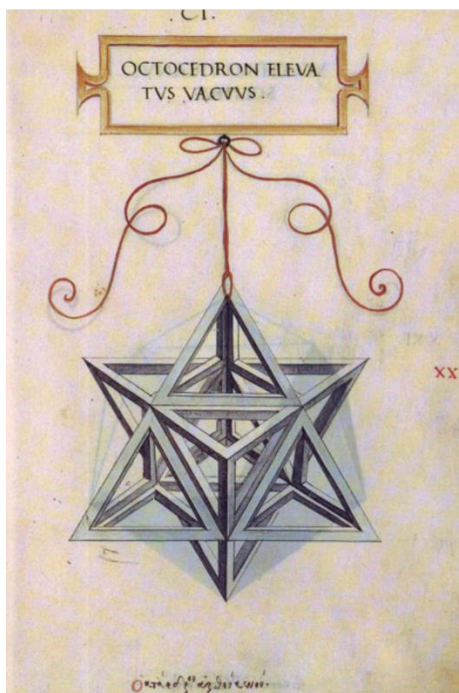


MAŁOPOLSKI KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH
Praca uczennicy klasy 1B XX Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie
Magdaleny Drzygieł

III Problem Hilberta

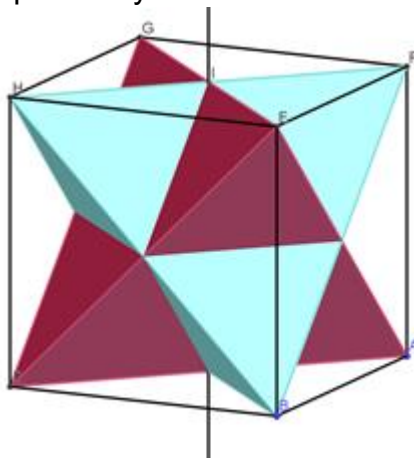
Przeglądając niesamowite koncepty Leonarda Da Vinci można natrafić na szkic ciekawej gwiazdy ośmioramiennej, która była ilustracją do traktatu Luca Pacioli – „*De divina proportionem*”, z łac. „O boskiej proporcji”, (rys. 1). Bryła ta - nazwana później przez Johanna Keplera stella octangula – składa się z dwóch najprostszych brył platońskich – czworościanów foremnych.



rys. 1

W jaki sposób możemy otrzymać stellę octangulę?

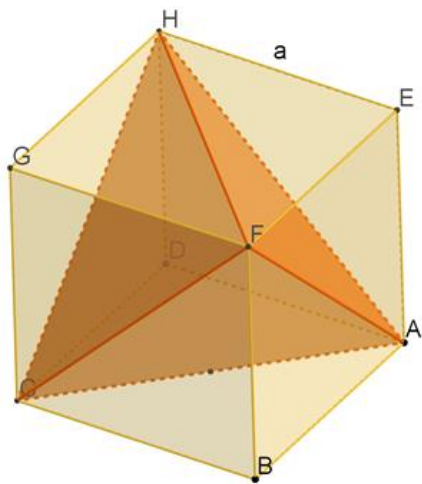
Jeżeli w sześcianie umieścimy czworościan foremny tak, aby jego wierzchołki pokrywały się z wierzchołkami sześcianu, a następnie obrócimy go o kąt 90° wokół prostej przechodzącej przez środek ściany sześcianu prostopadły do niej, wówczas otrzymamy drugi czworościan foremny, którego wierzchołki znajdą się na pozostałych wierzchołkach sześcianu (rys 2).



