

VII Liceum Ogólnokształcące im. Zofii Nałkowskiej w Krakowie

ul. Stanisława Skarbińskiego 5
30-071 Kraków
tel. 12 292-65-16
e-mail: liceum@vii-lo.krakow.pl

Paradoks toczącej się monety

Autorzy:

Liwia Szczupał

+48 881-647-019

Weronika Matuła

Opiekun pracy:

dr Magdalena Lampa-Baczyńska

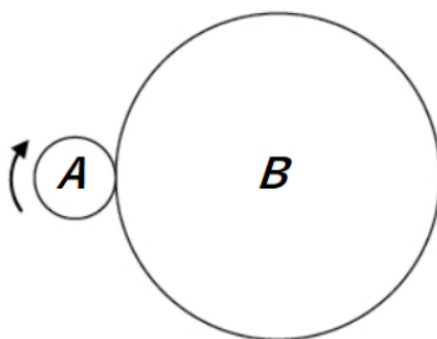
Kraków 2026

1. Wstęp

Paradoks toczącej się monety to jeden z przykładów problemów matematycznych, których rozstrzygnięcie nie wymaga zaawansowanych narzędzi matematycznych. Intuicja podpowiada jednak rozwiązanie niezgodne ze stanem faktycznym.

W 1982 roku na egzaminie S.A.T. (standaryzowany egzamin stanowiący egzamin wstępny na większość amerykańskich uczelni wyższych, odpowiednik naszej matury) w Stanach Zjednoczonych pojawiło się zadanie o następującej treści:

Problem 1.1. Na poniższym rysunku promień okręgu A stanowi $\frac{1}{3}$ promienia okręgu B . Zaczynając od pozycji przedstawionej na rysunku, okrąg A toczy się wokół okręgu B . Po ilu obrotach okręgu A środek tego okręgu osiągnie swój punkt początkowy?



- (a) $\frac{3}{2}$ (b) 3 (c) 6 (d) $\frac{9}{2}$ (e) 9

Większość zdających wskazała odpowiedź (b) jako prawidłową. Jest to odpowiedź zgodna z powszechną intuicją – w końcu obwód okręgu B jest trzykrotnie większy niż obwód okręgu A .

Zaledwie kilka dni później zadanie to zyskało światowy rozgłos, gdy okazało się, że wśród sugerowanych odpowiedzi zabrakło prawidłowego rozwiązania. Informował o tym nawet artykuł *Error found in S.A.T. question* na łamach *New York Times* [5]. Kilku zdających, którzy prawidłowo rozwiązyli zadanie, zgłosili organizatorom egzaminu, że w jego treści wystąpił błąd. Po przeanalizowaniu ich rozwiązań, wyniki egzaminu zostały zrewidowane, a cały świat obiegła informacja o błędzie w jednym z zadań egzaminacyjnych S.A.T. w 1982 roku.

2. Na czym polega paradoks, czyli dlaczego 3 nie jest prawidłową odpowiedzią

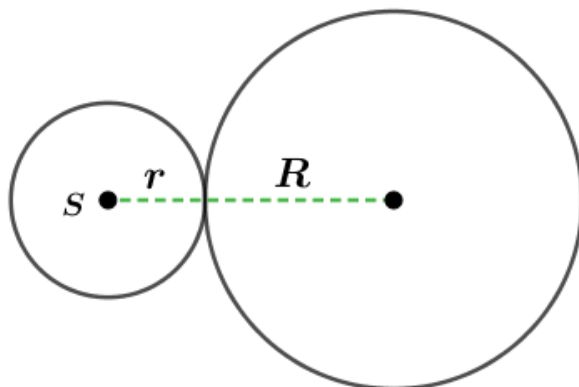
Rozważmy bardzo podobny, aczkolwiek nieco łatwiejszy problem. Weźmy dwie identyczne monety i załóżmy, jak w powyższym zadaniu egzaminacyjnym, że jedna toczy się po obwodzie drugiej. Ponieważ monety są identyczne, ich obwody są takie same. Intuicja podpowiada więc, że po jednym obrocie moneta powinna wrócić do punktu wyjścia.

Samodzielne przeprowadzenie takiego doświadczenia uświadamia jednak, że nie jest to prawda. Jak możemy zobaczyć na poniższej ilustracji, na której celowo połowa obwodu została zaznaczona kolorem czerwonym, po wykonaniu jednego pełnego obrotu, moneta przetoczy się dopiero wzdłuż połowy obwodu drugiej monety. Aby zatem powrócić do punktu wyjścia, potrzebny jest jeszcze jeden pełen obrót.

