

MAŁOPOLSKI KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH
Praca uczennicy klasy III E XX LO im Leopolda Staffa w Krakowie
Amelii Ranasinghe

PROBLEMY HIROTAKE EBISUI

Praca została napisana pod opieką dr Bronisława Pabicha, który zapoznał mnie na zajęciach koła matematycznego z tzw. heurystykami Georga Poly, czyli metodami rozwiązywania nietypowych zadań z matematyki.

Lubię geometrię i zadania z geometrii, a szczególnie ich dowody. Dlatego też wybrałam za temat mojej pracy propozycję opiekuna „**Problemy Hirotaka Ebisui**”, które zostały stworzone przez współczesnego japońskiego matematyka **Hirotakę Ebisui**, który zajmuje się geometrią płaszczyzny oraz tworzeniem konstrukcji geometrycznych o interesujących własnościach.

Hirotaka Ebisui to japoński matematyk, znany jako osoba zafascynowana geometrią płaską, elementarną i rzutową. W ciągu ostatnich kilku lat stworzył szereg konstrukcji geometrycznych ilustrujących pewną własność matematyczną. Bardzo trudno jest oszacować, ile takich problemów stworzył Hirotaka Ebisui. Przez ostatnie kilka lat profesor Mirosław Majewski z Uniwersytetu Toruńskiego zbierał wszystkie pliki stworzone przez Hirotakę i łączył je w jeden duży dokument zawierający około 800 konstrukcji. Istnieje jeszcze więcej plików Hirotaki, które nie zostały uwzględnione w tej kolekcji. Łatwo zauważyć, że wiele z jego konstrukcji przypomina nam obrazy, które widzieliśmy na tabliczkach sangaku z okresu Edo i późniejszych. Główną różnicą jest to, że jego prace są zawsze konstrukcjami, podczas gdy te na tabliczkach sangaku były zawsze rysunkami



Podejście Hirotaka Ebisui do tworzenia konstrukcji jest bardzo podobne do podejścia, jakie towarzyszyło starym mistrzom **sangaku**. Od czasu do czasu na jego konstrukcjach możemy znaleźć zdanie, w którym dziękuje Bogini Matematyki, Słońcu lub Ziemi za radość nowego odkrycia. Podobnie jak starzy mistrzowie sangaku, często wysyłał swoje prace znajomym z tekstem: „*Oto moje twierdzenie, proszę cieszyć się*”.

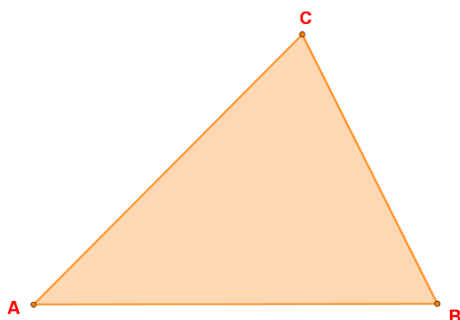
Oryginalne dokumenty EbisuiHirotaki są zazwyczaj bardzo trudne do zrozumienia i w rezultacie tylko nieliczni potrafią je zrozumieć i docenić jego dzieła.

W mojej pracy wykorzystałam 7 rysunków ze zbioru profesora Majewskiego, które udostępnił mi za jego zgodą mój opiekun pracy.

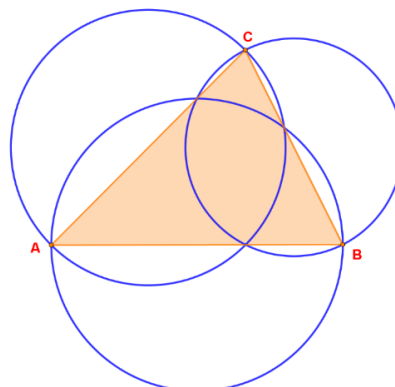
Wykonałam samodzielnie dowody twierdzeń zawartych w tych rysunkach, które odkrył Hirotaka Ebisui. Twierdzenia te nie są znane powszechnie, ale są tak interesujące, że zachęcają do próby ich dowodu. Wykorzystywałam całą swoją wiedzę z geometrii którą udało mi się pozyskać w swojej szkole. Narzędziem poszukującym dowody twierdzeń była dla mnie GeoGebra, która pozwala zmieniać parametry zadania i dostrzegać co się wówczas zmienia w a co zostaje stałe w konstrukcji. To ułatwiło mi odkryć heurystykę rozwiązań.