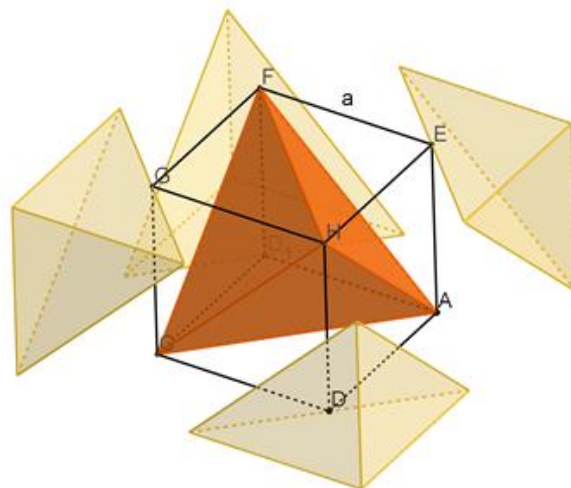
rys. 2

W dzisiejszych czasach taką gwiazdę można łatwo wydrukować na drukarce 3D, ale zastanawiającym jest, jaka jest objętość tej bryły w stosunku do objętości sześcianu, w którym jest ona umieszczona.

Objętość stelli octanguli można w dość prosty sposób obliczyć, ale wcześniej wyznaczmy objętość czworościanu foremny umieszczonego w sześcianie.



rys. 3



rys. 4

Zauważmy, że czworościan foremny uzupełniają do sześcianu cztery ostrosłupy trójkątne, z których każdy ma objętość:

$$V_{ost} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

Jest ich łącznie cztery, więc objętość czworościanu jest równa:

$$V_{cz} = V_{sz} - 4 \cdot V_{ost} = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Zatem czworościan foremny wpisany w sześcian o długości krawędzi **a** ma objętość **V_{cz}** równą $\frac{1}{3}$ objętości sześcianu (**V_{sz}**).

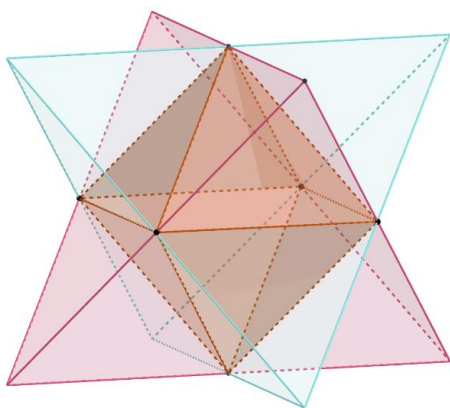
Stella octangula jest sumą czworościanu foremnego wpisanego do sześcianu oraz czterech mniejszych czworościanów podobnych do niego w skali $\frac{1}{2}$ (rys. 5). Objętość każdego z nich stanowi więc $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ czyli $\frac{1}{8}$ objętości większego czworościanu.

Zatem objętość stelli octanguli jest równa:

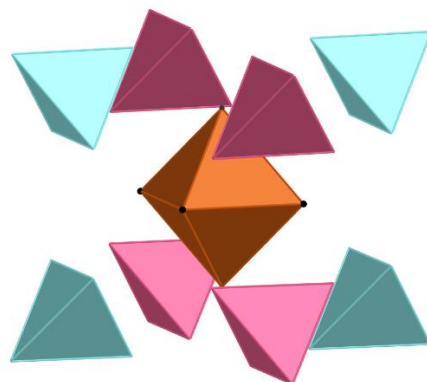
$$V_{stelli\ oct} = \frac{1}{3}a^3 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2}a^3$$

Skoro objętość stelli jest równa $\frac{1}{2}$ objętości sześcianu, w którym jest on umieszczony, to pozostała część po „wykrojeniu” stelli z sześcianu ma taką samą objętość jak stella. Co to sugeruje?

Pojawia się pytanie, czy z pozostałych części można zbudować taką samą stellę octangulę?



rys. 5



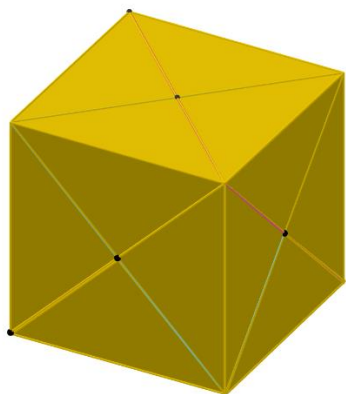
rys. 6

Ta pozostała część uzupełniająca stellę octangulę do sześcianu składa się 12 czworościanów o krawędzi długości a i pięciu krawędziach długości równych połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