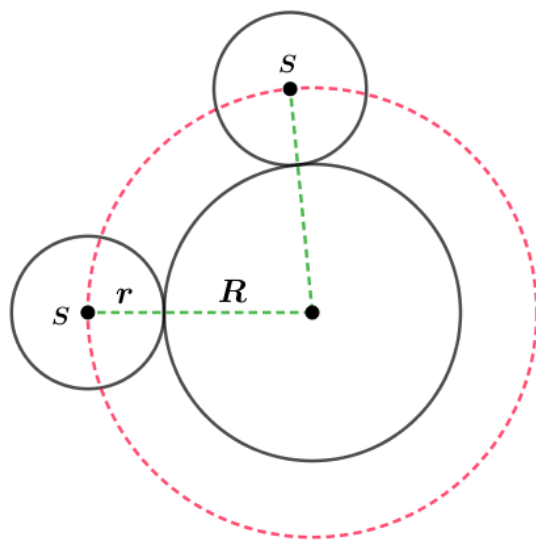


Na czym polega więc błąd w rozumowaniu? Dlaczego kiedy toczymy przystające koła o równych obwodach potrzeba aż dwóch obrotów?

Błędem jest skupianie się właśnie na obwodach wyjściowych okręgów. W zadaniu egzaminacyjnym pytanie jest o środek okręgu. Mianowicie kiedy ten punkt wróci do swojego początkowego położenia. Zatem należałoby się zastanowić, co dzieje się z jego położeniem podczas toczenia jednego okręgu po drugim. Rozważmy więc dwa okręgi styczne zewnętrznie, z których to mniejszy będzie się poruszał po obwodzie większego. Niech R oraz r oznaczają odpowiednio promienie okręgu większego i mniejszego (jak na rysunku poniżej).



Oznaczmy przez S środek mniejszego okręgu. Jest to punkt, którego zmiany położenia chcemy śledzić podczas toczenia się jednego okręgu po obwodzie drugiego. Przypuśćmy, że mniejszy okrąg zmienił już położenie (rysunek poniżej).



Można zauważyć, że punkt S porusza się po okręgu, którego promień ma długość $R + r$. Na rysunku powyżej okrąg ten zaznaczony jest czerwoną przerywaną linią, a jego promień (w dwóch różnych położeniach mniejszego okręgu) zielonymi odcinkami.

Czyli tak na prawdę pytamy, ile obrotów musi wykonać okrąg o promieniu r , aby punkt S zatoczył okrąg o promieniu $R + r$. Porównać więc należy ich obwody, a nie obwody wyjściowych okręgów. Stosunek tych obwodów jest równy:

$$\frac{2\pi(R + r)}{2\pi r} = \frac{R + r}{r} = \frac{R}{r} + 1$$

Oznacza to, że zawsze konieczny będzie jeden dodatkowy obrót w odniesieniu do stosunku obwodów wyjściowych okręgów. Stąd, gdy analizowaliśmy identyczne monety, konieczne były dwa obroty. Zaś prawidłową odpowiedzią na zadanie egzaminacyjne S.A.T. jest 4.

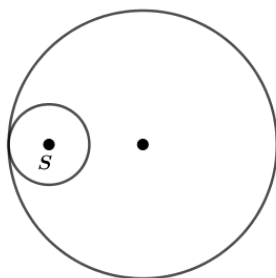
3. Problemy pokrewne – okręgi styczne wewnętrznie

W naturalny sposób nasuwa się tu pytanie o sytuację, gdy mniejszy okrąg toczy się po obwodzie większego, ale po jego wewnętrznej stronie. Biorąc pod uwagę, że okrąg nie ma grubości, intuicja podpowiada, że sytuacja ta nie różni się od problemu opisanego w części 2. Przecież długość okręgu od strony zewnętrznej i wewnętrznej jest taka sama.

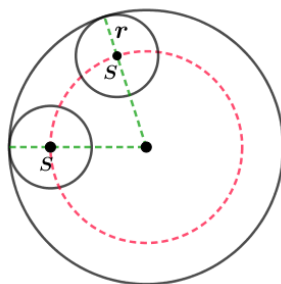
Tym razem jednak trudno wykonać eksperyment, który mógłby nas o tym przekonać. Monety, żetony itp. są dobrymi modelami koła i pozwalają na zasymulowanie toczenia jednego okręgu po drugim. Ale trudno o model samego okręgu, aby wykonać toczenie od strony wewnętrznej.