PROBLEM 1

- Dany jest dowolny trójkąt **ABC**. - rys.1
- Na każdym z boków trójkąta **ABC** konstruujemy trzy okręgi, których średnicami są boki trójkąta. - rys. 2

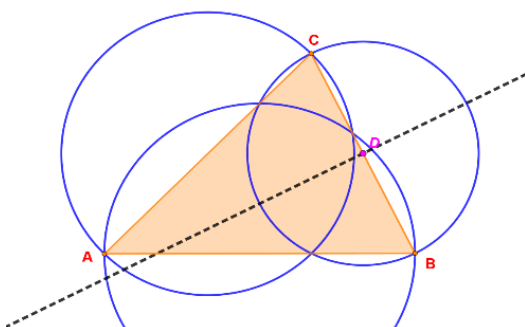


rys.1

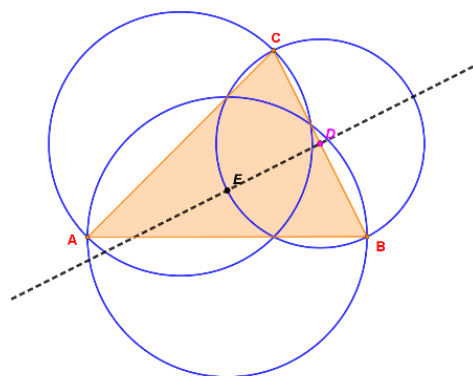


rys.2

- Ze środka jednego z tych okręgów (np. **D**) konstruujemy prostą prostopadłą do boku **CB** trójkąta. - rys.3.
- Prosta ta przecina okrąg w punkcie **E** - rys.4.

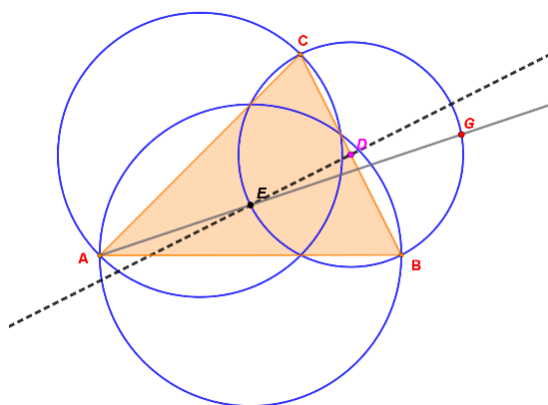


rys. 3

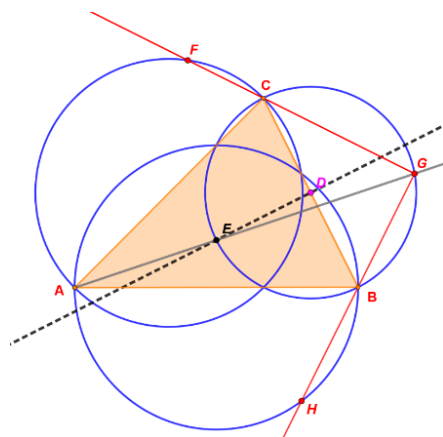


rys. 4

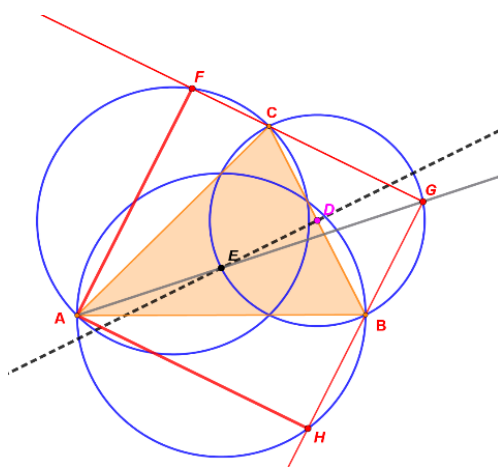
- Z punktu **A** prowadzimy półprostą **AE**. Półprosta ta przecina okrąg o środku **D** w drugim punkcie, który oznaczamy przez **G**. – rys. 5
- Z punktu **G** prowadzimy półprostą **GC**, która przecina okrąg zbudowany na boku **AC** w punkcie **F**. Z punktu **G** prowadzimy również półprostą **GB**, która przecina okrąg zbudowany na boku **AB** w punkcie **H** – rys. 6
- Łączymy punkty **A** z **H** oraz **F** z **A**. W ten sposób otrzymujemy czworokąt **AHGF** - rys.7.