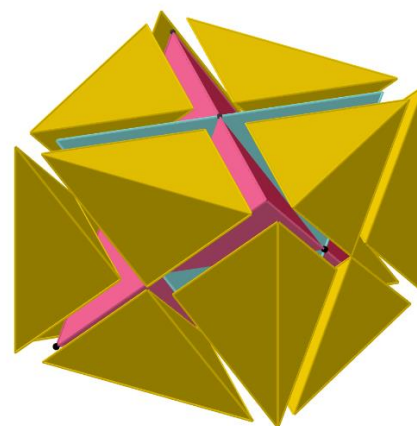
Z czterech pierwszych czworościanów można złożyć ośmiościan foremny, do którego doczepiamy „ramiona” gwiazdy – czyli pozostałe 8 czworościanów. Widzimy je na przeźroczystym widoku stelli na rys. 5.

Pozostałe 8 czworościanów powinno dać osiem ramion gwiazdy ośmiościennej (czyli stelli). Czy faktycznie każdy z ośmiu fioletowych czworościanów na rysunku 6 można uzyskać z ośmiu żółtych czworościanów z rysunku 8 ?

Liczne próby przekonują każdego, że chyba jest to niewykonalne.



rys. 7

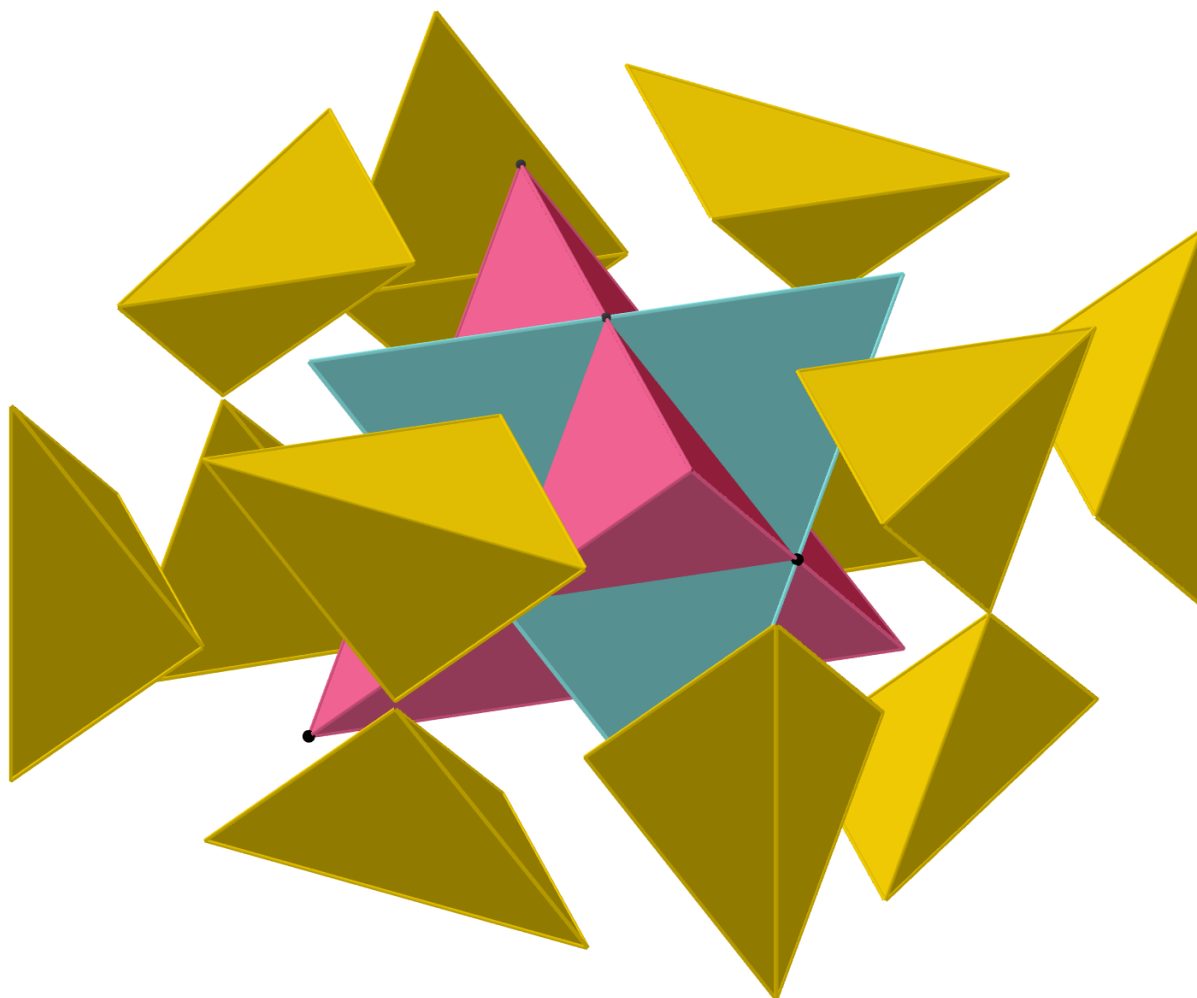


rys. 8

Taki właśnie problem napotkał niemiecki matematyk Dawid Hilbert, który nie potrafił przekształcić, bądź rozciąć pozostałych 8 czworościanów, tak, aby powstały z nich brakujące ramiona gwiazdy.

W 1900 roku podczas II Międzynarodowej Konferencji Matematycznej w Paryżu przedstawił powyższy problem w referacie „Problemy przyszłości matematyki” pod numerem III i do dziś nazywamy go III problemem Hilberta.

„Czy jeśli dwa wielościany mają te same objętości, to czy można rozkroić jeden z nich tak, by z rozciętych elementów uzyskać drugi wielościan?”



rys. 9

III problem Hilberta rozwiązał po roku czasu jego doktorant Max Dehn i wykrył warunek na to, by z jednej bryły o danej objętości, po jej rozcięciu stworzyć inną, o tej samej objętości.

