

Wymiar 4. w analogii do wymiarów niższych

Adam Stachowicz

Powiatowe Centrum Kształcenia Zawodowego i Ustawicznego
w Wieliczce

Praca matematyczna napisana pod opieką
dr Bronisława Pabicha

Wstęp	3
Hipersześcian	5
Wielokomórki foremne	7
5-komórka	7
16-komórka	8
24-komórka	8
Charakterystyka Eulera	9
Wymiar 2	9
Wymiar 3	10
Wymiar 4	11
Siatki hipersześcianu	12

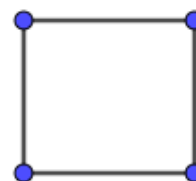
Wstęp

Kiedy po raz pierwszy w szkole zetknęliśmy się z figurami geometrycznymi, nasza wyobraźnia krok po kroku przyzwyczajała się do coraz bardziej złożonych obiektów przestrzennych. Zaczynaliśmy od odcinka – obiektu jednowymiarowego, w którym poruszamy się tylko w jednym kierunku (o dwóch zwrotach: "naprzód", "wstecz"). Wymiar pierwszy należy kojarzyć z tylko jednym rozmiarem obiektu, czyli jego długością. Można również myśleć o nim w kategorii translacji, to znaczy: przesuwamy punkt wzdłuż pewnego kierunku i łączymy punkt pierwotny z przesuniętym.

Chcąc dodać kolejny wymiar obiektu, wprowadzamy kierunek przesunięcia prostopadły do tego wyznaczonego przez obiekt wymiaru pierwszego. Otrzymamy wówczas prostokąt, który posiada długość i szerokość, a jego wierzchołki i krawędzie rozciągają się w płaszczyźnie. Można go również uzyskać poprzez przesunięcie odcinka w kierunku prostopadłym do niego. Gdy wielkość przesunięcia jest równa długości odcinka otrzymujemy kwadrat, czyli hipersześcian wymiaru drugiego.

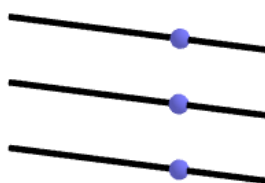


Wymiar 1. jako przesunięcie punktu



Wymiar 2. jako przesunięcie odcinka

Idąc dalej, przesuwamy prostokąt w trzecim kierunku prostopadłym do obydwu poprzednich, otrzymując dobrze znany nam prostopadłościan. W tym przypadku mamy już trzy niezależne wymiary: długość, szerokość i wysokość (lub głębokość). Jeśli wielkość przesunięcia jest równa długości boków kwadratu otrzymujemy tradycyjny sześcian trójwymiarowy.



Wymiar 3. jako przesunięcie prostokąta / kwadratu

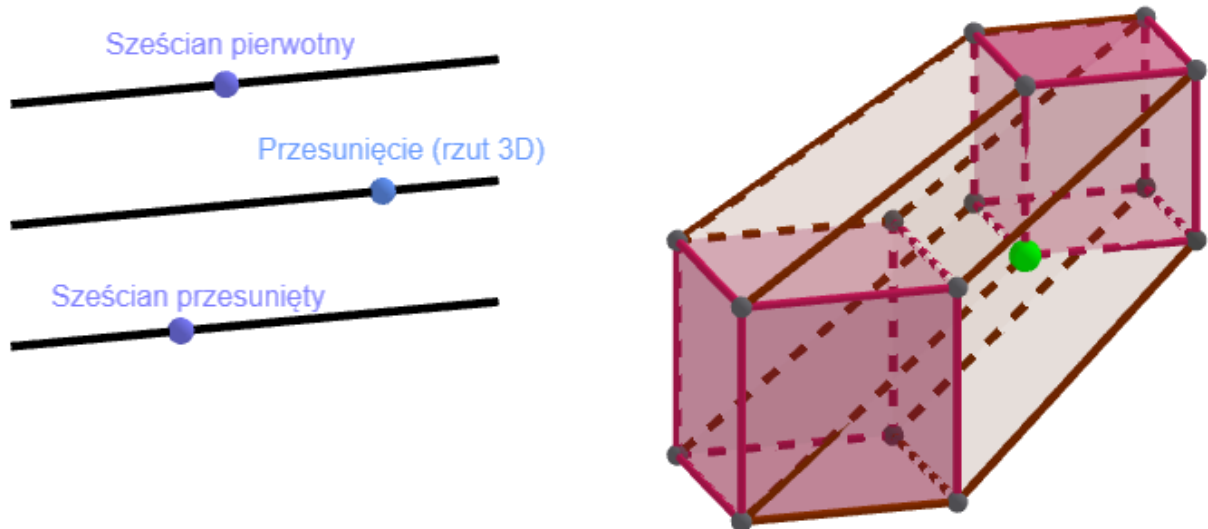
Analogicznie można zastanowić się, co by się stało, gdybyśmy wykonali kolejny krok – przesunęli uzyskany sześcián w czwartym kierunku, który jest prostopadły do wszystkich trzech poprzednich kierunków. Jest to niemożliwe w wymiarze trzecim, albowiem każdy wektor w wymiarze trzecim jest liniowo zależny od trzech wektorów podstawowych (wersorów).

