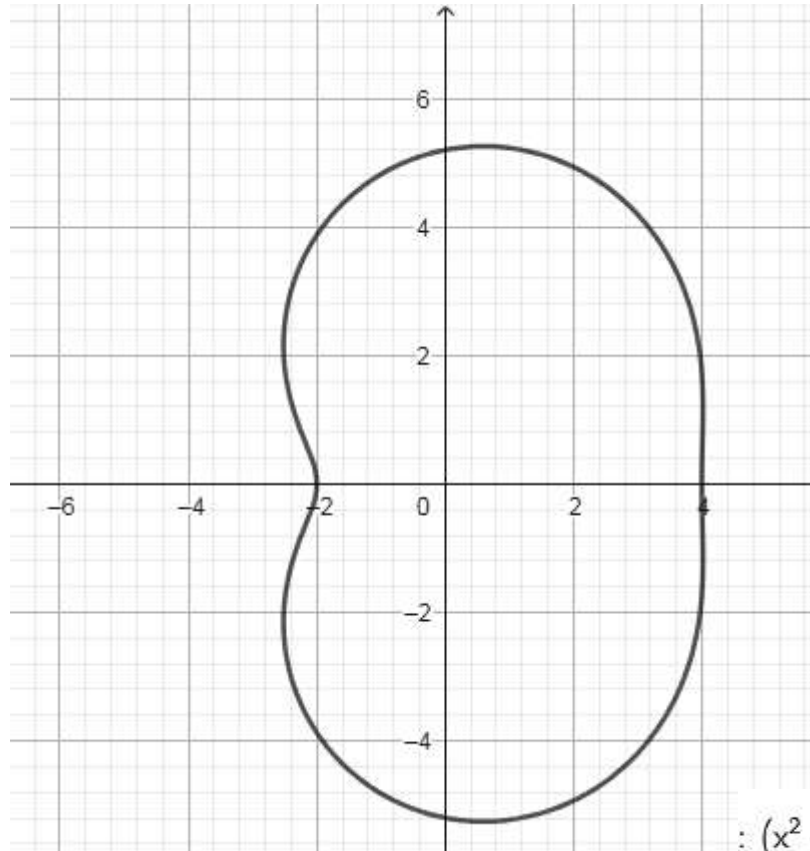


$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 1^2 (x^2 + y^2)$$

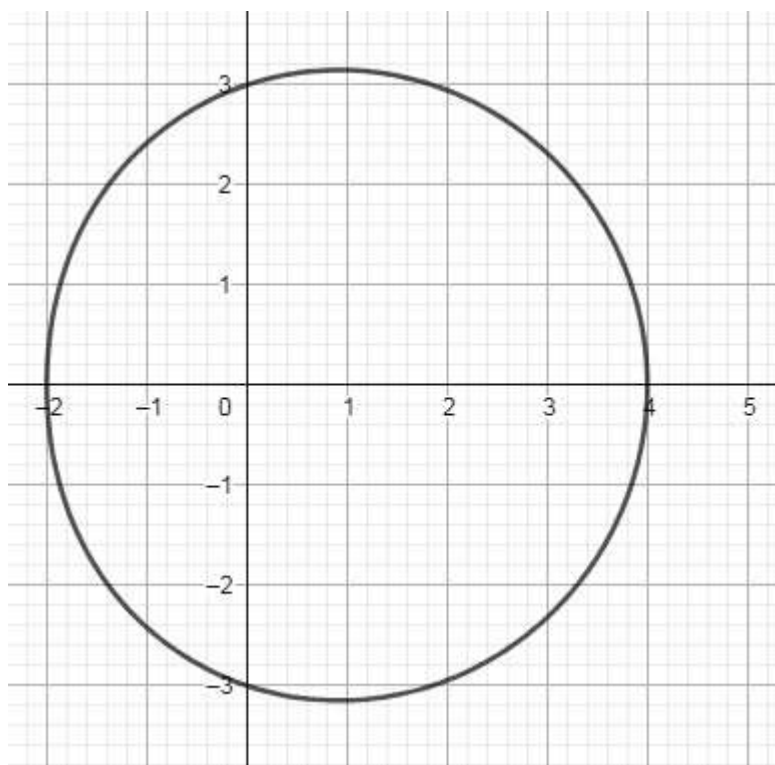




$$(x^2 + y^2 - x)^2 = 2^2 (2x^2 + y^2)$$

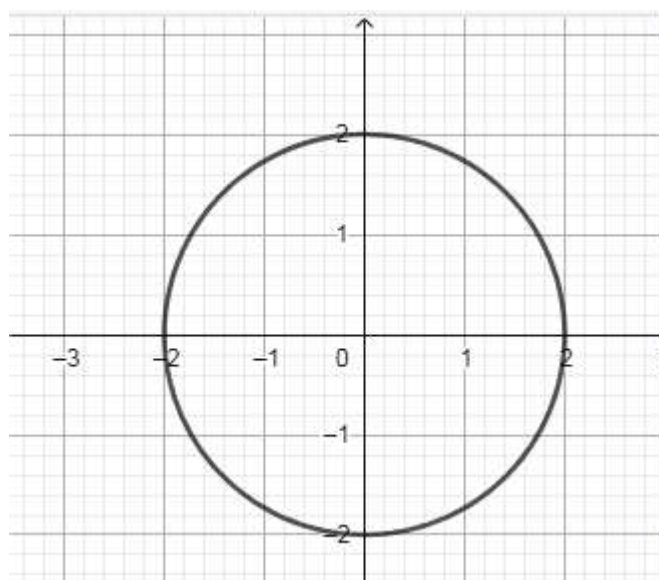


$$: (x^2 + y^2 - x)^2 = 3^2 (x^2 + 3y^2)$$



$$(x^2 + y^2 - x)^2 = 3^2 (x^2 + y^2)$$

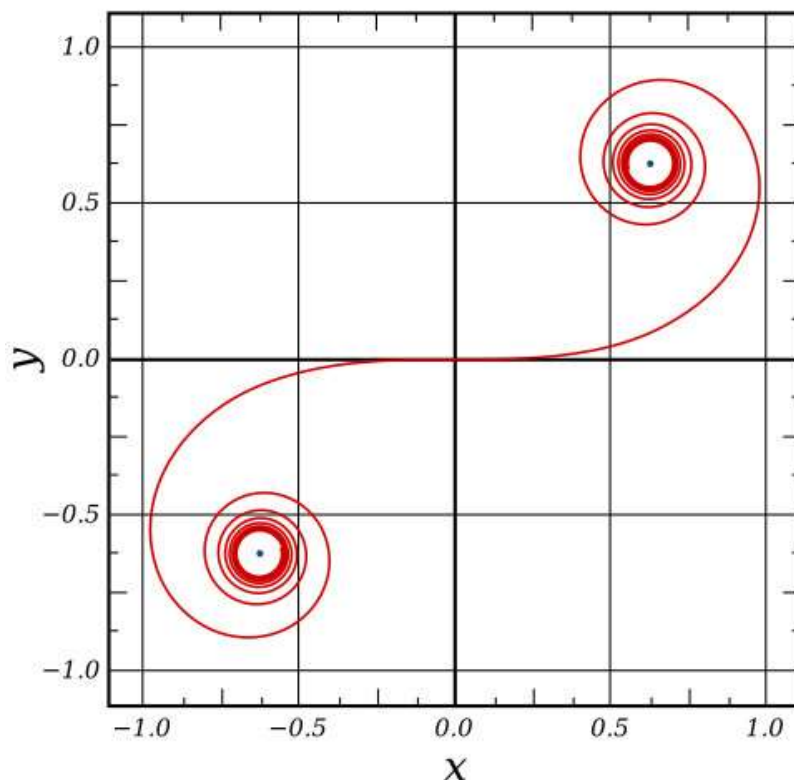
Możemy otrzymać okrąg.



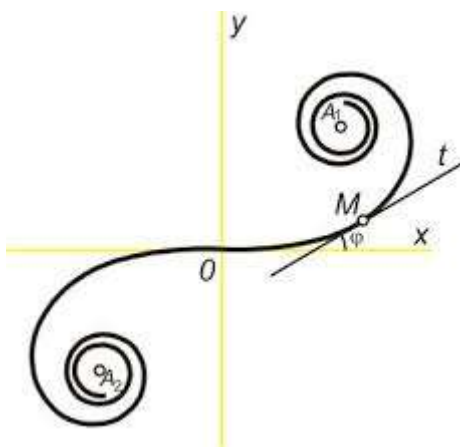
$$(x^2 + y^2)^2 = 2^2 (x^2 + y^2)$$

Klotoida

Klotoida nazywana jest też **spiralą Cornu** lub **spiralą Eulera**.



Została opisana w roku 1874 przez francuskiego fizyka Marie Alfreda Cornu, który zajmował się badaniem światła.



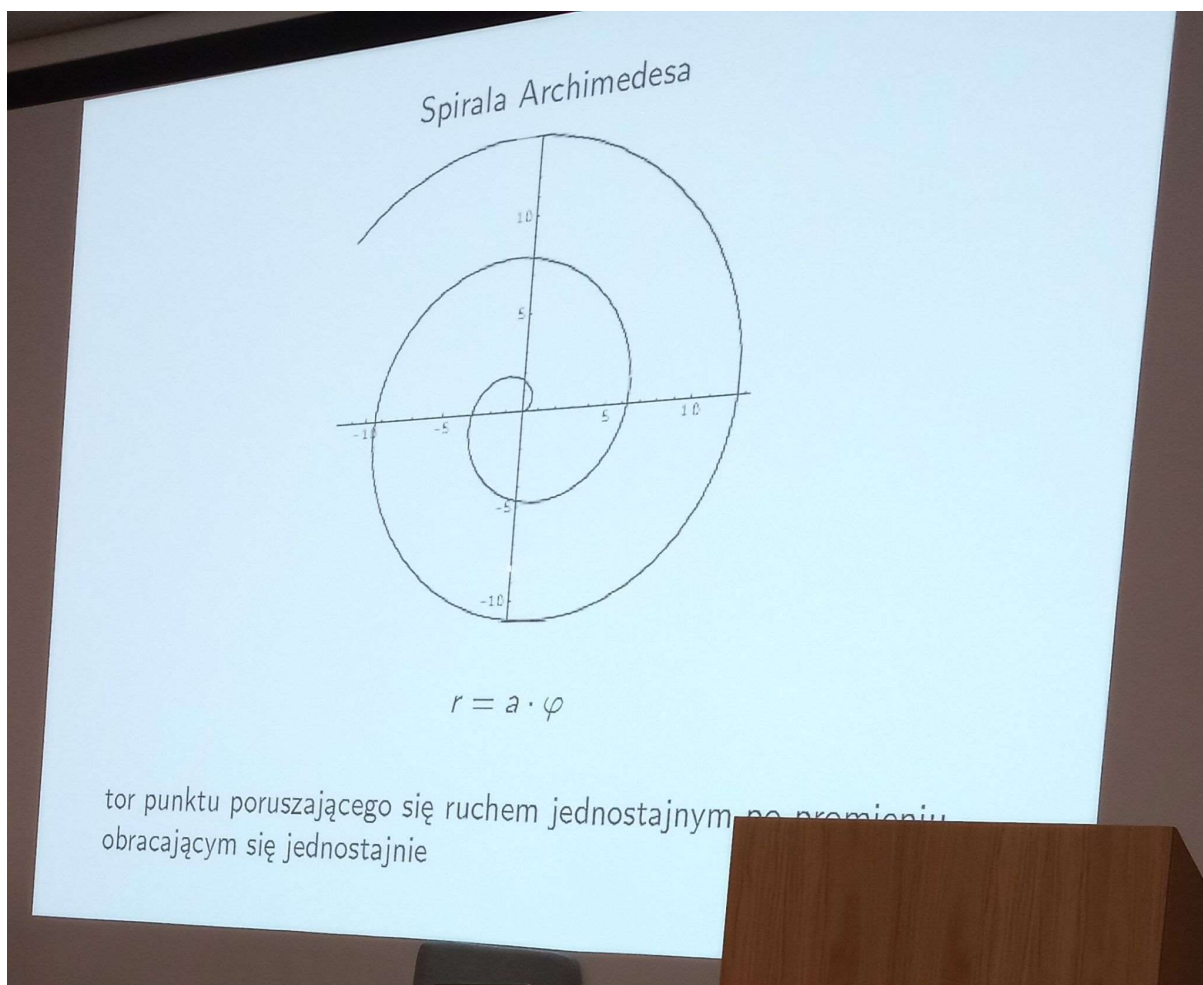
Krzywa jest wykorzystywana przy projektowaniu dróg i linii kolejowych.