Dehn założył, że jeśli jeden wielościan można rozciąć na skończoną liczbę kawałków, z których da się złożyć drugi wielościan to te wielościany są **równorozkładalne**.

Dla każdego wielościanu określił liczbę zwaną **niezmiennikiem Dehna $D(W)$** , będącą resztą z dzielenia przez liczbę π sumy iloczynów długości krawędzi $l(e_i)$ wielościanu przez miary $\varphi(e_i)$ kątów dwuściennych między ścianami stykającymi się wzdłuż tych krawędzi wyrażonych w radianach.

$$D(W) = \sum_i l(e_i) \cdot T(e_i) [\text{mod } \pi]$$

Jeśli dwa wielościany o tej samej objętości mają tą samą resztę z dzielenia niezmiennika Dehna przez liczbę π to są równorozkładalne.

Praktycznie rzecz biorąc aby stwierdzić, czy dwa wielościany o tej samej objętości są równorozkładalne, musimy dla dwóch wielościanów o tej samej objętości wyznaczyć poniższe dwie wartości:

$$\begin{aligned} D(W_1) &= l_1 * \varphi_1 + l_2 * \varphi_2 + l_3 * \varphi_3 + \dots + l_n * \varphi_n = \dots [\pi] \\ D(W_2) &= l_1 * \varphi_1 + l_2 * \varphi_2 + l_3 * \varphi_3 + \dots + l_n * \varphi_n = \dots [\pi] \end{aligned}$$

gdzie:

l_i - to długość i -tej krawędzi,

φ - miara kąta dwuściennego wyrażona w radianach.

I zbadać, czy każda z tych wartości po podzieleniu przez liczbę π daje tę samą resztę.