Nie jesteśmy w stanie bezpośrednio zobaczyć tego kierunku ani innych obiektów czterowymiarowych, ale możemy obserwować jedynie ich rzuty trójwymiarowe. Widzimy więc, że budowa kolejnych wymiarów opiera się na prostym, ale niezwykle sugestywnym schemacie. Każdy nowy wymiar powstaje poprzez przesunięcie obiektu w nowym, prostopadłym do wszystkich poprzednich, kierunku.

Zobaczmy, jak wygląda sześcián czterowymiarowy czyli hipersześcián.

Hipersześcian

Hipersześcian jest najbardziej znaną i jedną z prostszych figur czterowymiarowych, podobnie jak sześcián w trzecim wymiarze. Można myśleć o jego konstrukcji w sposób następujący: sześcián przesuwamy wzdłuż czwartego kierunku (nie widocznym w trójwymiarze) i odpowiednio łączymy wierzchołki obu sześciánów. W podobny sposób możemy traktować rzut hipersześciánu na wymiar trzeci.



Wymiar 4 jako przesunięcie sześciánu

Zastanówmy się nad sposobem "generowania" wierzchołków hipersześciánu, a nawet "sześciánów" n -wymiarowych. Przeanalizujemy przykłady, dla uproszczenia o długości krawędzi równej 1, kilku początkowych wartości n i ich wierzchołki:

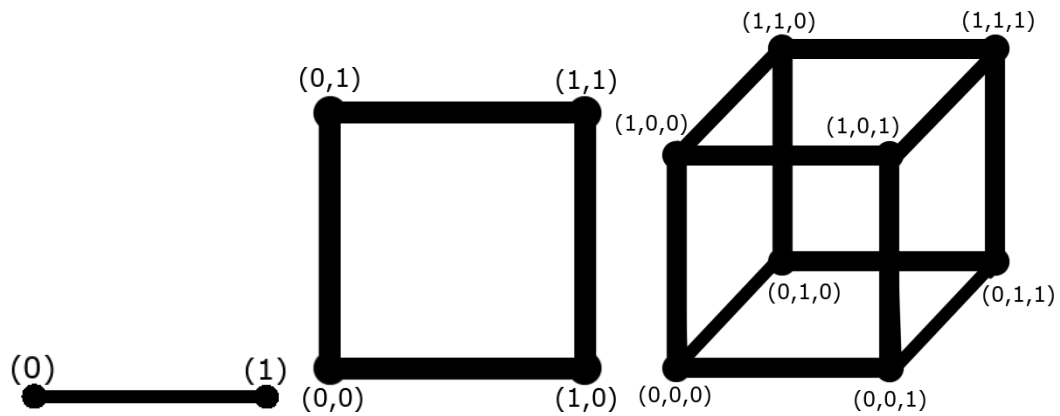
Odcinek: (0), (1)

Kwadrat: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)

Sześcián: (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)

Hipersześcián: (0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1),
(1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)

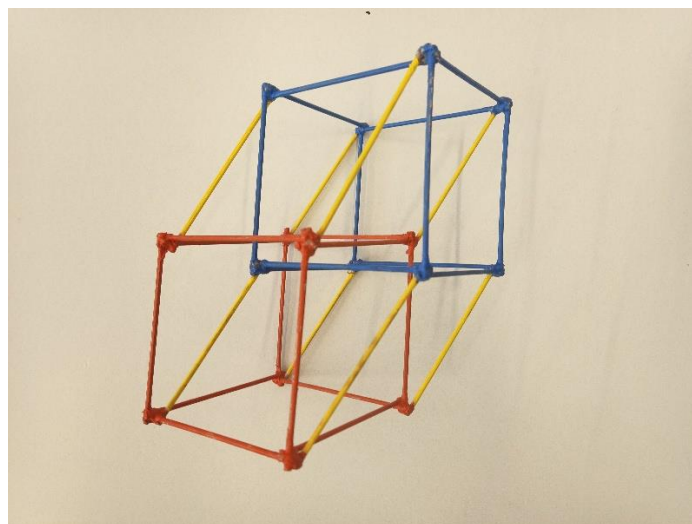
Z punktu widzenia kombinatoryki są jedno-, dwu-, trzy-, a dla hipersześciánu czteroelementowe wariacje z powtórzeniami utworzonymi na zbiorze $\{0,1\}$. Nietrudno zauważyć, że współrzędne wierzchołków przypominają liczby dwójkowe i dla danego n są to wszystkie liczby od 0 do $2^n - 1$ włącznie. Geometrycznie oznacza to, że każdy wierzchołek jest jednoznacznie identyfikowany przez ciąg binarnych wartości (na przykład: "lewy"/"prawy"). Na przykład w sześciánie jest tylko jeden "lewy, górny, przedni" wierzchołek i na odwrót - te wartości jednoznacznie identyfikują pewien wierzchołek.