Klotoida pozwala na minimalizację gwałtownych zmian kierunku i prędkości pojazdów, co poprawia bezpieczeństwo ruchu drogowego oraz wygodę jazdy dla kierowców i pasażerów.

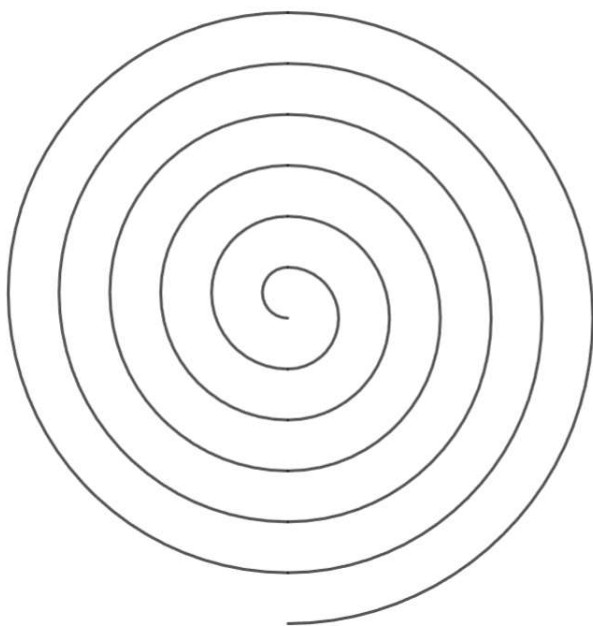
Spirala Archimedesesa

W styczniu 2025 roku byliśmy na wykładzie pana dr Krzysztofa Ciesielskiego “Pi, pi, pi, pi, pi, pi, pi czyli o pewnej słynnej liczbie i pewnym słynnym uczonym”. Wykład popularyzujący matematykę zorganizowało Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk w auli Uniwersytetu Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Dowiedzieliśmy się, że ta ciekawa krzywa zwana jest spiralą Archimedesesa. Odległość między dwoma sąsiednimi liniami jest stała.



Zdjęcie z wykładu pana profesora.

Maciek narysował podobną spiralę.



Na ulicy Karmelickiej w Krakowie jest Kamienica Pod Pajakiem zaprojektowana przez Teodora Talowskiego.



Na szczycie jest krzywa, która przypomina Krzywą Archimedesesa.





Na zdjęciu liścia widać spiralę.

Piotrek znalazł zdjęcie ślimaka wstężyka ogrodowego. Brązowa linia ma kształt spirali.



Spirala Fermata

Spirala Fermata – to krzywa, która jest uogólnieniem spirali Archimedesesa. Dowiedzieliśmy się, że pole powierzchni zawarte pomiędzy dwoma kolejnymi pełnymi zwojami spirali jest stałe. W rezultacie odległość między zwojami maleje, w przeciwieństwie do spirali Archimedesesa (dla której ta odległość jest stała).

Spirala Fermata jest tak nazwana na cześć Pierre'a de Fermata.

Spirala Fermata znalazła zastosowanie w modelowaniu wzrostu roślin i kształtów niektórych galaktyk spiralnych, a także w projektowaniu kondensatorów o zmiennych pojemnościach, luster słonecznych i cyklotronów.

Piotrek znalazł wyszywaną spiralę.



W przyrodzie spirale pojawiają się na wodzie.



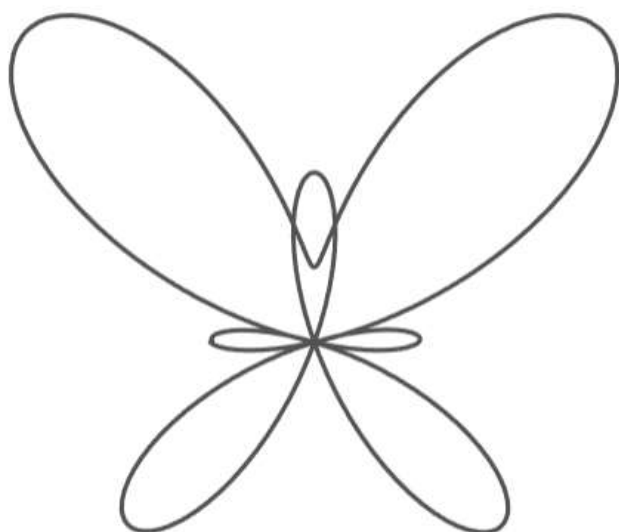
<https://www.istockphoto.com/pl/obrazy/fala-przybrze%C5%BCna>



<https://www.projektpulsar.pl/srodowisko/2229200,1,wirujace-monstra-budza-sie-coraz-wczesniej.read>

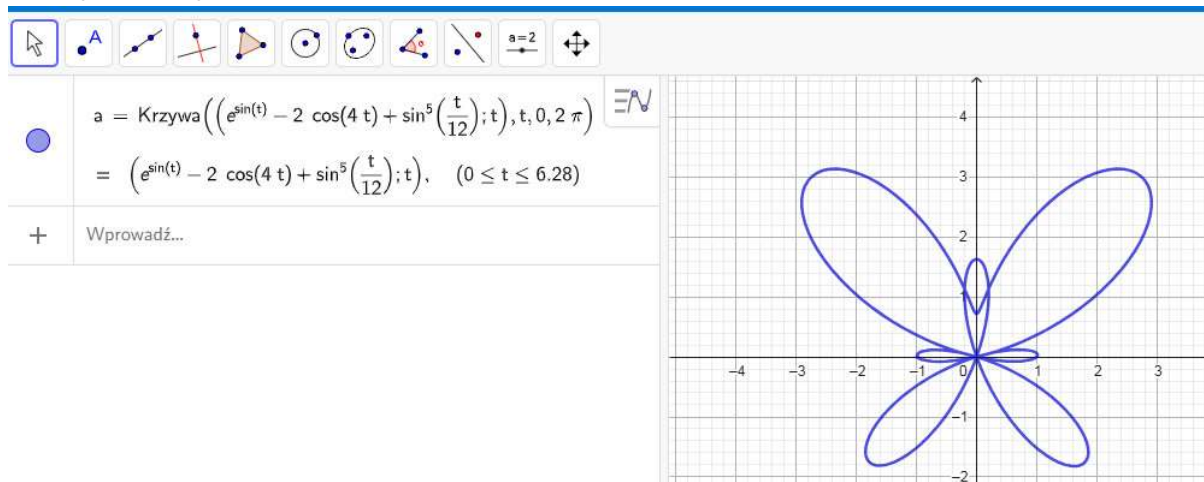
Krzywa Motylkowa

Krzywa motylkowa (transcendentalna) została odkryta przez Amerykanina Temple H. Faya. Maciek wpisał wzór:



$$\begin{aligned} a &= \text{Krzywa} \left(\left(e^{\sin(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right); t \right), t, 0, 2\pi \right) \\ &= \left(e^{\sin(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right); t \right), \quad (0 \leq t \leq 6.28) \end{aligned}$$

Otrzymał wykres



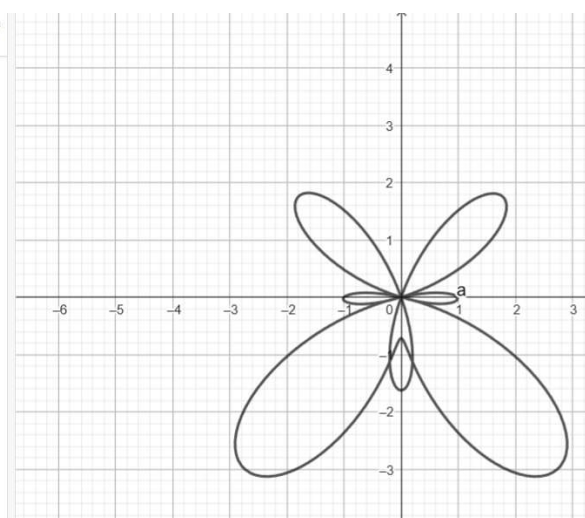


W tym wzorze wprowadziliśmy zmiany i po dopisaniu minusa, motylek “pofrunął” w dół.

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(- \left(e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right) \right); \theta \right), \theta, 0, 2 \pi \right)$$

$$= \left(- \left(e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right) \right); \theta \right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$$

Wprowadź...

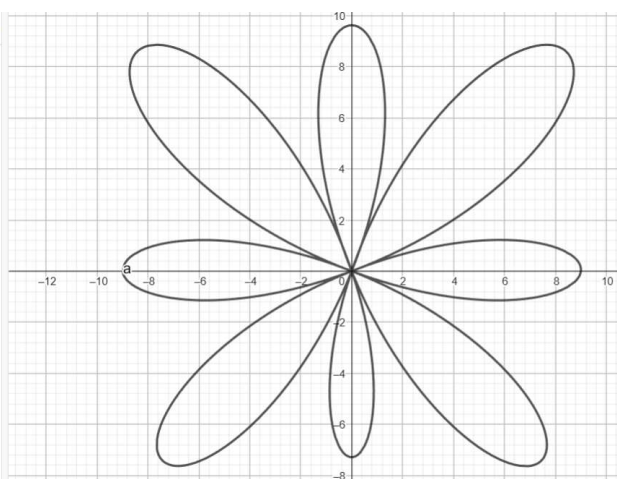


Po zmianie 2 na 10 powstał “kwiatek”

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\sin(\theta)} - 10 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right) \right); \theta \right), \theta, 0, 2 \pi$$

$$= \left(e^{\sin(\theta)} - 10 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right) \right); \theta \right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$$

Wprowadź...

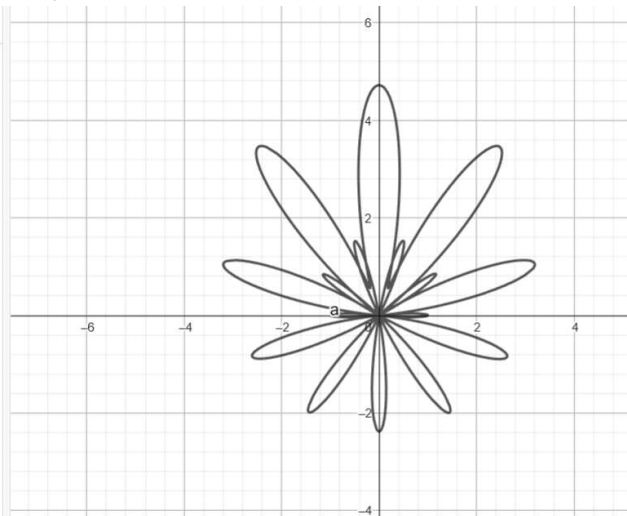


Zmieniając 4 na 10 motylek zmienił się w listek.

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(10 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right); \theta \right), \theta, 0, 2 \pi \right)$$

$$= \left(e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(10 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right); \theta \right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$$

Wprowadź...