Niezmiennik Dehna wielościanu W zależy oczywiście od długości jego krawędzi i miar kątów dwuściennych przy tych krawędziach. Oto kilka jego własności:

- Dehn dowiódł, że dwa wielościany są równorozkładalne, wtedy gdy mają ten sam niezmiennik Dehna.
- Jeśli wielokąt W jest rozcięty przez jedną płaszczyznę na n części $W_1, W_2, \dots, W_n$ wówczas:
$$D(W) = D(W_1) + D(W_2) + \dots + D(W_n)$$
- Max Dehn obliczył, że sześcian ma niezmiennik równy 0, a czworościan foremny - niezmiennik niezerowy.
- To pozwoliło mu stwierdzić, że czworościan i sześcian o równych objętościach nie są równorozkładalne.

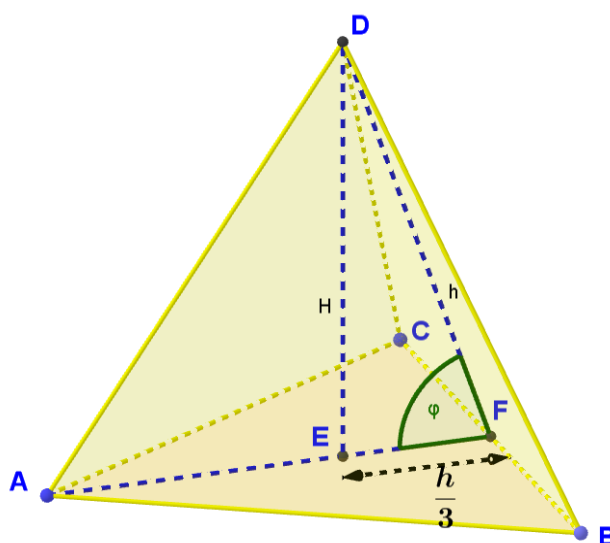
Twierdzenie:

Dwa wielościany o równych objętościach nie są równoważne przez rozcięcie (równorozkładalne) jeśli mają różne niezmienniki Dehna.

Opierając się na tym twierdzeniu, możemy teraz sprawdzić czy czworościany związane ze stellą octangullą są czy nie są równorozkładalne. Ich objętości są równe i wynoszą $\frac{1}{6}$ objętości sześcianu.

Obliczmy, więc niezmiennik Dehna dla czworościanu foremnego, który jest „ramieniem” stelli octanguli oraz dla jednego z czworościanów, który uzupełnia lukę między stellą a sześcianem.

Przyjmijmy długość krawędzi sześcianu równą 1. Czworościan foremny ma 6 krawędzi o długości $a\sqrt{2}$ i miarach kątów dwuściennych φ przy tych krawędziach. Wyznaczmy miarę kąta φ . Kąt dwuścienny φ między dwiema ścianami czworościanu ilustruje rysunek 10.



rys. 10

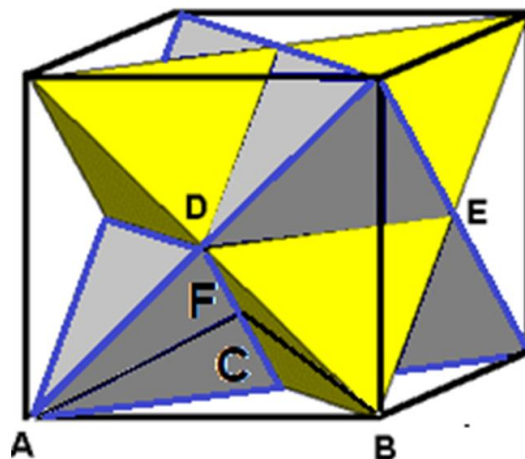
Jest on kątem ostrym w trójkącie EFD a $\cos(\varphi)$ jest ilorazem długości EF / FD . Ponieważ EF stanowi $1/3$ wysokości AF trójkąta równobocznego podstawy, czyli również wysokości FD .