Możemy zatem tworzyć wierzchołki n -wymiarowego hipersześcianu poprzez kolejne liczby dwójkowe mające n cyfr. Zaczynając od liczby 0 "konwertujemy" ją na współrzędne $(0,0,0,...)$ zależnie od zadanego n . Liczba 1 daje $(0,0,...,1)$ i tak dalej. Na przykład liczba 14 w 5-wymiarowym hipersześcianie daje nam współrzędne $(0,1,1,1,0)$.

Uogólnienie na hipersześcian o dowolnej dodatniej długości boku jest łatwym zadaniem, oznaczmy tę długość jako a . Liczba 0 pozostaje bez zmian, współrzędne wierzchołka reprezentowanego przez nią to $(0,0,0,...)$. Liczba 1 daje nam natomiast współrzędne $(0,0,...,a)$, a przykładowo liczba 7 w hipersześcianie 4-wymiarowym daje wynik $(0,a,a,a)$.

Równie łatwo wprowadzamy zależność od zadanego środka, wystarczy bowiem przesunąć każdy wierzchołek o wektor o początku w środku nie przesuniętego hipersześcianu, a końcu w zadanym środku.



Fotografia trójwymiarowego modelu hipersześcianu

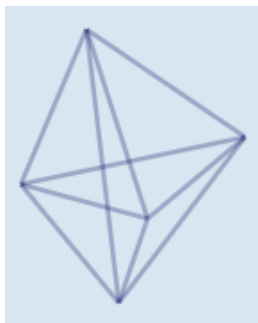
Wielokomórki foremne

Wielokomórki foremne są uogólnieniem wielościanów foremnych na wymiar czwarty, istnieje ich 6, jedną z jest hipersześcian (8-komórka), który już omawialiśmy.

Pozostałe to 5-komórka, 16-komórka, 24-komórka, 120-komórka i 600-komórka, omówimy pierwsze trzy, przy czym skupimy się na "generowaniu" ich wierzchołków.

5-komórka

Jej "odpowiednikiem" w 3. wymiarze jest czworościan foremny, jest ona sympleksem.



Rzut 5-komórki na wymiar 2.

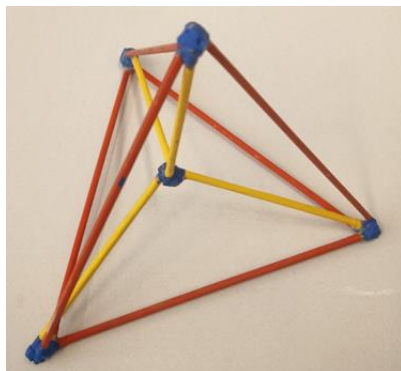
Generowanie wierzchołków:

Metoda ta działa dla dowolnego n -wymiarowego sympleksu, $n \geq 2$.

Pierwsze $n-1$ wierzchołków jest postaci: $(1,0,0,\dots)$, $(0,1,0,\dots)$, ..., natomiast ostatni wierzchołek jest postaci $(\frac{-1}{1+\sqrt{(n+1)}}, \frac{-1}{1+\sqrt{(n+1)}}, \dots)$. Długość boku wynosi wtedy $\sqrt{2}$, żeby wynosiła ona daną wartość a , musimy wszystkie współrzędne pomnożyć przez $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Z racji foremności, jego środek ciężkości pokrywa się ze środkiem hipersfery na nim opisanej. Każda współrzędna tegoż środka jest średnią arytmetyczną odpowiednich współrzędnych wszystkich wierzchołków, to znaczy: pierwsza współrzędna szukanego środka ciężkości jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych wszystkich wierzchołków.