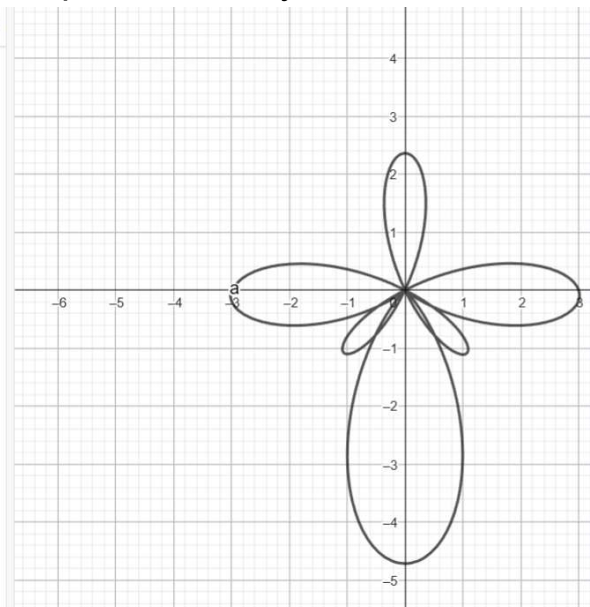


Po wpisaniu minusa po drugim nawiasie powstał taki rysunek:

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(-e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right); \theta \right), \theta, 0, 2 \pi \right)$$

$$= \left(-e^{\sin(\theta)} - 2 \cos(4 \theta) + \sin^5 \left(\frac{\theta}{12} \right); \theta \right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$$

Wprowadź...

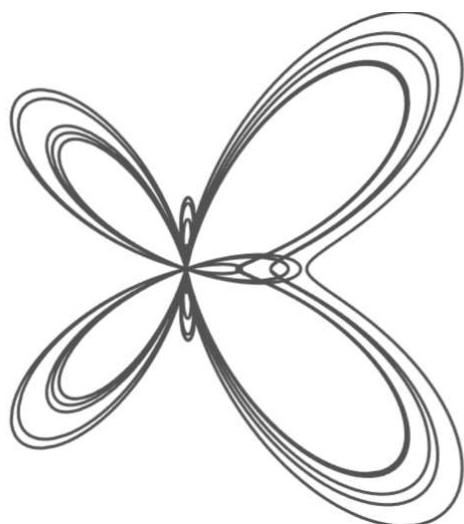
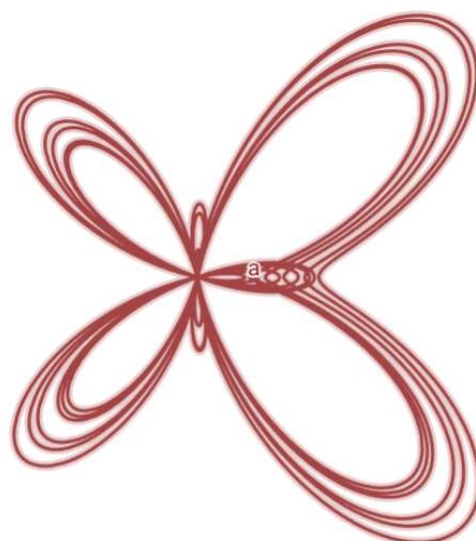
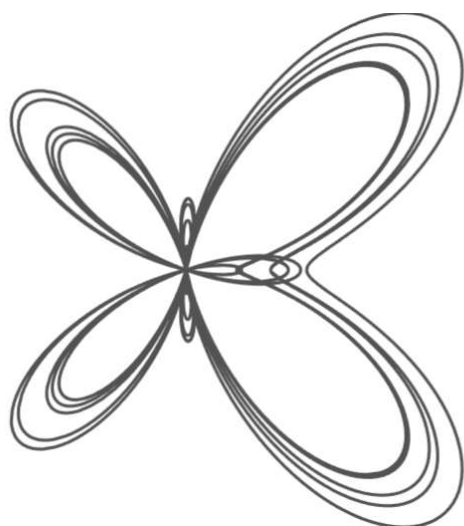
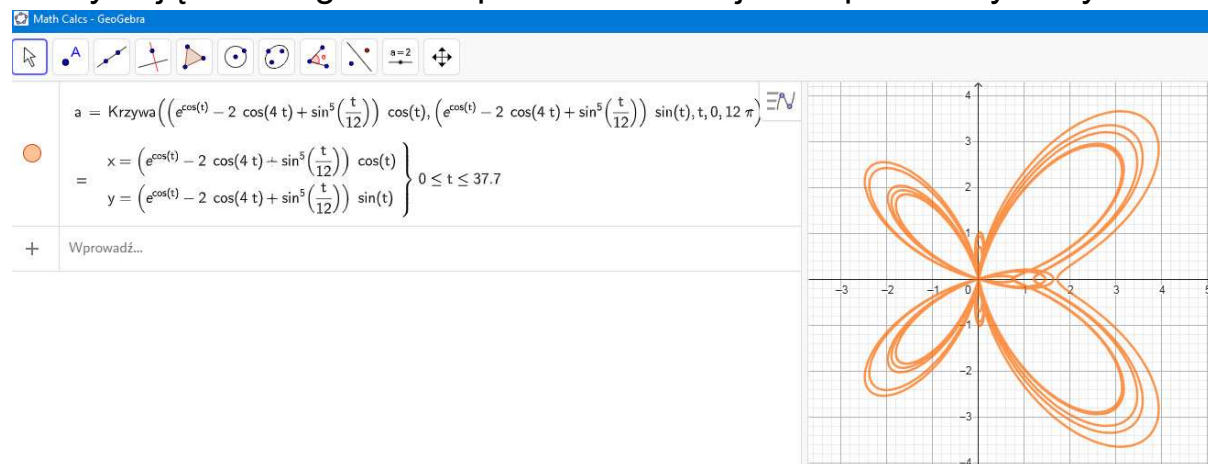


Znaleźliśmy inny wzór

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4 t) + \sin^5 \left(\frac{t}{12} \right) \right) \cos(t), \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4 t) + \sin^5 \left(\frac{t}{12} \right) \right) \sin(t), t, 0, 12 \pi \right)$$

$$= \left. \begin{aligned} x &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4 t) + \sin^5 \left(\frac{t}{12} \right) \right) \cos(t) \\ y &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4 t) + \sin^5 \left(\frac{t}{12} \right) \right) \sin(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 37.7$$

Korzystając z innego wzoru powstał bardziej skomplikowany motylek.

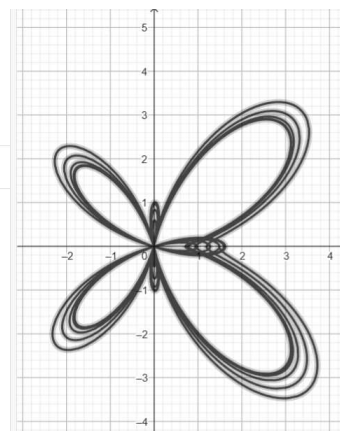


Zmiana mianownika w ułamku na 30 niewiele zmieniła.

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{30}\right) \right) \cos(t), \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{30}\right) \right) \sin(t), t, 0, 12 \pi \right)$$

$$= \left. \begin{aligned} x &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{30}\right) \right) \cos(t) \\ y &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{30}\right) \right) \sin(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 37.7$$

Wprowadź...

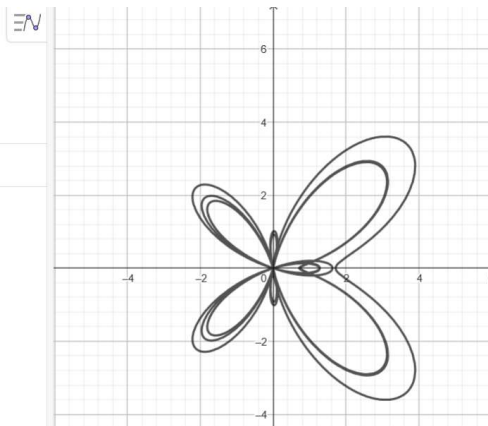


Wymiana wykładnika 5 na 30 sprawiła, że widać mniej linii.

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^{30}\left(\frac{t}{12}\right) \right) \cos(t), \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^{30}\left(\frac{t}{12}\right) \right) \sin(t), t, 0, 12 \pi \right)$$

$$= \left. \begin{aligned} x &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^{30}\left(\frac{t}{12}\right) \right) \cos(t) \\ y &= \left(e^{\cos(t)} - 2 \cos(4t) + \sin^{30}\left(\frac{t}{12}\right) \right) \sin(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 37.7$$

Wprowadź...

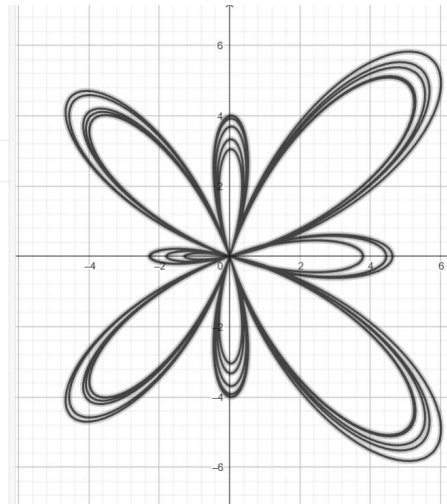


Po zmianie współczynnika 2 na 5 powstała taka krzywa.

$$a = \text{Krzywa} \left(\left(e^{\cos(t)} - 5 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right) \right) \cos(t), \left(e^{\cos(t)} - 5 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right) \right) \sin(t), t, 0, 12\pi \right)$$

$$= \begin{cases} x = \left(e^{\cos(t)} - 5 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right) \right) \cos(t) \\ y = \left(e^{\cos(t)} - 5 \cos(4t) + \sin^5\left(\frac{t}{12}\right) \right) \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 37.7$$

Wprowadź...



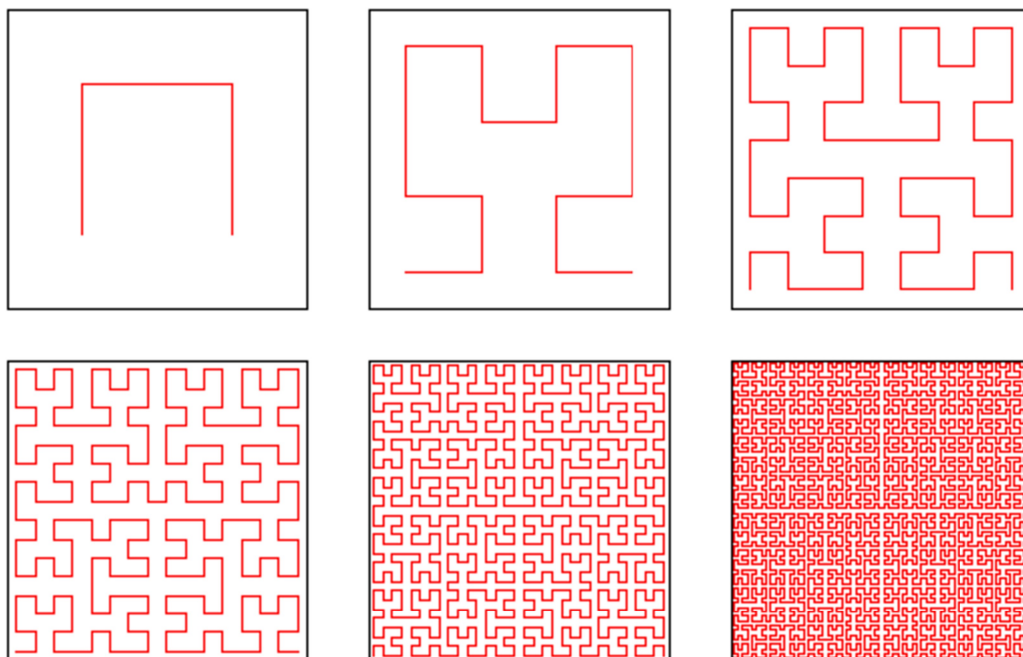
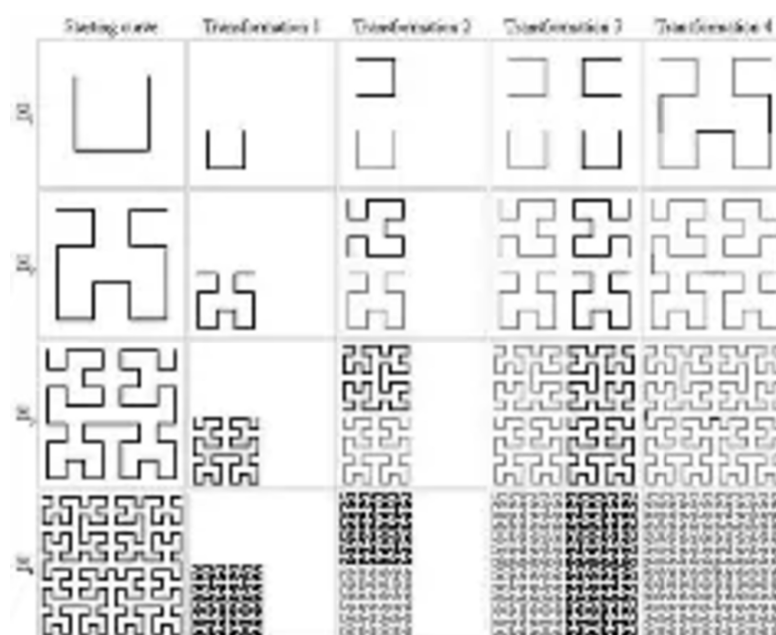
Znaleźliśmy zdjęcie budynku w Chinach, który przypomina wyglądem krzywą motylkową.