Zatem $\cos(\varphi) = \frac{1}{3}$

Możemy więc powiedzieć, że miara kąta φ jest równa $\arccos(\frac{1}{3})$.

Niezmiennik Dehna dla czworościanu foremnego (czworościan **EDCB** na rys. 11) wynosi więc:

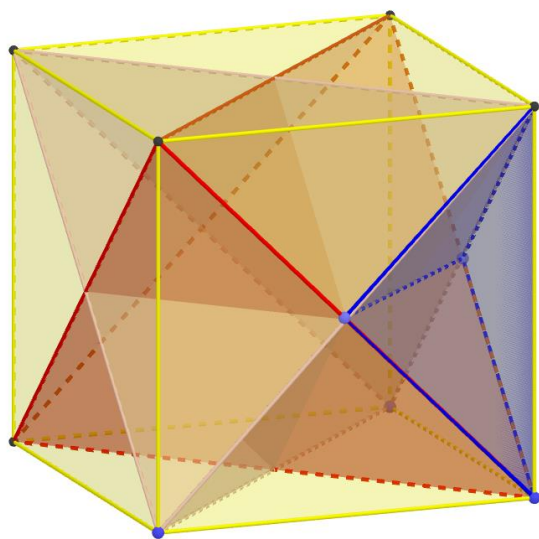
$$D(W) = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$



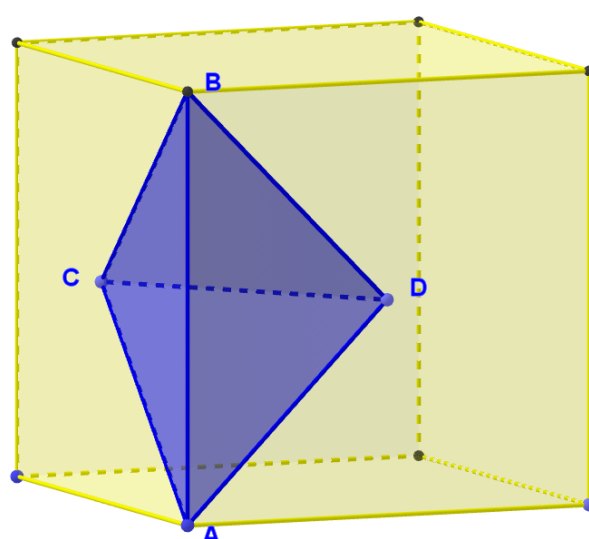
rys. 11

A jaki jest współczynnik Dehna dla czworościanu **ABCD** uzupełniającego stellę do sześcianu – rys. 12 i rys. 13) ?

Miara kąta dwuściennego przy krawędzi **AB** wynosi $\frac{\pi}{2}$. A więc $\cos$ tego kąta jest równo 0. Miary kątów dwuściennych przy krawędziach **BC**, **AC**, **AD** i **BD** są sobie równe i wynoszą połowę różnicy $\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, ponieważ dwa z takich kątów i kąt dwuścienny czworościanu dają w sumie kąt półpełny o mierze π rad.



rys. 12



rys. 13

Miara kąta dwuściennego przy krawędzi **CD** o długości $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (połowy przekątnej kwadratu, będącego ścianą sześcianu) jest uzupełnieniem miary kąta dwuściennego w czworościanie foremnym do kąta półpełnego. Zatem miara tego kąta wynosi $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Jak widać współczynniki Dehna dla obu czworościanów nie są równe, więc te dwa czworościany nie są równorozkładalne.