Ze współrzędnych wierzchołków danych wyżej łatwo wyznaczamy, iż każda współrzędna tego środka jest równa $\frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{1 + \frac{-1}{1+\sqrt{(n+1)}}}{n+1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(n+1)} - n - 1}{-n \times (n+1)}$. Na końcu przesuwamy każdy wierzchołek o wektor o początku w znalezionym środku ciężkości i końcu w zadanym środku figury. W ten sposób otrzymujemy n -wymiarowy sympleks o dowolnej długości boku i dowolnym środku.



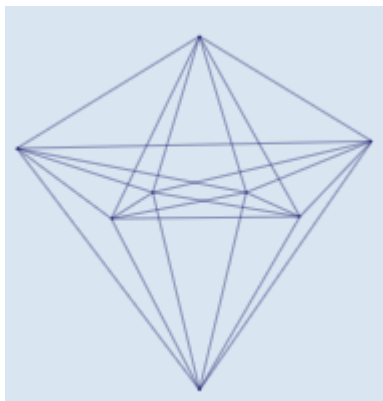
Fotografia modelu 3-wymiarowego 5-komórki 4D

16-komórka

Zwana inaczej wielościanem krzyżowym.

Generowanie wierzchołków:

Dla boku o długości a jej wierzchołki mają postaci $(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0)$, $(0, \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $(0, 0, \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0, 0, 0, \pm \frac{a}{\sqrt{2}})$. Wtedy jej środek znajduje się w punkcie $(0, 0, 0, 0)$, zatem aby ten środek znajdował się w zadanym punkcie wystarczy przesunąć każdy z wierzchołków o wektor o początku w początku układu współrzędnych i o końcu w zadanym punkcie.



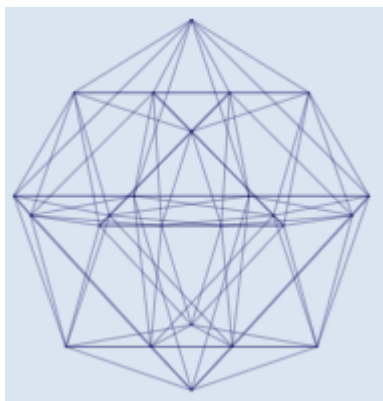
Jeden z rzutów 16-komórki na wymiar 2.

24-komórka

Generowanie wierzchołków:

Dla boku o długości a jej wierzchołki mają postać wszystkich 24 permutacji zbioru

$\{ \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, 0 \}$. Podobnie jak w wypadku 16-komórki jej środek znajduje się w punkcie $(0, 0, 0, 0)$, zatem ażeby miała ona dowolny środek wystarczy przesunąć każdy z wierzchołków o wektor o początku w początku układu współrzędnych i o końcu w zadanym punkcie.



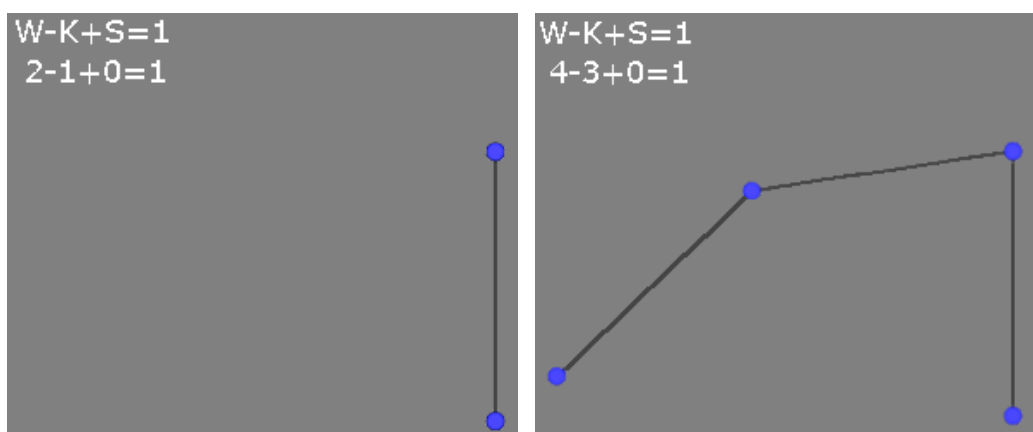
Jeden z rzutów 24-komórki na wymiar 2.