LINK: [AA1IYxta.img \(1920×1080\)](#)



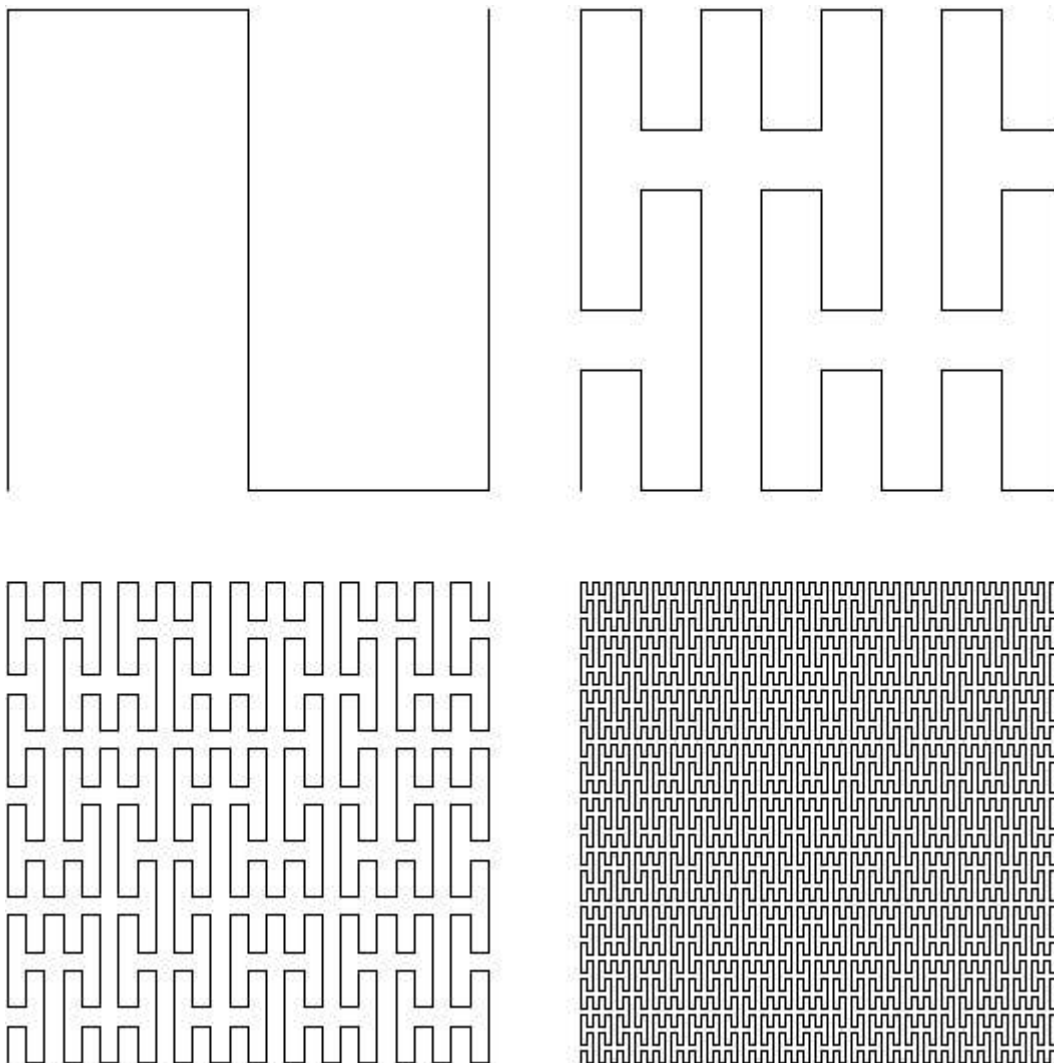
Krzywa Hilberta

Przeczytaliśmy, że tą krzywą skonstruował David Hilbert. Rysunek z Wikipedii przedstawia jak powstaje.



Krzywa Peana

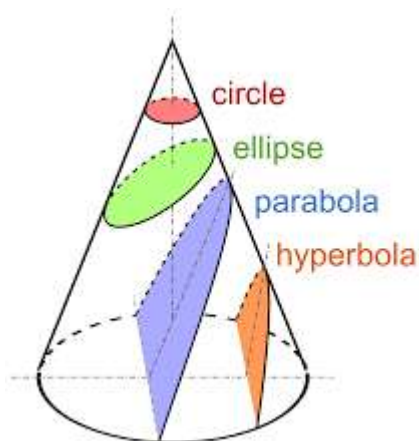
Znaleźliśmy podobną krzywą.



Skonstruował ją Giuseppe Peano w roku 1890.

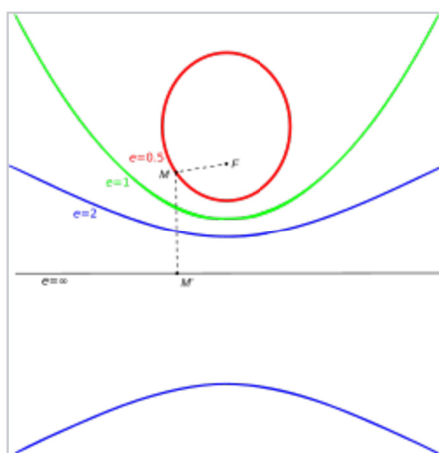
Krzywe stożkowe

W wikipedii znalazłem rysunki krzywych stożkowych - na rysunku stożka. Czerwone jest koło, zielona elipsa, niebieska parabola i pomarańczowa hiperbola.



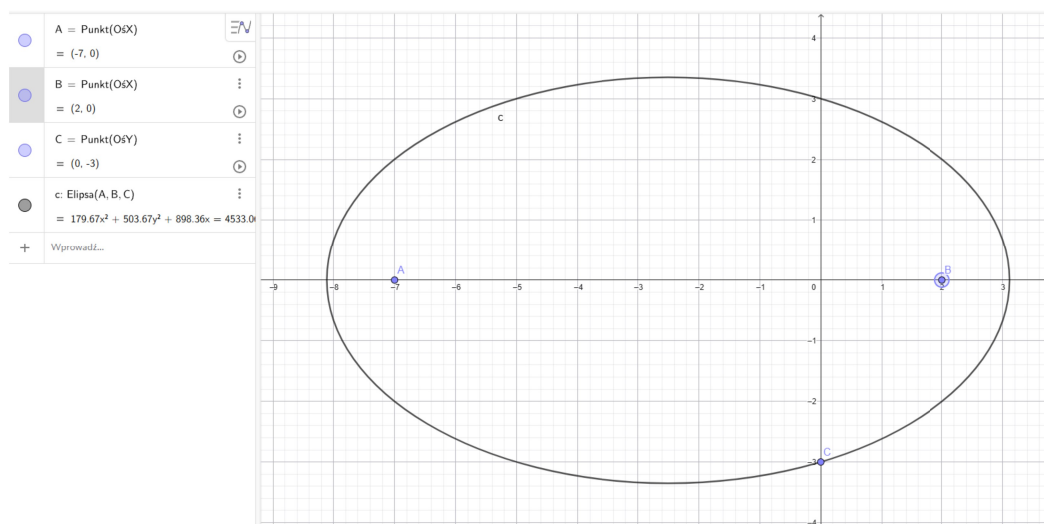
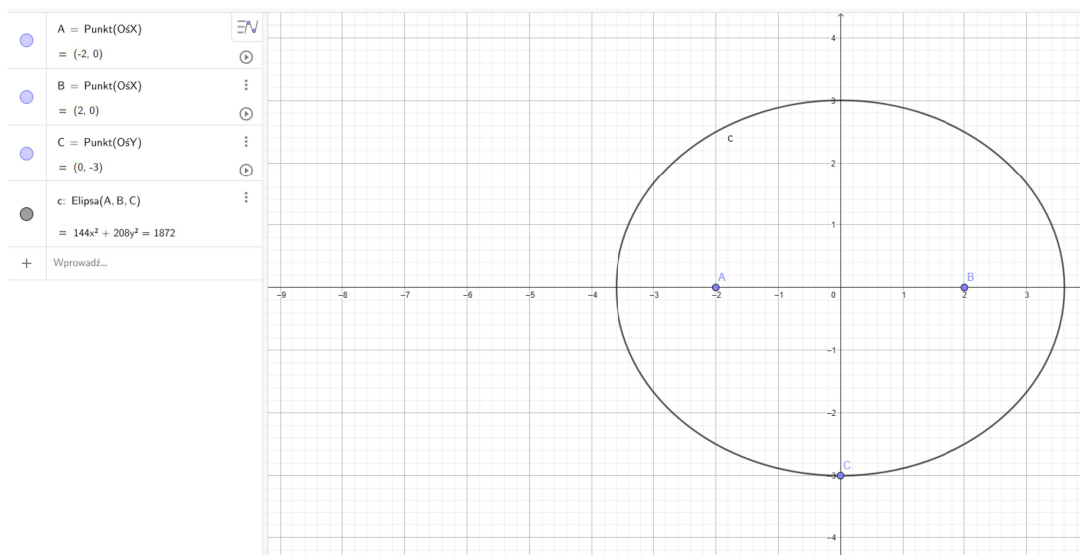
Znalazłem też inny rysunek:

kolorem czerwonym narysowano elipsę, zielonym parabolę, niebieskim hiperbolę.