rys.5



rys.6



rys.7

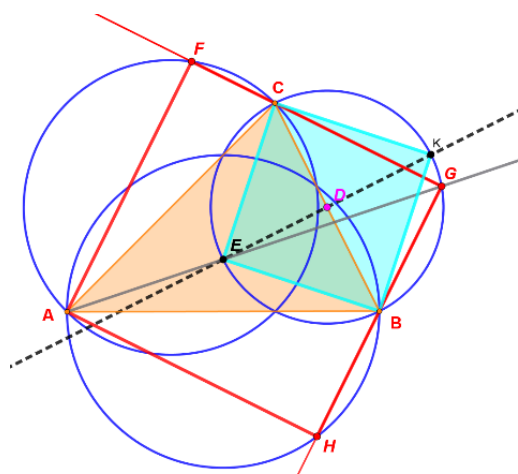
Trzeba udowodnić, że czworokąt **AHGF** jest kwadratem.

Dowód:

Kąty czworokąta **AHGF** są proste, gdyż jego wierzchołki są wierzchołkami kątów wpisanych, opartych na średnicach kół. Zatem czworokąt **AHGF** jest prostokątem.

Aby udowodnić że jest on kwadratem wystarczy wykazać, że dwa sąsiednie jego boki są tej samej długości. Pokażemy że trójkąt **AGF** jest równoramienny.

Niech **K** będzie punktem przecięcia prostej **ED** z okręgiem o środku **D**. Zauważmy że $|\angle BKC| = 90^\circ$, zaś czworokąt **EBKC** jest kwadratem, gdyż prosta **ED** jest symetralną odcinka **CB**.



rys.8

Ponieważ $|\angle EKC| = 45^\circ$ (bo **EK** jest przekątną kwadratu), więc $|\angle EGC| = 45^\circ$, gdyż oba kąty są wpisane, oparte na tej samej cięciwie **CE**. $|\angle FAG| = |\angle \gamma| = 45^\circ = |\angle \beta|$, gdyż $|\angle AFG| = 90^\circ$.

W trójkącie **AGF**: $\angle FAG = \angle FGA = 45^\circ$.

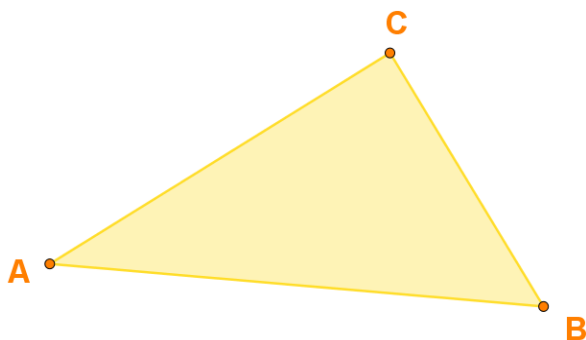
Zatem trójkąt **AGF** jest równoramienny, a więc: $|AF| = |FG|$.

Czworokąt **AHGF** jest prostokątem oraz ma dwie sąsiednie krawędzie tej samej długości.
Zatem: **AHGF** jest kwadratem.

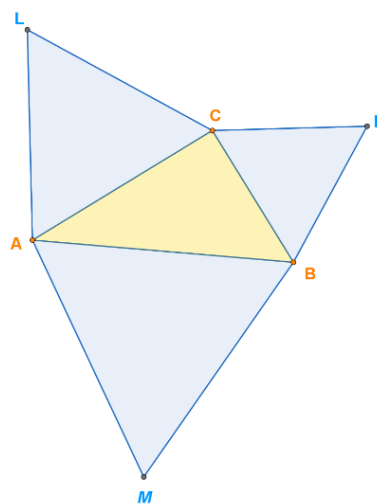
c.b.d.u.