Charakterystyka Eulera

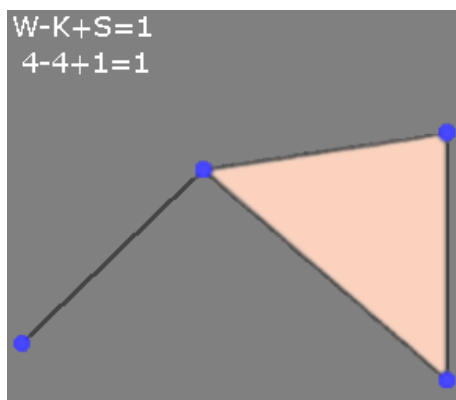
Wymiar 2.

Na początku udowodnimy charakterystykę Eulera w wymiarze 2., czyli pokażemy, że $W - K + S$ jest liczbą stałą, gdzie W , K , S to liczby odpowiednio wierzchołków, krawędzi i ścian.

Zacznijmy od odcinka, ma on dwa wierzchołki, jedną krawędź, oraz nie posiada ścian, otrzymujemy więc $2 - 1 + 0 = 1$. Dołożmy teraz nowy punkt i połączmy go krawędzią z dowolnym z istniejących, mamy teraz $3 - 2 + 0 = 1$, zróbmy tak raz jeszcze, a otrzymamy $4 - 3 + 0 = 1$. Zauważmy, że liczba wierzchołków i krawędzi wzrosła o taką samą wartość, zatem ich różnica jest stała.



Połączmy teraz dwa istniejące punkty, otrzymamy jedną ścianę i jedną krawędź więcej, łatwo sprawdzić, że $4 - 4 + 1 = 1$. Również w tym wypadku liczba krawędzi i stan rośnie o tę samą wartość, zatem ich różnica również jest stała.



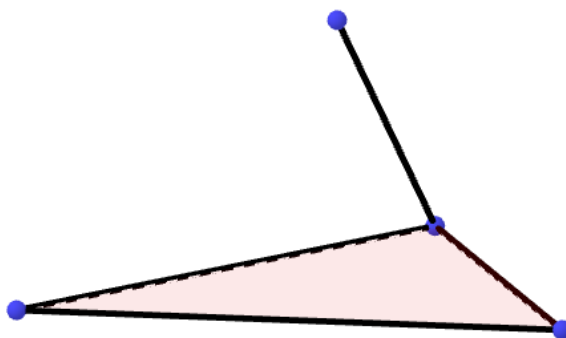
Jeśli ograniczymy się do dodawania maksymalnie jednej krawędzi na raz, to opisane powyższe dwie operacje (dodawania nowego wierzchołka, łączenie dwóch istniejących), są jedynymi możliwymi. Jeśli chcielibyśmy dodawać więcej niż jedną krawędź, bądź wierzchołek na raz, to moglibyśmy taką operację "rozbić" na dwie powyższe. Pokazaliśmy zatem, że wartość $W - K + S$ jest stała.

Wymiar 3.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla wymiaru 3., w nim wartość wyrażenia: $W - K + S - C$ jest stała, gdzie oznaczenia W , K , S są takie same jak w wymiarze 2. a C to liczba komórek (3-wymiarowych hiperścian).

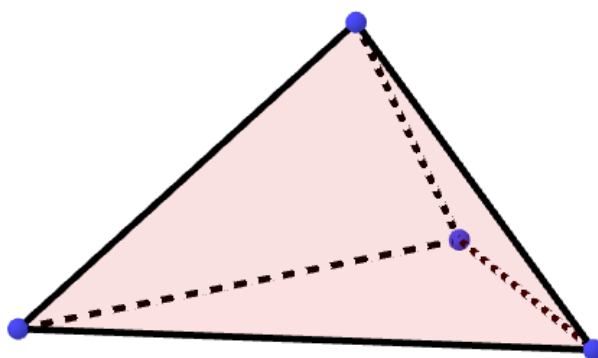
Rozumowanie jest prawie identyczne jak dla wymiaru drugiego, przy czym odcinki i ściany nie muszą już leżeć w jednej płaszczyźnie. Jedyna różnica pojawia się przy połączeniu dwóch istniejących punktów, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, powstaje wtedy komórka (będąca w przykładzie obok ostrosłupem).

$$\begin{aligned}W - K + S - C &= 1 \\4 - 4 + 1 - 0 &= 1\end{aligned}$$



W momencie połączenia dwóch takich punktów powstaje 1 odcinek, 2 ściany i 1 komórka, liczba wierzchołków się nie zmienia. Zatem wartość wyrażenia $W - K + S - C$ przyjmuje postać $W - (K+1) + (S+2) - (C+1) = W - K - 1 + S + 2 - C - 1 = W - K + S - C$, czyli wartość owego wyrażenia się nie zmienia.