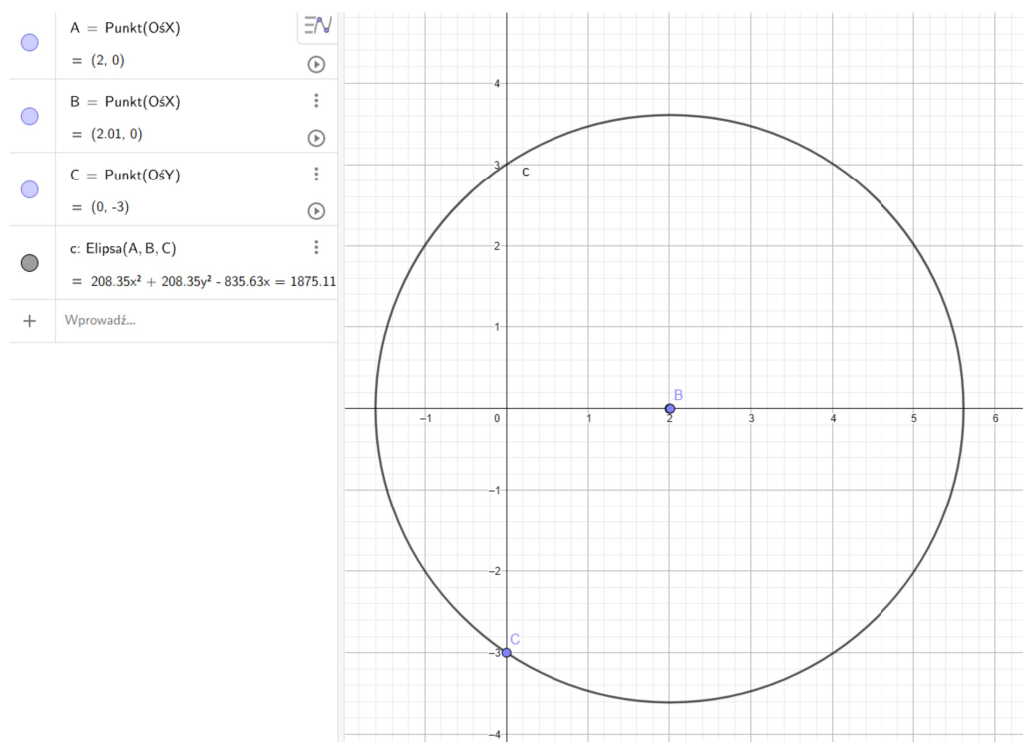


W GeoGebraze można narysować każdą z krzywych stożkowych.

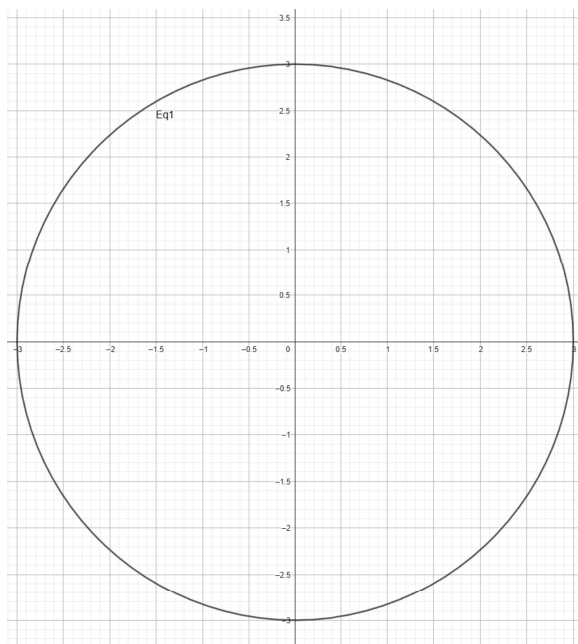
Elipsę



Jeżeli punkt A i punkt B znajdą się w tym samym miejscu,
to otrzymam okrąg.

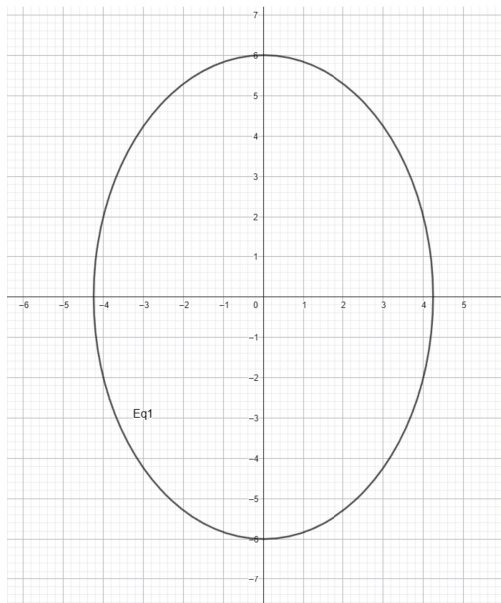


Okrąg można narysować wybierając odpowiednią opcję lub wpisując wzór

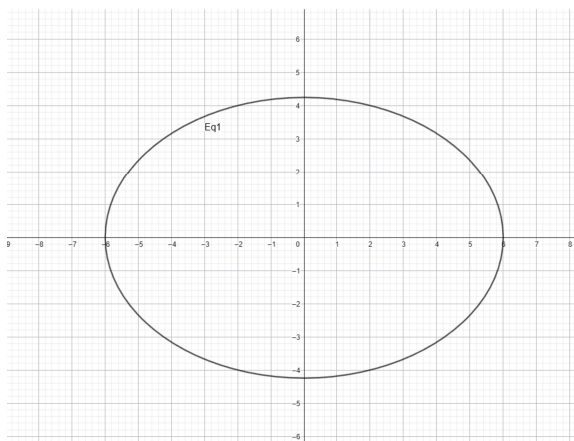


$$x^2 + y^2 = 9$$

Można narysować elipsę:

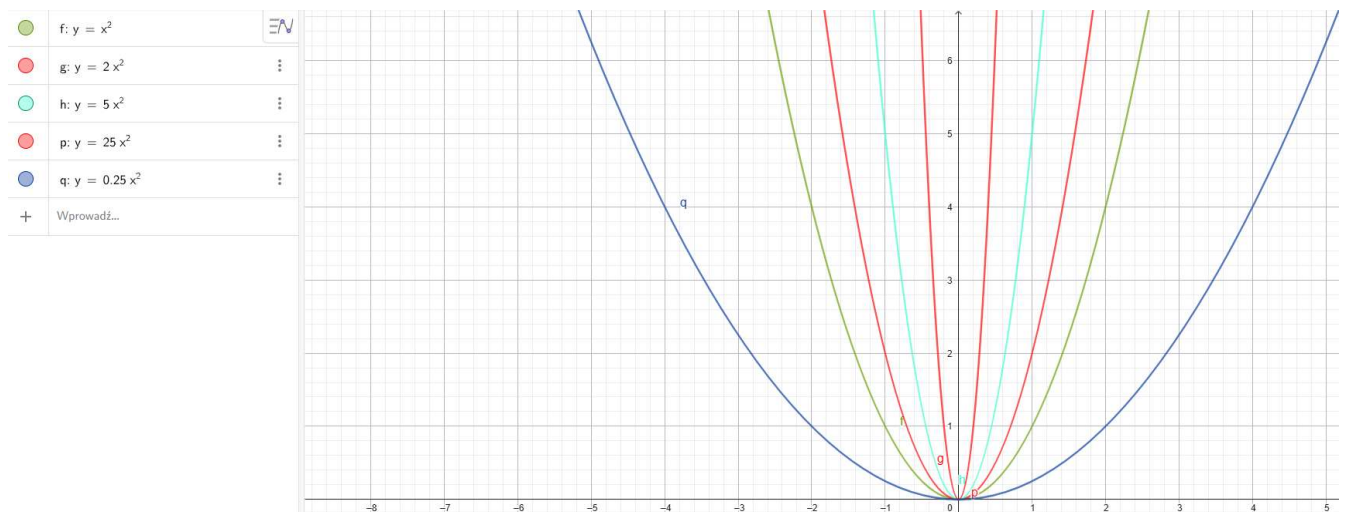


$$\frac{(x^2)}{(2)} + \frac{(y^2)}{(4)} = 9$$

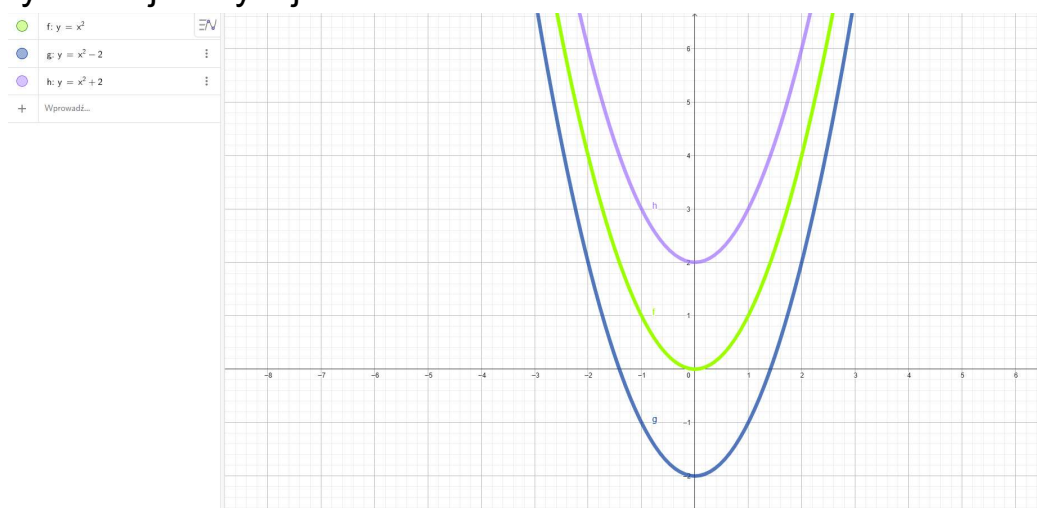


$$\frac{(x^2)}{(4)} + \frac{(y^2)}{(2)} = 9$$

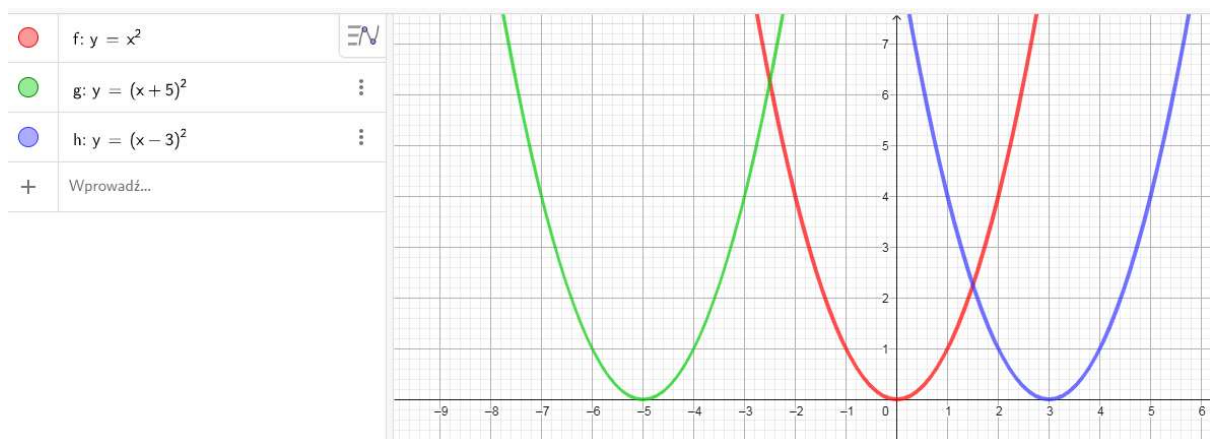
Parabole:



Przed x^2 wstawiłem różne liczby i z krzywych czyli z parabol powstał taki rysunek jak wyżej.



Parabole można przesuwac



Parabole znaleźliśmy na zdjęciach mostu.



Tęcza.