PROBLEM 2

- Dany jest dowolny trójkąt **ABC**. - rys.1
- Na zewnątrz trójkąta **ABC** konstruujemy: trójkąt równoboczny **BAM**, trójkąt równoboczny **CBK**, trójkąt równoboczny **ACL**. - rys. 2

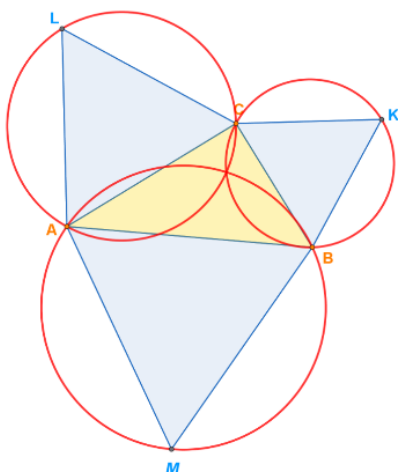


rys.1

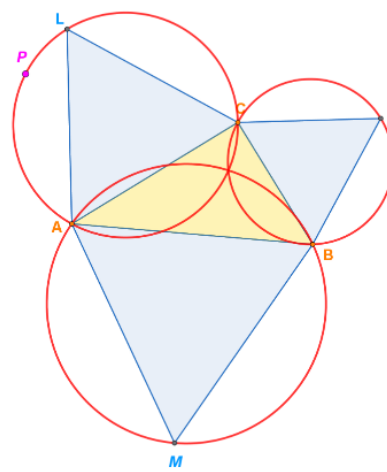


rys. 2

- Na każdym z trójkątów równobocznych opisujemy okrąg. - rys. 3.
- Na okręgu opisanym na trójkącie **ACL** wybieramy dowolny punkt **P**. - rys. 4.



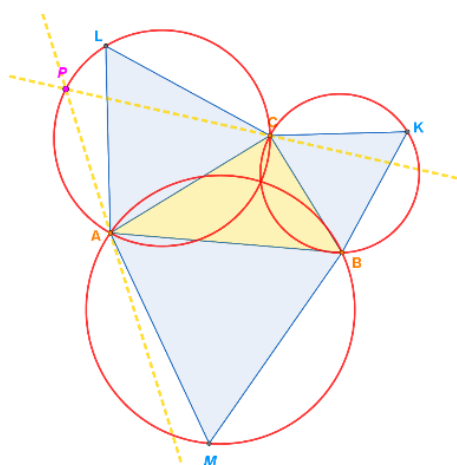
rys. 3



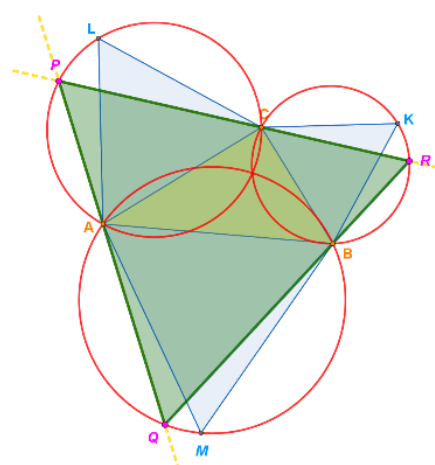
rys. 4

- Przez punkt **P** prowadzimy dwie proste przechodzące przez punkty **A** i **C**.

- Otrzymujemy trójkąt **PQR**.



rys. 5



rys. 6

Mamy udowodnić że trójkąt PQR jest trójkątem równobocznym.