$$\begin{aligned}W - K + S - C &= 1 \\4 - 6 + 4 - 1 &= 1\end{aligned}$$



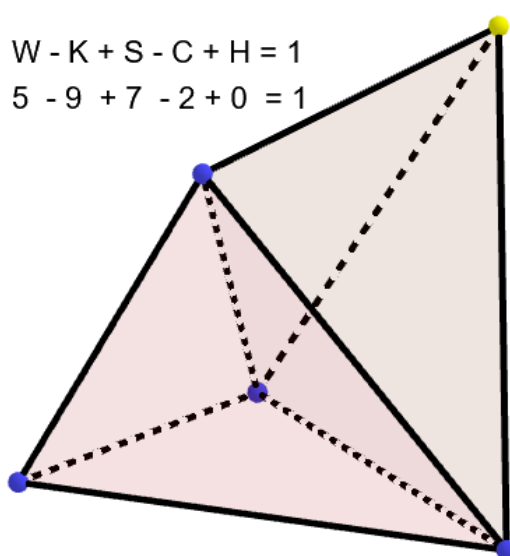
Jeżeli nie łączymy wierzchołków z dwóch różnych płaszczyzn, lub dodajemy nowy wierzchołek, to wszystkie zmiany odbywają się w jednej płaszczyźnie, zatem na mocy dowodu dla wymiaru 2. wartość $W - K + S$ pozostaje nie zmieniona, nie dodajemy również żadnej komórki, czyli również wartość $W - K + S - C$ się nie zmienia.

Wymiar 4.

Odpowiednio wzór wygląda w wymiarze 4.: $W - K + S - C + H = 1$, gdzie H to liczba 4-komórek.

W przykładzie poniżej widzimy rzut trójwymiarowy 5-komórki, kolorem żółtym oznaczono rzut punktu mającego inną 4. współrzędną niż pozostałe. Po zrozumieniu omawianej zależności dla wymiaru 3., przedstawiona sytuacja nie jest skomplikowana, do momentu utworzenia hiperkomórki (jest to ostania "klatka", animacji).

Łatwo zauważyć, że o owym momencie powstaje jedna krawędź, powstają również 3 ściany, każda zawiera powstałą krawędź i jeden z wierzchołków nie wchodzących w skład tejże krawędzi. Takich wierzchołków jest 3, stąd mamy 3 nowe ściany. Powstają również komórki, każda zawiera nową krawędź i po dwa wierzchołki, nie wchodzące w skład tej krawędzi, jest tych ścian zatem tyle, ile 2-elementowych kombinacji zbioru 3-elementowego, czyli 3.



Sytuacja tuż przed powstaniem hiperkomórki

Podsumowując, tuż przed powstaniem hiperkomórki, mamy:

$W - K + S - C + H = 1$, gdzie $W = 5$, $K = 9$, $S = 7$, $C = 2$, $H = 0$,

a po jej powstaniu:

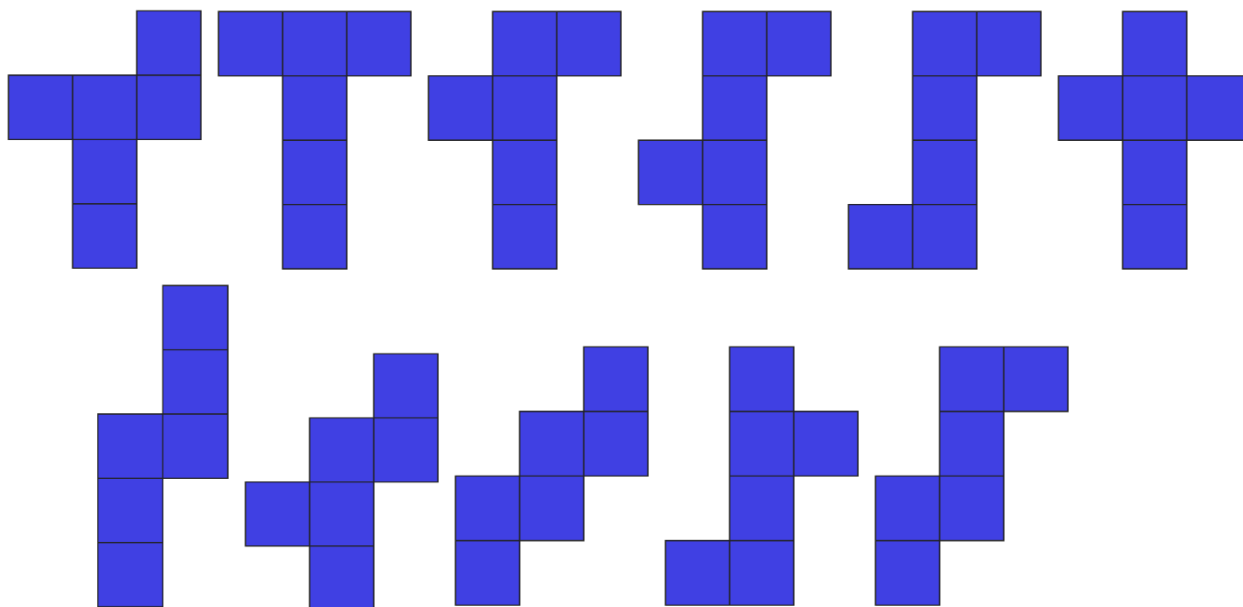
$W - (K + 1) + (S + 3) - (C + 3) + (H + 1) = W - K + S - C + H - 1 + 3 - 3 + 1 = W - K + S - C + H = 1$.