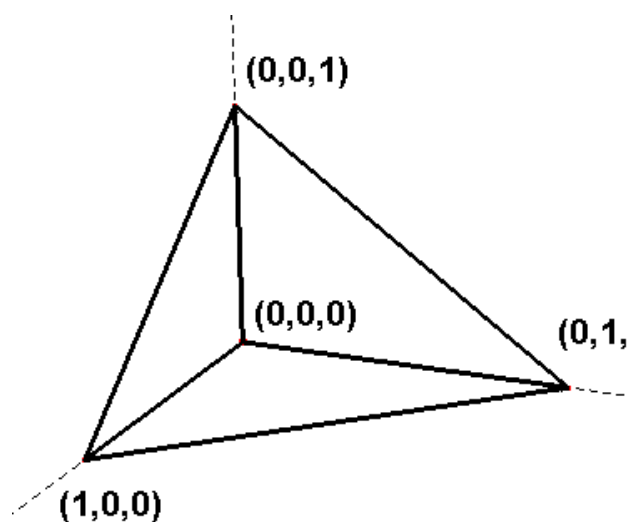
Zatem z czworościanów uzupełniających stellę do sześcianu **nie da się przez ich rozcięcie zbudować drugiej stelli octanguli**.

Problem rozcinania dwóch wielościanów w ten sposób, by z jednego złożyć drugi niepokoił już **Carla Gaussa** (1777-1855).

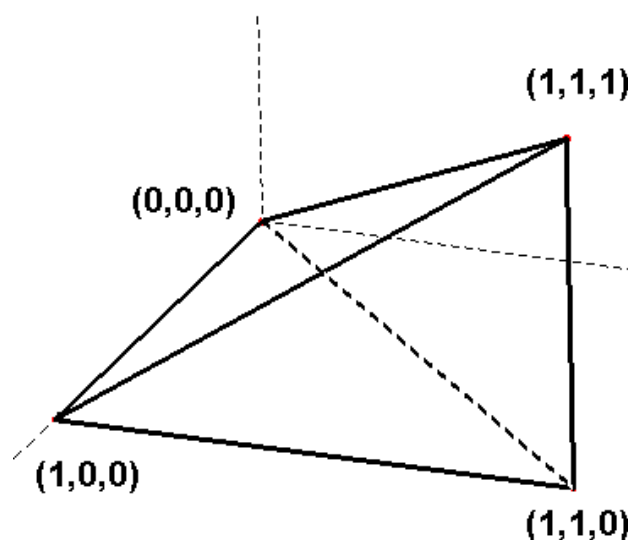
Ma on również swój polski epizod i to już w 1882 roku. Na posiedzeniu Wydziału Matematyczno – Przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie doktor Kretkowski przeznaczył nagrodę 500 franków za rozwiązanie następującego zadania:

„mając dane dwa czworościany równej objętości, zresztą najogólniejsze, pociąć, jeżeli się da to wykonać, płaszczyznami jeden z nich na najmniejszą możliwą liczbę kawałków takich, aby przez stosowne tych kawałków zestawienie, można było zbudować czworościen drugi. W razie, gdyby to dokonać się nie dało, lub było możliwym pod pewnymi zastrzeżeniami, dowieść niemożności, lub też zastrzeżenia te dokładnie określić”.

Te dwa czworościany o których mówił dr Kretkowski prezentują rysunki 14 i 15. Oba jak widać mają tę samą podstawę będącą połową kwadratu i tę samą wysokość, więc mają one równe objętości. Okazuje się, że mimo to, jednego z nich nie da się rozkroić na takie części, aby z nich dało się zbudować drugi. Udowodnił to później profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego Ludwik Birkenmajer (1855-1929).