Łatwo wyobrazić sobie, że w przypadku przystających okręgów nie uda się żaden obrót. Zwyczajnie nie ma na niego miejsca, gdyż okręgi nakładają się na siebie. Ale jak sytuacja wygląda w ogólności?

Z matematycznego punktu widzenia mamy do czynienia z okręgami stycznymi wewnętrznie.



Poprzednia sytuacja pokazała, że kluczem nie są jedynie obwody wyjściowych okręgów, ale krzywa, po której porusza się środek mniejszego kręgu, czyli punkt S . Na poniższym rysunku krzywą tą zaznaczono czerwoną przerywaną linią. Przyjmujemy, że jak wcześniej promień większego okręgu ma długość R .



Widzimy więc, że okrąg wytyczający trasę poruszania się punktu S ma promień $R - r$. Czyli chcemy ustalić, ile obrotów musi wykonać okrąg o promieniu r , aby punkt S zakreślił obwód okręgu o promieniu $R - r$. Odpowiada to ilorazowi:

$$\frac{2\pi(R - r)}{2\pi r} = \frac{R - r}{r} = \frac{R}{r} - 1$$

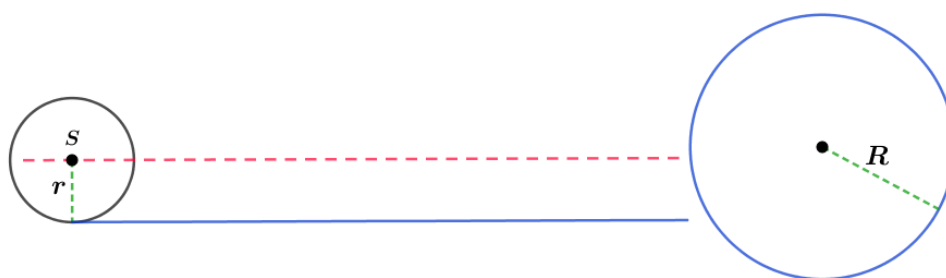
Zatem istotnie dla przystających okręgów liczba obrotów wynosi 0. Zaś w ogólności, jeśli okrąg toczy się po wewnętrznej stronie obwodu drugiego okręgu, liczba obrotów zawsze będzie o 1 mniejsza niż stosunek obwodów wyjściowych okręgów.

4. A gdyby moneta toczyła się po linii prostej?

Wyobraźmy sobie teraz, że rozprostowujemy większy okrąg, a mniejszy ma się przetoczyć po odcinku, którego długość odpowiada obwodowi większego okręgu. Ile wówczas obrotów wykona mniejszy okrąg, aż pokona całą długość odcinka?

Podobnie jak w zadaniu egzaminacyjnym S.A.T. należy przyjrzeć się położeniu środka małego okręgu podczas jego przetaczania się. Przyjmijmy ponownie te same oznaczenia, co w części **2**.

Na rysunku poniżej niebieski odcinek ma taką samą długość, jak obwód okręgu o promieniu R . Jeśli będziemy mniejszy okrąg przetaczać wzdłuż tego odcinka, to punkt S będzie poruszał się po prostej równoległej do tego odcinka, odległej od niego o r . Podobnie jak wcześniej, trasę po której porusza się punkt S zaznaczono czerwoną przerywaną linią.



Tym razem punkt S pokona drogę długości $2\pi R$, zatem liczba obrotów będzie odpowiadać stosunkowi:

$$\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r}$$

tak więc w istocie stosunkowi promieni wyjściowych okręgów.