<https://www.kwiatki.org/kwiaty/tecza-niebo-kwiaty.jpeg>

Fontanna



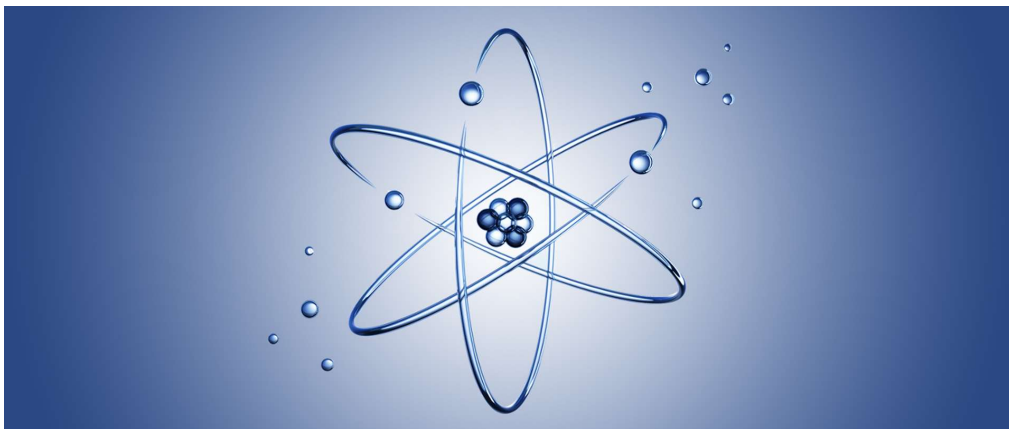
https://www.tapeciarnia.pl/tapety/normalne/228798_fontanna.jpg

Pomnik pułkownika Ryszarda Kuklińskiego w Krakowie.



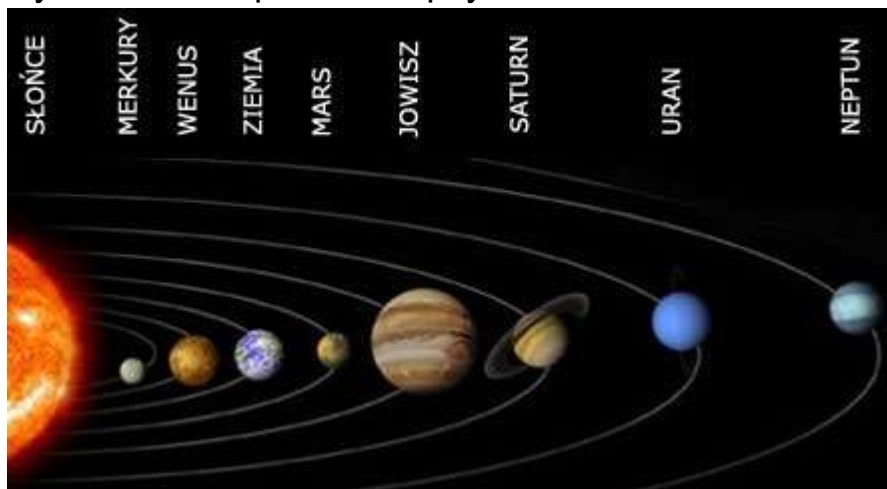
<https://www.voyagesetevasions.com/villes/pologne/cracovie/pomnik-ryszarda-kukli%C5%84skiego-w-krakowie.jpg>

Elipsy.



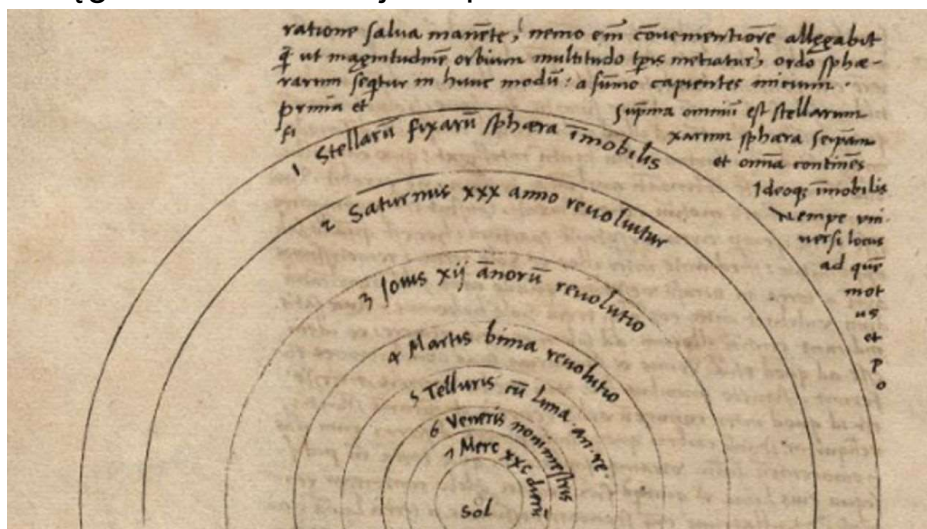
<https://www.gov.pl/photo/format/b7cf40ee-39b2-488d-a8da-c8c303b8591b/resolution/1920x810>

Rysunki ruchu planet - elipsy.

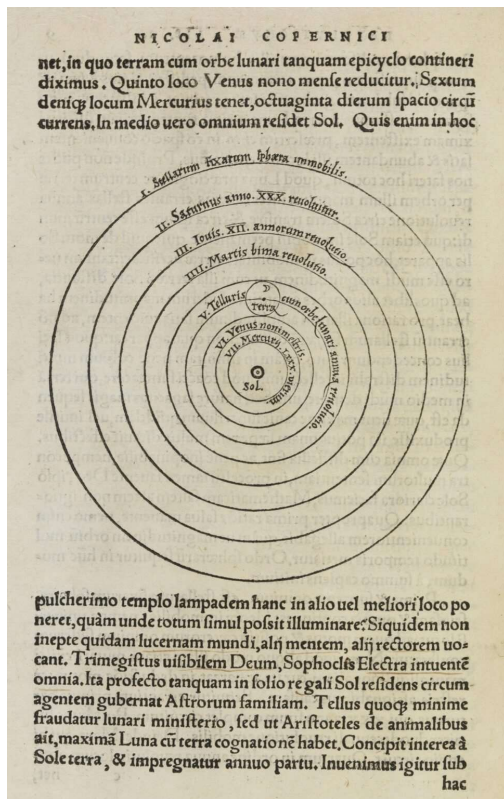


https://th.bing.com/th/id/R.93e892604a5d4a99a81bbe6b2ba00f08?rik=kZGrQNs5wWKLqQ&riu=http%3a%2f%2f2.bp.blogspot.com%2f__-99cjfM6Mk%2fSB7GsbGMIdI%2fAAAAAAAAAII%2fCI7dY3bgJYo%2fS1600-R%2fuklad_sloneczny.jpg&ehk=0L%2fdbqISVsobzrQZF9Jho8QHM8Q%2bAOHv4LliKaNOfJY%3d&risl=&pid=ImgRaw&r=0

Okręgi w dziele Mikołaja Kopernika

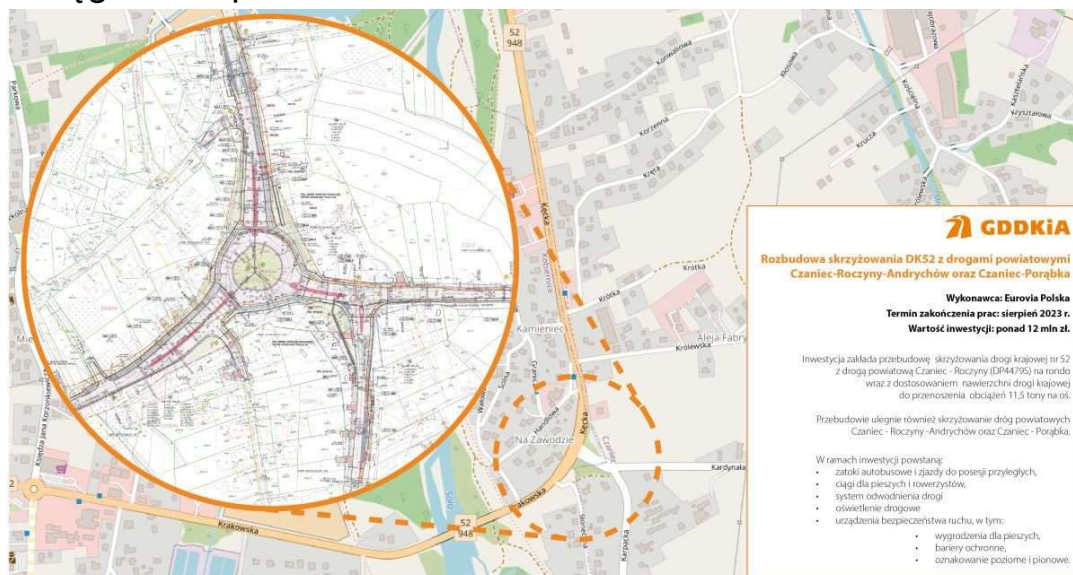


https://ckpide.eu/images/aktualnosci/wydarzenia/2023/20230218_mikolaj_kopernik/Kopernik_2.jpg



<https://palacrzeczypospolitej.pl/wp-content/uploads/2024/04/3-3-967x1536.jpg>

Okręgi na mapie.



https://www.mamnews.pl/!data/newsy/b_news_40464.jpg

Krzywe wokół nas

Krzywe pojawiają się, gdy projektujemy mosty.



Most w Podgórzu.

Tory kolejowe



Węzeł Tarnowskie Góry

Kolejki typu hyper coaster.



Zadra w Energylandii.

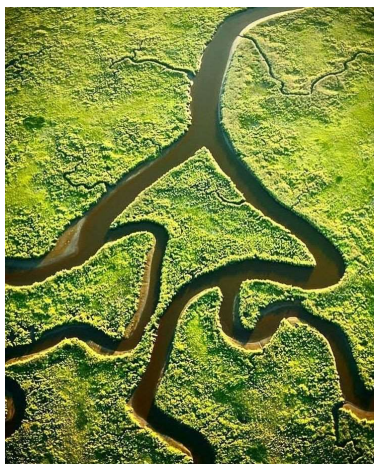
Gdy patrzymy na drzewa



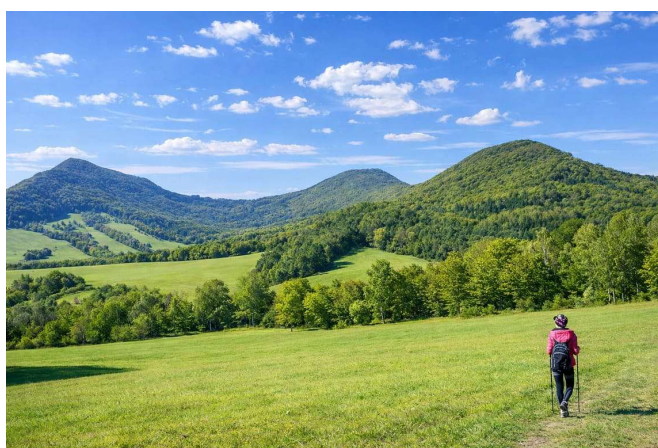
na skrzydła motyla



na rzeki



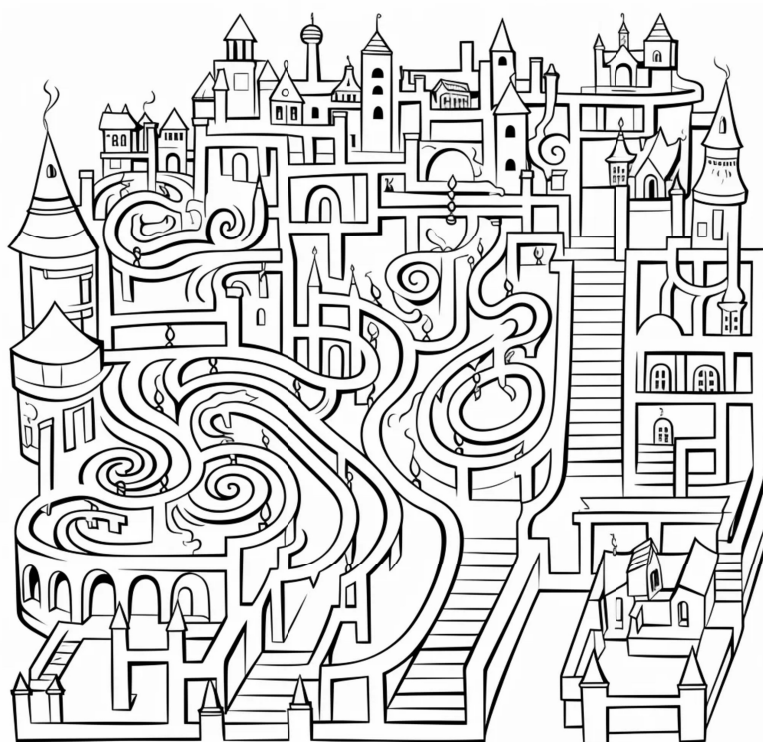
na góry



Rozwiązujemy labirynty.