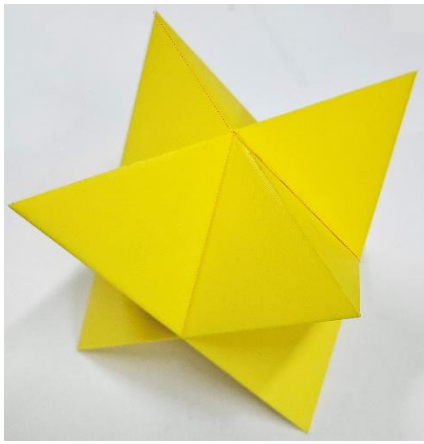
rys. 14



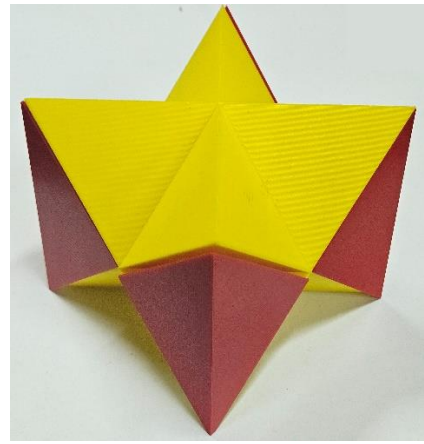
rys. 15

Problem Hilberta jest ciekawszy, gdy badamy go na żywych modelach. Objętości wówczas możemy oceniać i porównać mierząc w ręce bryły i porównując ich ciężary. Poniższe fotografie ilustrują wydruki 3D modelu stelli octanguli oraz dwunastu czworościanów uzupełniających stellę do sześcianu.

Warto jako ciekawy eksperyment zważyć samą stellę a potem 12 czworościanów i sprawdzić, czy ich ciężary są równe. To potwierdzałoby praktycznie twierdzenie, że ich objętości są równe.



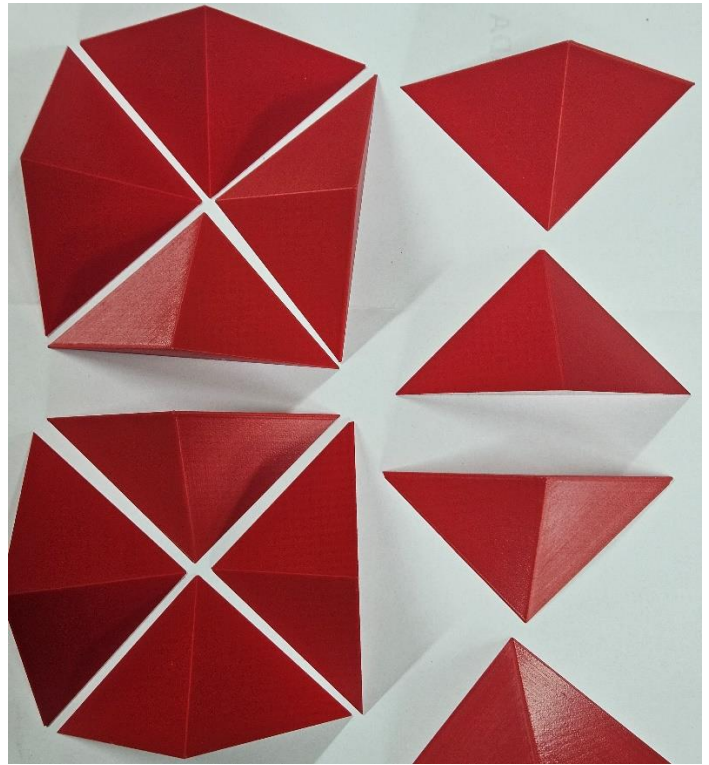
rys. 16



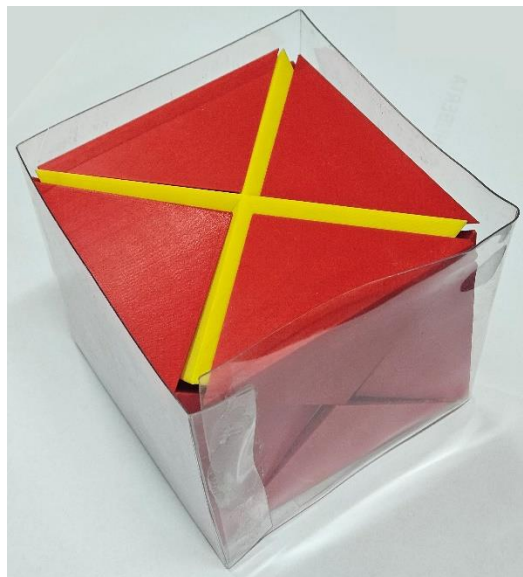
rys. 17



rys. 18



rys. 19



rys. 20