5. Wnioski

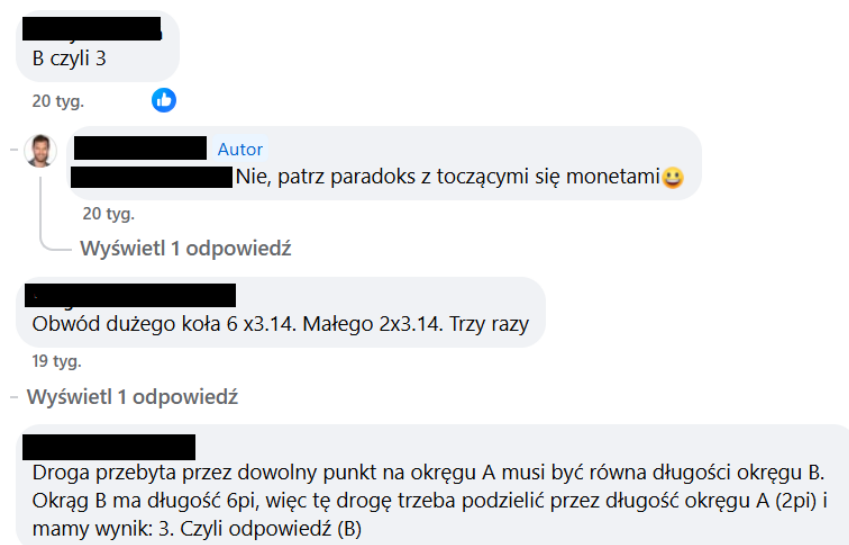
Przeanalizowanie tych problemów matematycznych pokazuje, że nie zawsze należy polegać wyłącznie na intuicji. Pierwszym odruchem jest porównanie obwodów okręgów. Jednak po głębszej analizie okazuje się, że takie rozumowanie jest błędne. Porównanie obwodów nie uwzględnia bowiem istotnego czynnika - mianowicie toru, po jakim w rzeczywistości porusza się mniejsze koło. A porusza się ono po określonej krzywnicy, która wpływa na faktyczną liczbę obrotów.

Omówiliśmy tu trzy sytuacje: gdy koło toczy się po zewnętrznym obwodzie drugiego koła, po jego wewnętrznym obwodzie, a także po linii prostej. W każdym z tych przypadków uzyskany wynik jest inny. Dopiero dokładna analiza sytuacji, oparta na faktach matematycznych, pozwala ustalić poprawną odpowiedź. Pierwsza intuicja okazuje się błędna.

Problem toczącej się monety zyskał sławę po pojawieniu się zadania na egzaminie S.A.T., jednak znany był już nieco wcześniej. W 1975 roku Martin Gardner opublikował go w artykule *Mathematical Carnival* [2]. Ten matematyk przez całe życie pasjonował się zagadkami matematycznymi i świat zawdzięcza mu wiele publikacji oraz książek zawierających zagwostki matematyczne o charakterze popularyzatorskim i rekreacyjnym.

W ostatnich latach można zaobserwować ponowne ożywienie zainteresowania tym problemem. W Internecie dostępnych jest wiele filmów poświęconych temu tematowi. "Wpadce", jaka wydarzyła się na egzaminie S.A.T w 1982 roku, dedykowany jest m.in. artykuł *The SAT Problem That Everybody Got Wrong* [3]. Oprócz źródeł koncentrujących się na nieścisłościach w zadaniu egzaminacyjnym i braku prawidłowej odpowiedzi, istnieją także liczne publikacje naukowe, ujmujące to zagadnienie z szerszej perspektywy. Przykładowo w *Roulette curves, coin paradox and Aristotle's wheel paradox* [4] autor analizuje tory ruchu wyznaczone przez krzywą toczącą się wzdłuż drugiej krzywej. Problem toczącej się monety stanowi szczególny przypadek tej sytuacji.

Biorąc pod uwagę jak znany i szeroko omawiany jest to problem, może zaskakiwać fakt, że wciąż spora grupa osób uznaje za prawidłowe rozwiązanie odpowiedź wynikającą z porównania obwodów. Poniżej prezentujemy fragment dyskusji na *Facebook* dotyczącej właśnie tego zadania.



Generalnie to pytanie nie ma sensu. Domyślam się, że chodzi o to że ile obrotów zrobi A przy jednym obrocie B, ale tutaj odpowiedzią może być nieskończenie wiele i będzie to prawidłowa odpowiedź na pytanie

19 tyg.



Autor

Zadanie widoczne na obrazku, dotyczące obrotów mniejszego okręgu wokół większego, jest znanym problemem matematycznym, który pojawiał się na egzaminie SAT (Scholastic Assessment Test) w Stanach Zjednoczonych. Problem ten jest często ... [Wyświetl więcej](#)

19 tyg.



obwód DK/MK - obwód koła = $2\pi r$ więc $2\pi \cdot 3 / 2\pi \cdot 1 = 2 \cdot 3 / 2 \cdot 1 = 6/2 = ??$ 🐱

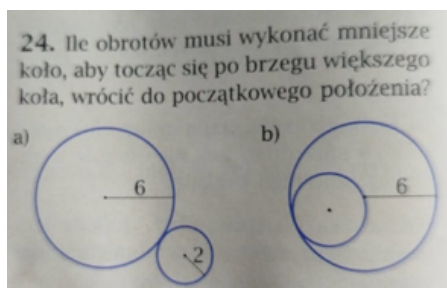
19 tyg.