Dowód:

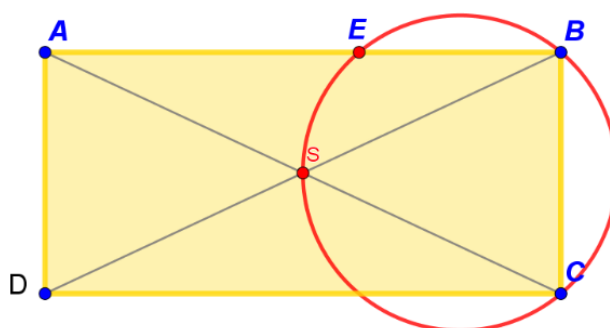
Kąty $\angle ALC$ i $\angle APC$ są oparte na tym samym łuku AC , więc $|\angle ALC| = |\angle APC| = |\angle APB|$. Ponieważ $|\angle ALC| = 60^\circ$, więc $|\angle APR| = 60^\circ$. Podobnie $|\angle BQP| = 60^\circ$ oraz $|\angle CRQ| = 60^\circ$. Stąd wynika, że trójkąt **PQR** jest równoboczny.

W trójkącie PQR wszystkie kąty mają miarę 60° , więc trójkąt ten jest **równoboczny**.

c.b.d.u.

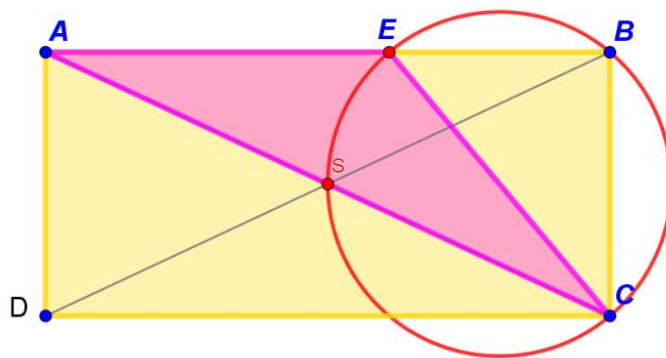
PROBLEM 3

- Dany jest prostokąt **ABCD**.
- Przekątne prostokąta przecinają się w punkcie **S**, który jest środkiem obu przekątnych.
- Konstruujemy okrąg przechodzący przez punkt **S** oraz dwa wierzchołki krótszego boku prostokąta.
- Jeden z punktów przecięcia okręgu z prostokątem oznaczamy przez **E**.



rys. 1

- Łączymy punkty **A**, **E** i **C**, otrzymując trójkąt **AEC**.

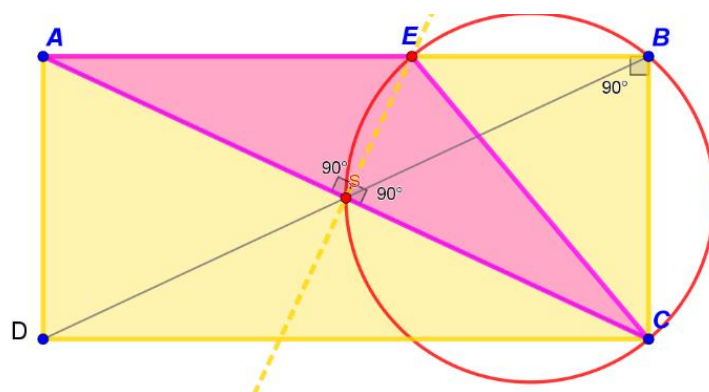


rys. 2

Należy udowodnić, że trójkąt ACE jest równoramienny.

Dowód:

W prostokącie każdy kąt ma miarę 90° . Zatem przeciwprostokątna trójkąta BCE jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. S jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta. Z własności prostokąta wiemy, że przekątne przecinają się w swoich środkach. Stąd wiemy że punkt S jest środkiem przekątnej AC , a więc: $AS=CS$.



rys. 3

Rozważmy trójkąty ASE oraz CSE .

Mamy:

- $AS=CS$,
- ES jest bokiem wspólnym,
- $\angle ASE = \angle CSE = 90^\circ$

Zatem trójkąty ASE i CSE są przystające (cecha **bok–kąt–bok**).

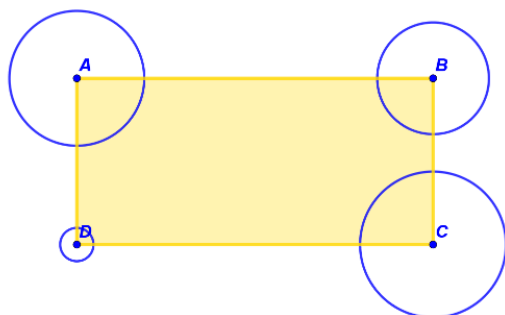
Z przystawania trójkątów wynika: $|AE|=|EC|$.