Siatki hipersześcianu

Każdy wielościan ma swoją siatkę, czyli jego przedstawienie na płaszczyźnie utworzone poprzez *rozcięcie* niektórych jego krawędzi, tak aby ściany się nie nakładały i pozostały *spójne*, czyli nierozzerwane.

Wielościany mogą mieć więcej niż jedną siatkę, o tym, którą otrzymamy, decyduje kolejność *rozcinania*. Jedną z bardziej znanych siatek jest siatka sześciianu, dość łatwo zauważyć, że ma on więcej niż jedną możliwą siatkę. Pytanie brzmi zatem: ile jest takich siatek?

Takich siatek jest 11. Oto one:

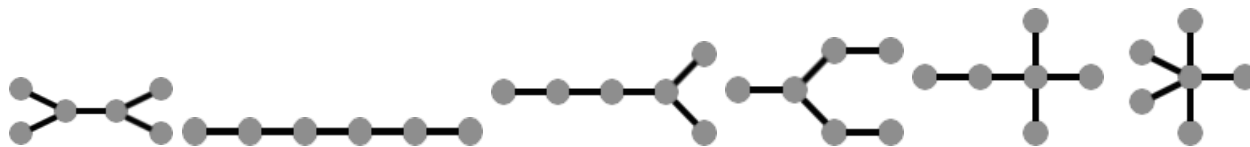


Ale skąd znamy tę liczbę i co jeśli zadamy to samo pytanie dla wymiaru 4., albo wyższego? Spróbujmy najpierw odpowiedzieć na pierwsze pytanie, wprowadźmy pojęcie **drzewa**. Drzewo to graf o n wierzchołkach (na rysunkach niżej mają one kolor szary) i $n-1$ krawędziach (na rysunkach niżej mają kolor czarny).

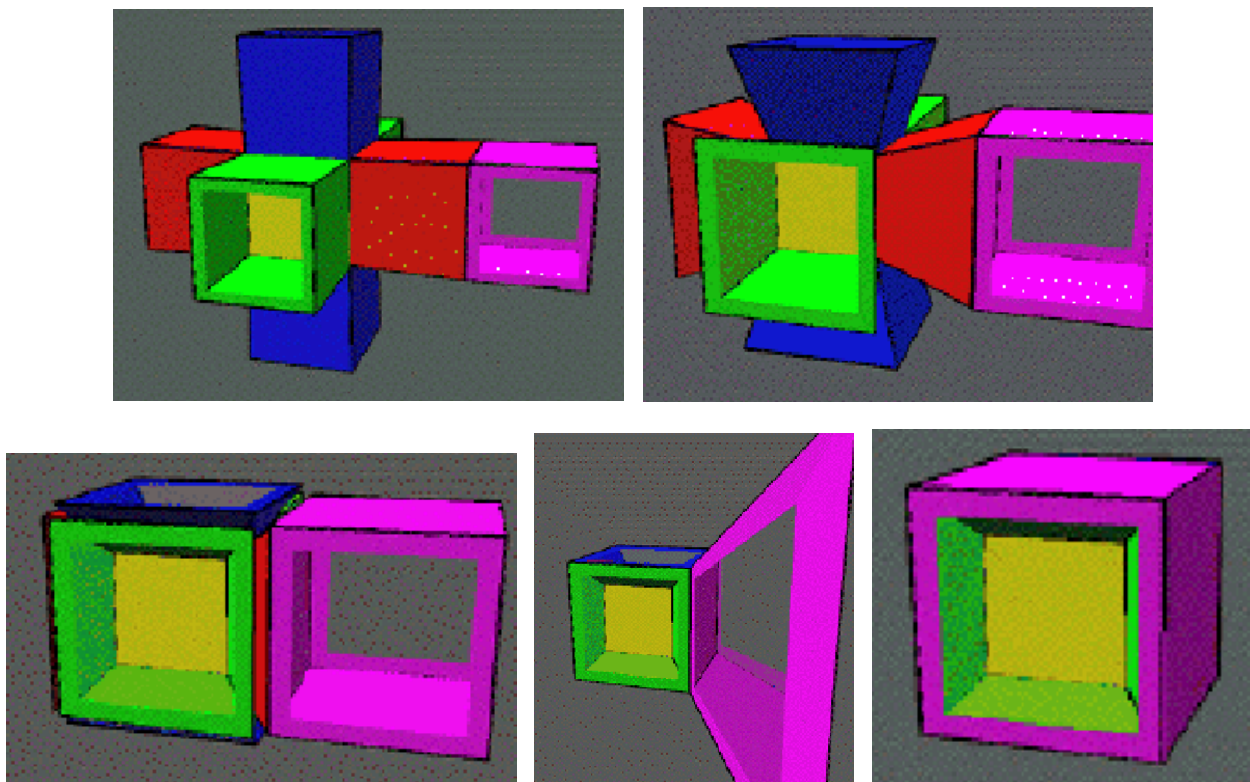
Dodatkowo **drzewem sparowanym** nazwiemy drzewo, którego wierzchołki są połączone w pary, w taki sposób, że wierzchołki będące w parze nie są połączone krawędzią. Drzewo nie zawiera cyklu (ścieżki, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku).