Można też inaczej ! skoro obwód koła = $2\pi r$ to wystarczy stosunek (nie cielesny) PROMIENI !! czyli $3/1 = ??$ 🤔🤔🤔

Jak widać pojawiły się różne odpowiedzi - w tym także takie, że pytanie nie ma sensu. Jednak dominującym rozwiązaniem, podawanym przez większość uczestników forum jest stosunek obwodów oby okręgów. Zaledwie jeden dyskutant odwołuje się do paradoksu toczącej się monety i próbuje wyprowadzić pozostałych z błędu.

Zapewne można to zrozumieć w przypadku osób, które posługują się matematyką na fundamentalnym poziomie, bez znajomości specjalistycznych narzędzi. Okazuje się jednak, że równie łatwo w błąd pozwalają się wprowadzić osoby z wykształceniem matematycznym, a nawet autorzy podręczników.

Zadanie to pojawiło się w podręczniku do matematyki dla gimnazjum wydawnictwa GWO [1]. Został on przygotowany przez zespół kilku autorów, pozytywnie oceniony przez rzeczoznawców i dopuszczony do użytku. Poniżej widzimy skan podręcznika zestawiony z odpowiedziami do zawartych w nim zadań.



c) $\frac{1}{6}\pi a$; $\frac{1}{36}\pi a$. 18. a) Minutowa: 180° , godzinowa: 15° , b) min
 1. $\frac{1}{9}\pi r^2$, $\frac{1}{4}\pi r^2$, $\frac{5}{18}\pi r^2$, $\frac{13}{36}\pi r^2$. 20. $4\sqrt{5}\pi$; $10\pi - 16$. 21. 16π . 22
 $\sqrt{2}\text{ cm} \approx 7,07\text{ cm}$. 24. a) Trzy obroty, b) dwa obroty. 25. $2\pi -$
 27. 3 cm. 28. a) $2\sqrt{10}$ i $\sqrt{26}$, b) przecinają się. 29.
 31. a) 3 punkty; 4 punkty; 6 punktów, b) 44. 32. Kwadra
 2 ; sześciokąt: $128\sqrt{3}\text{ cm}^2$. 33. 12,5 cm. 34. a) $a\pi$, b) $\frac{4}{3}h$.
 $\frac{4}{7}\text{ cm}$, c) 2 cm. 40. Jedna. 41. ① 2 osie symetrii lub 4 os

Nawet w analizowanym podręczniku zadanie zostało rozwiązane błędnie. Co ciekawe, tylko w części a), ponieważ odpowiedź do części b) już jest prawidłowa. Oczywiście zakładając, że promień mniejszego okręgu również ma długość 2, gdyż treść zadania nie precyzuje tej informacji. Wobec braku sygnału, że jest inaczej, przyjęliśmy, że dane w obu częściach zadania są takie same.

Rozwiązania do zadań w podręcznikach szkolnych opracowywane są przez ekspertów z zakresu matematyki, dysponujących naprawdę szerokim wachlarzem narzędzi. W tym przypadku jednak, mimo wysokich wykwalfikacji nie udało im się uniknąć pomyłki. Pokazuje to, że matematyka może przyjmować naprawdę zaskakujące oblicza, także dla specjalistów.

Podziękowania. Pragniemy złożyć serdeczne podziękowania naszej Pani matematyk, dr Magdalena Lampa-Baczyńska za inspirację, wsparcie, cenne uwagi i wprowadzenie nas w tajniki programów LaTeX i GeoGebra.

Literatura

- [1] Bolałek Z., Dobrowolska M., Jucewicz M., Karpiński M., Lech J., Mysior A., Zarzycka K.: *Matematyka 3. Podręcznik. Gimnazjum*, GWO, Gdańsk 2017.
- [2] Gardner M.: *Mathematical Carnival*, Alfred A. Knopf, New York 1975.
- [3] Murtagh J.: *The SAT Problem That Everybody Got Wrong*, Scientific American, 2023.
- [4] Santos-Pereira O. L.: *Roulette curves, coin paradox and Aristotle's wheel paradox*, Revista Brasileira de Ensino de Física, 2025.
- [5] *Error found in S.A.T. question*, New York Times, May 25, 1982, Section D, Page 23.
<https://www.nytimes.com/1982/05/25/us/error-found-in-sat-question.html>