Zatem trójkąt AEC jest równoramienny.

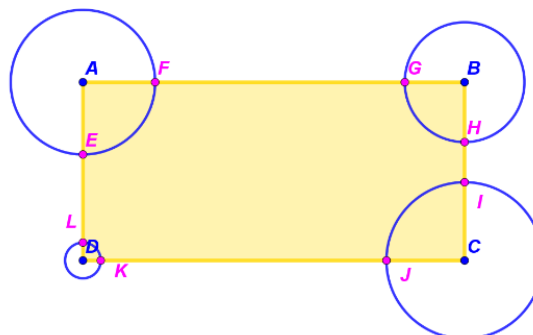
c.b.d.u.

PROBLEM 4

- Dany jest prostokąt i cztery okręgi. Każdy wierzchołek prostokąta jest środkiem jednego z okręgów.
- Zaznaczamy punkty przecięcia każdego okręgu z bokami prostokąta.

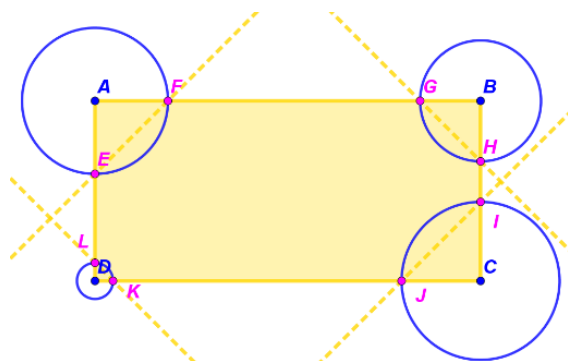


rys.1

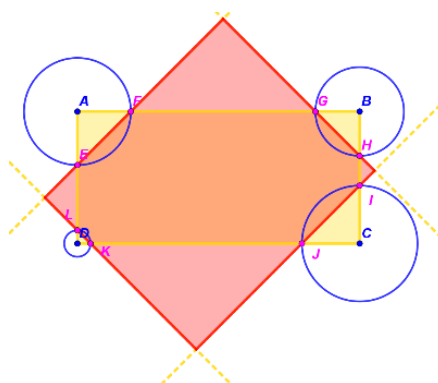


rys. 2

- Dla każdego okręgu rysujemy prostą przechodzącą przez jego dwa punkty przecięcia z bokami prostokąta.
- Używając czterech nowych linii i ich punktów przecięcia otrzymujemy wielokąt.



rys. 3



rys. 4

Należy udowodnić, że wielokąt ten jest prostokątem

Dowód:

Ramiona trójkątów powstałych przy okręgach są promieniami tych okręgów, dlatego są równej długości.

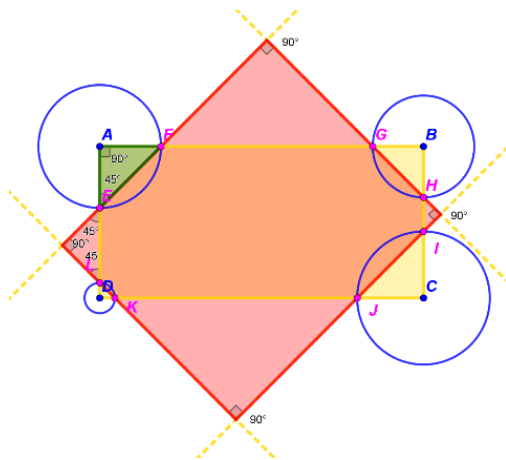
Każdy z tych trójkątów jest:

- prostokątny,
- równoramienny.

Zatem każdy kąt ostry ma miarę 45° .

Z własności kątów wierzchołkowych wynika, że kąty przyległe do tych kątów również mają miarę 45° . W efekcie w trójkątach tworzących czerwoną figurę kąty przy wierzchołkach składają się z dwóch kątów po 45° i jednego o mierze 90° .