Niech kwadraty w siatce sześciianu odpowiadają wierzchołkom grafu, a krawędzie pomiędzy nimi krawędziom grafu, wierzchołki odpowiadające kwadratowi leżącemu naprzeciw sobie w sześcianie, połączmy w parę. Taka procedura zawsze da nam drzewo o 6 wierzchołkach, albowiem mamy 6 kwadratów połączonych 5 krawędziami. Gdyby krawędzi było mniej, siatka nie byłaby spójna, gdyby więcej, nie dałoby się jej przedstawić na płaszczyźnie. Podobnie drzewo o mniej niż 5 krawędziach nie byłoby spójne, a jeśli miałoby większą ich liczbę, zawierałoby cykl. Również **sparowanym** wierzchołkom będą zawsze oznaczały przeciwległe ściany, żadne *rozcięcie* sześciianu nie spowoduje połączenia tychże ścian krawędzią.

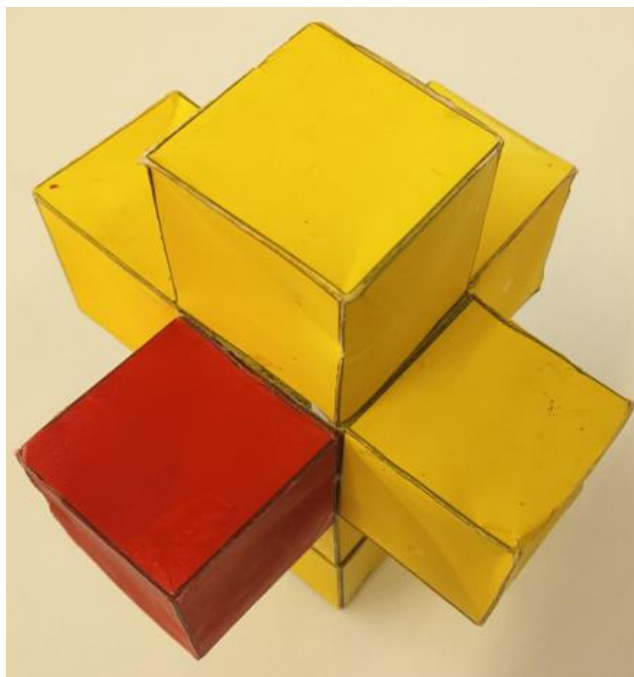
Każde takie drzewo reprezentuje tylko jedną siatkę i każda siatka jest reprezentowana przez dokładnie jedno drzewo. Nie sparowanych drzew dla wymiaru 3. jest 6:



Podobnie postępujemy w wymiarze 4., hipersześcian składa się z 8 komórek (sześciątów), zatem będzie reprezentowany przez *sparowane* drzewo o 8 wierzchołkach. Drzew o 8 wierzchołkach jest 23, możemy je *sparować* na 261 sposobów, zatem istnieje 261 siatek hipersześcianu.



Kolejne etapy „składania” hipersześcianu z jednej z jego siatek



Fotografia trójwymiarowego modelu siatki hipersześcianu