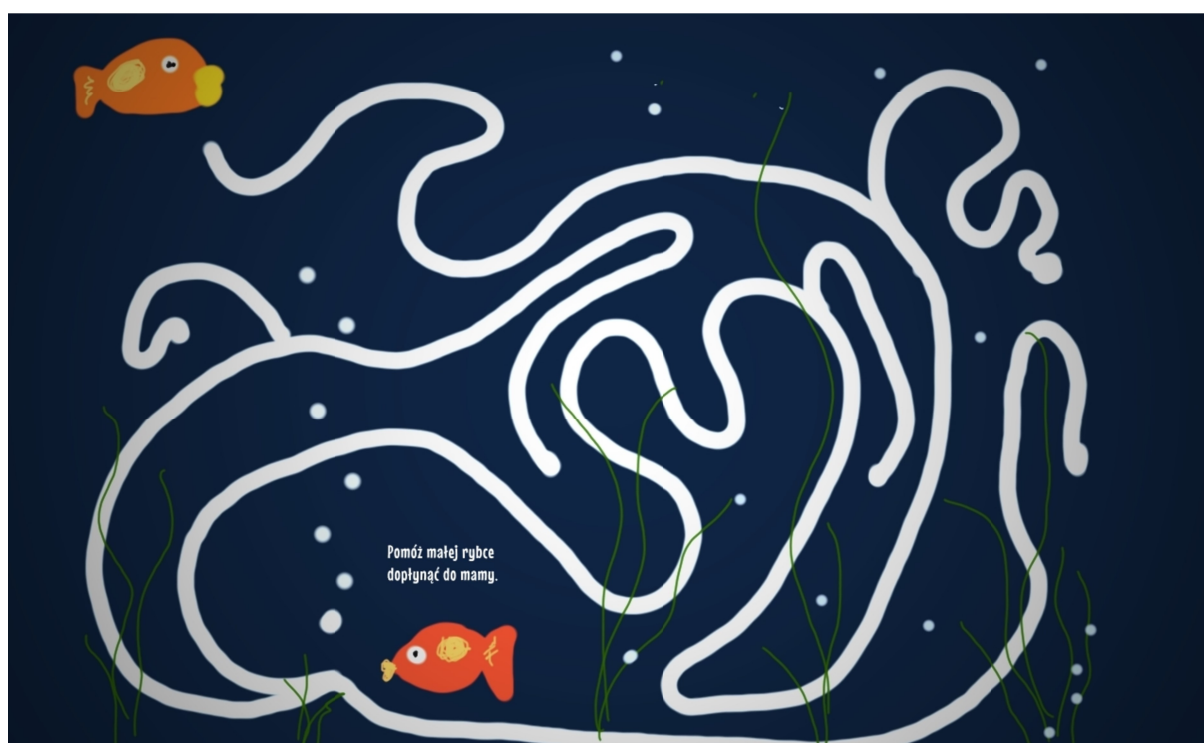
Unikalny Labirynt W Kształcie Ludzkiego Mózgu



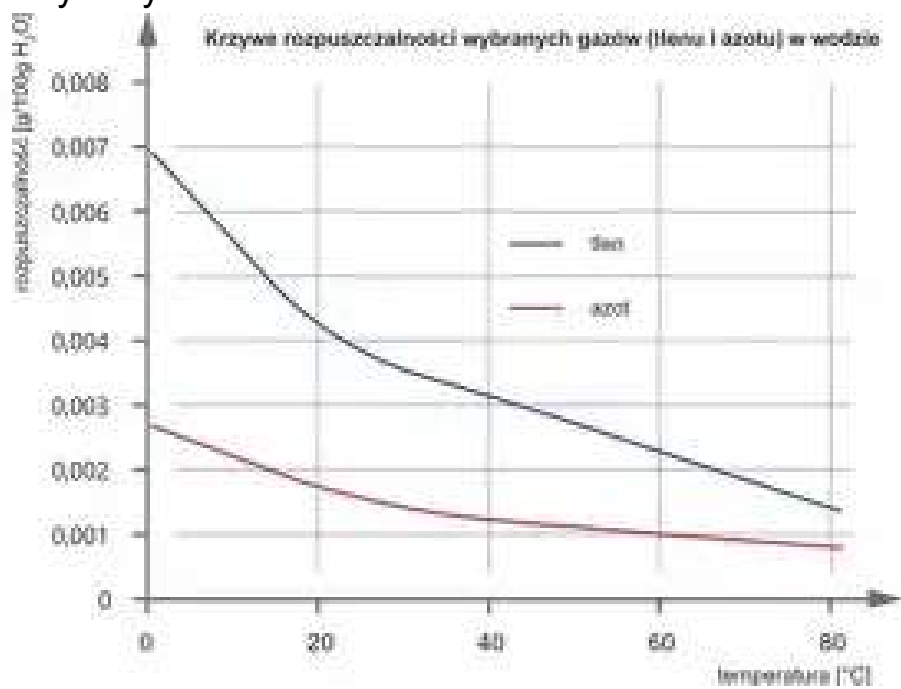
https://www.google.com/search?tbid=nq9ypP4kwBbTOM&tbnh=0&tbnw=0&client=firefox-b-d&hs=SfeU&sca_esv=074920bdea4960d4&cs=0&sxsrf=ANbL-n4gnxSab8TBR8EW2DQ-CT2_FVWsOg:1770662053492&udm=2&q=labirynty+do+druku+za+darmo&sa=X&ved=2ahUKEwispdmVhs2SAxU8QfEDHaMwla8QtI8BegQINRAB&biw=1699&bih=1066&dpr=1#sv=CAMSXhoyKhBILTb5M1ZqM195VUZBb0FNMg4weTNWajNfeVVGQW9BTT0OMDZMT05vR0VPSjJsak0gBCokCg4tRmZra1U3TnFXyjiZiTRIQZS0weTNWajNfeVVGQW9BTRgAMAEYByCZtLPZBTA CSggQAqhCIaIoAg



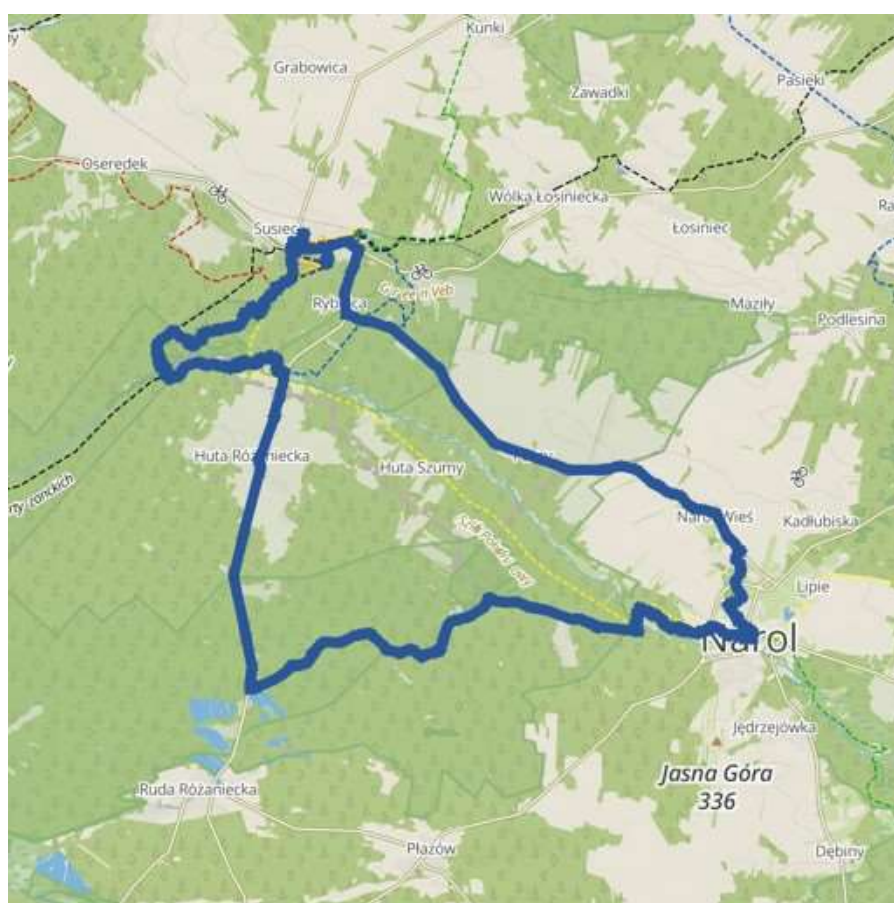
SWIATKOLOROWANEK.PL



Korzystamy z wykresów



Mapy



Trasa rowerowa na Roztoczu.

Mapa województwa małopolskiego – zaznaczone granice województwa oraz drogi samochodowe.



<https://i.pinimg.com/736x/d7/7d/3e/d77d3eaf0f20397781c83410264a023b.jpg>

Szlaki turystyczne

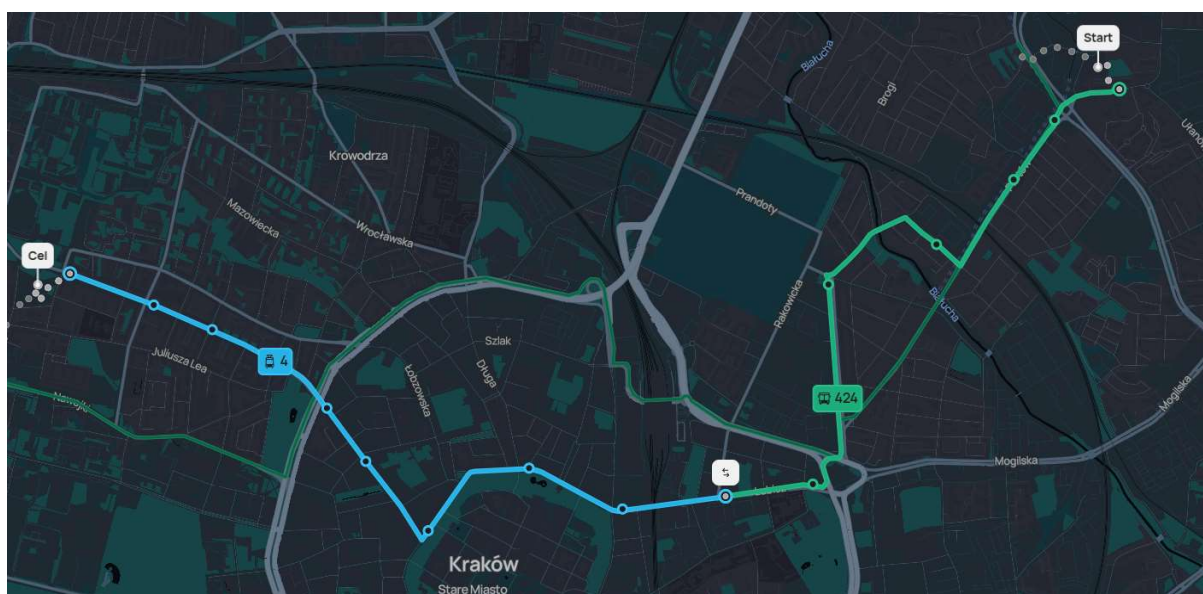


Plan Krakowa – zaznaczone granice Starego miasta, ulice, fragment Wisły



[https://9.allegroimg.com/original/](https://9.allegroimg.com/original/03caab/d0b41c2c434d90298de0c9b26e39/KRAKOW-plan-miasta-1899-rok)

[03caab/d0b41c2c434d90298de0c9b26e39/KRAKOW-plan-miasta-1899-rok](https://9.allegroimg.com/original/03caab/d0b41c2c434d90298de0c9b26e39/KRAKOW-plan-miasta-1899-rok)



Trasa na planie Krakowa z ulicy Sadowki 1 (nasza szkoła SP 64) na ulicę Podchorążych 2, gdzie znajduje się Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie .

Kreskówki

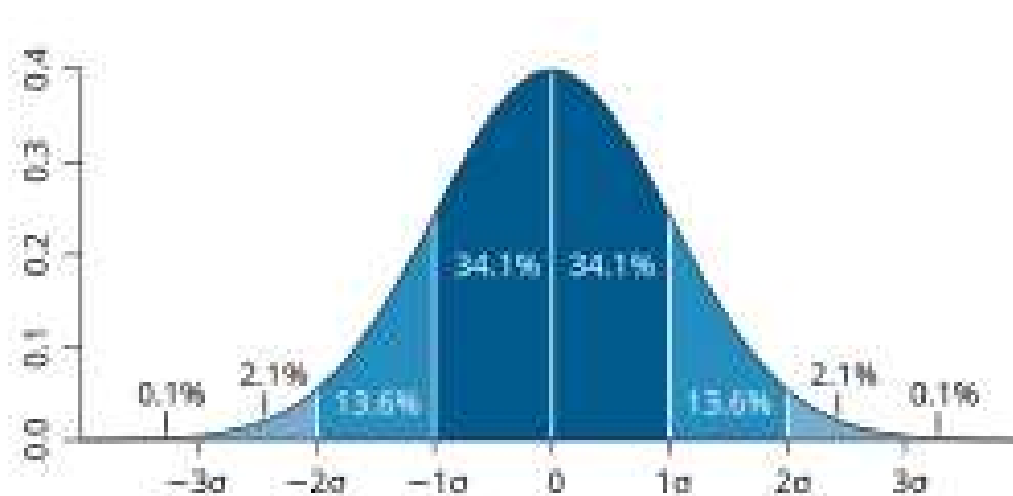
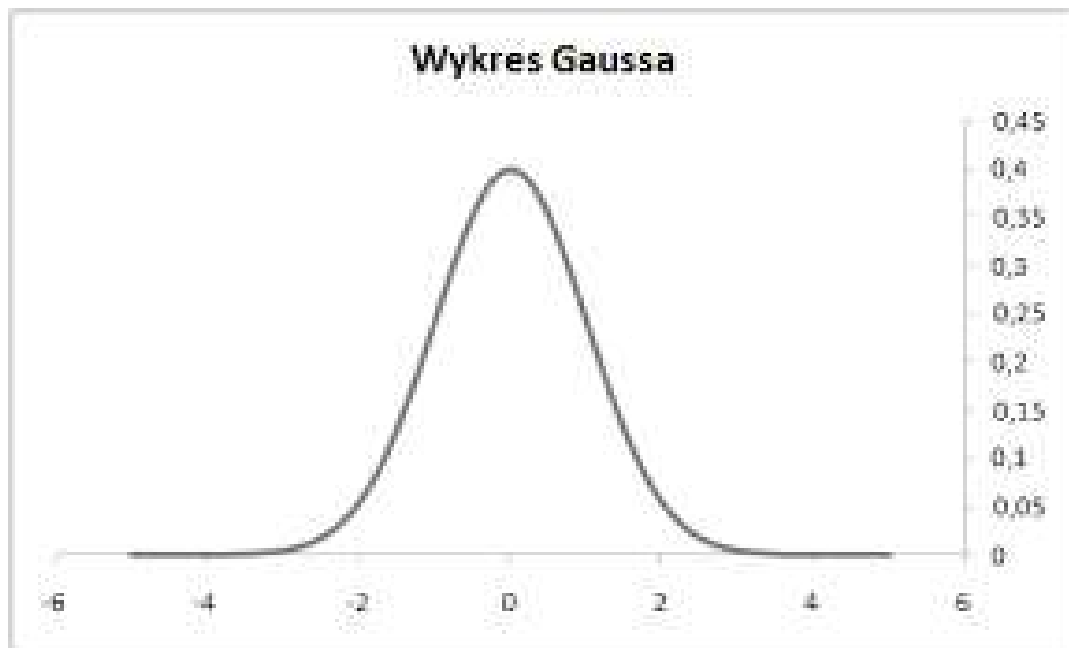


Włoska kreskówka La Linea

Co może być schowane w tym kapeluszu?



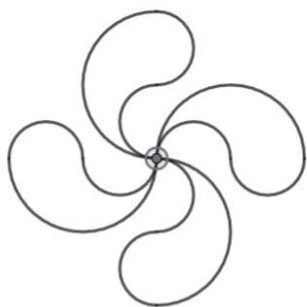
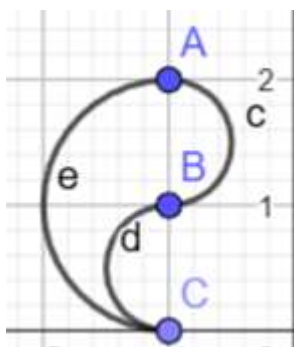
Może krzywa Gaussa?



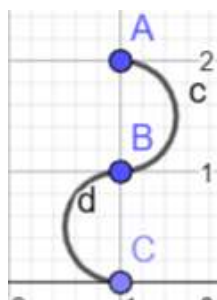
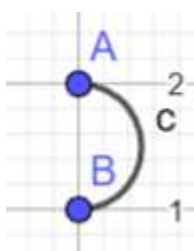
Krzywa Gaussa to krzywa statystyczna, która **przedstawia rozkład danych wokół średniej wartości**. Charakteryzuje się symetrią i ma kształt dzwonu. Jej zastosowanie obejmuje analizę danych, prognozowanie zdarzeń i wiele innych dziedzin, a także marketing.

Podsumowanie

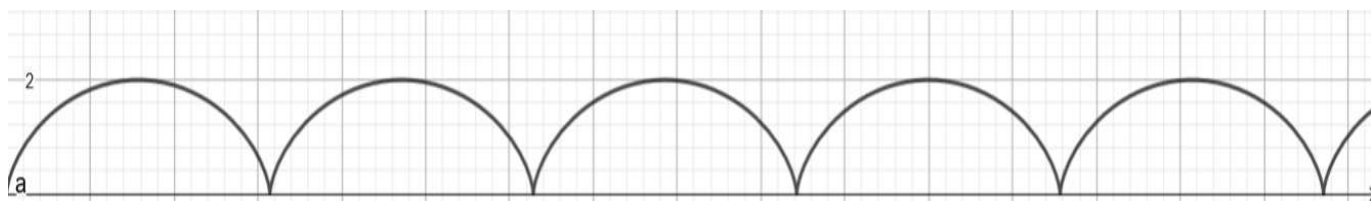
Świat krzywych jest ciekawy. Zauważyliśmy, że niektóre są zamknięte

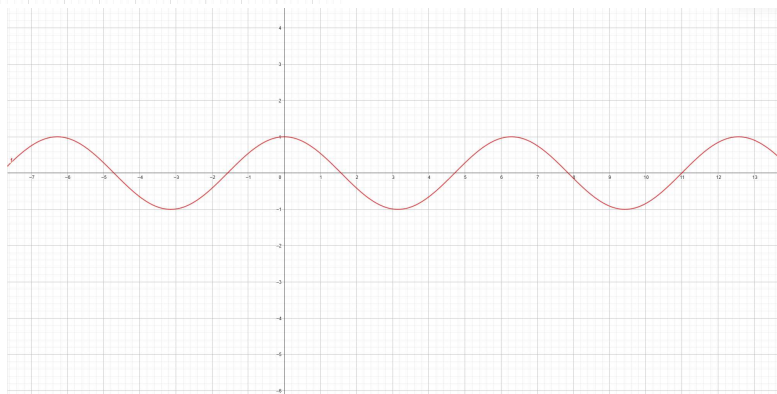
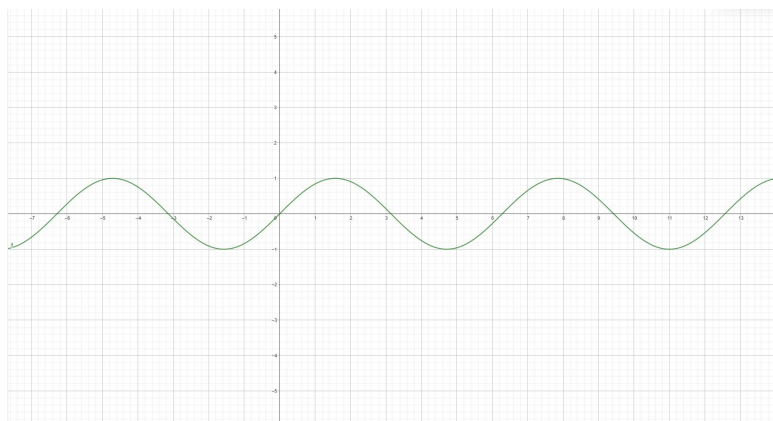


inne ograniczone,



a inne ciągną się w nieskończoność.





Niektóre krzywe mają regularny kształt, a inne bardzo skomplikowane.

Wykorzystane źródła

W naszej pracy korzystaliśmy z Wikipedii, programu GeoGebra i ChatGPT. Obok zdjęć podaliśmy adresy, pod którymi je znaleźliśmy.



Opinia

Uczniowie, którzy przygotowali pracę zainteresowali się krzywymi dzięki koledze. Namówiłam ich, aby napisali pracę związaną z okręgiem. Umówili się w trójkę i szukali informacji w Wikipedii. Znaleźli spis krzywych i niektóre nazwy ich zainteresowały. Postanowili je opisać. Piotrek wybrał między innymi cykloidę. W opisie były ciekawe rysunki, animacja ruchu okręgu po prostej. Myśleliśmy jak wykonać takie doświadczenie. Przygotowali w domu koła z grubej tektury, w których zrobili dziurki na mazaki i na dużym papierze przyklejonym do szafek powstała pierwsza cykloida.

Nie była idealna, bo momentami koło się ślizgało.

Udało się nam przeprowadzić jeszcze jedno doświadczenie z kołem hula hop. Powstały trochoidy, hipocykloidy i epicykloidy.

Zachęciłam uczniów, aby wykonali rysunki w GeoGebra. Ponieważ wzory są skomplikowane, wykorzystaliśmy AI. Okazało się, że można zmieniać liczby i powstały zadziwiające kształty, jak w przypadku kardiody, czy krzywej motylkowej. Niestety AI nie podaje źródła, skąd są wzory.

Chłopcy poszukali zdjęć związanych z opisywanymi krzywymi.

Piotrek jest specjalistą od skrzyżowań w Chinach. Aby zaprojektować konstrukcje mostów, linie kolejowe, drogi, trzeba było narysować wiele krzywych.

Maciek świetnie radził sobie z dokumentem w Google. Wiedział jak wklejać rysunki, zdjęcia i symbole. Wymyślił tytuł pracy.

Grzesiek przygotował materiały do doświadczeń, które wykonali.

Doświadczenia wykonaliśmy w szkole, a pracę pisaliśmy na spotkaniach online korzystając z dysku Google na platformie naszej szkoły.

mgr Teresa Sklepek

Kraków, 28 lutego 2026 r.