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla każdego z okręgów, dlatego wszystkie kąty czerwonej figury są kątami prostymi. Skoro: wszystkie kąty czerwonej figury mają miarę 90° , to czerwona figura jest prostokątem

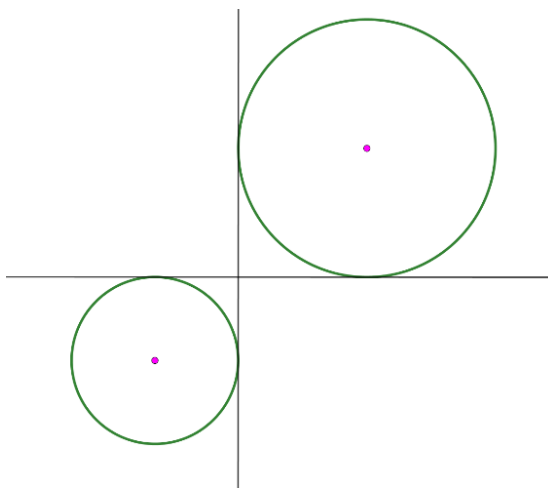


rys. 5

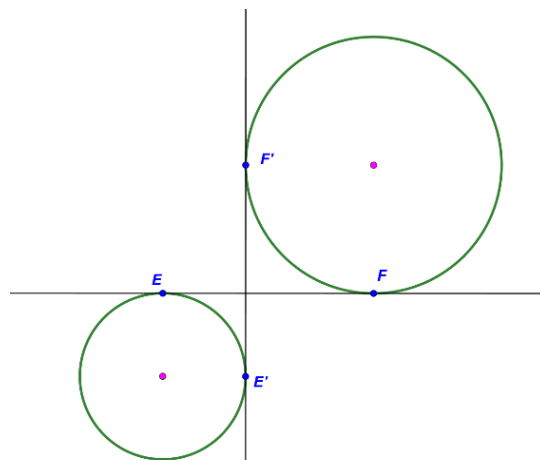
c.b.d.u.

PROBLEM 5

- Dane są dwie proste prostopadłe oraz dwa okręgi styczne do obu prostych i położone w przeciwległych ćwiartkach płaszczyzny. - rys. 1
- Zaznaczamy punkty styczności okręgów do prostych. - rys. 2

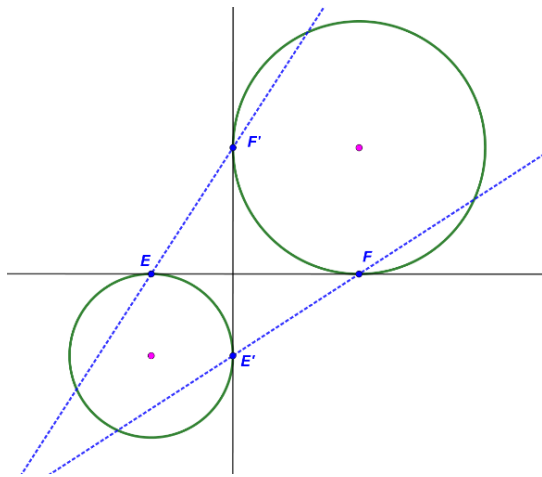


rys. 1

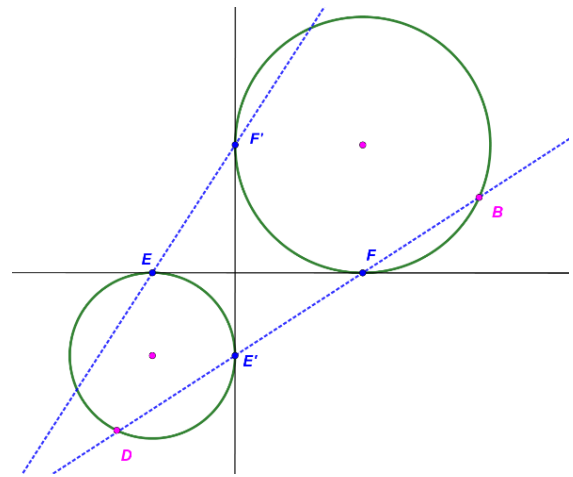


rys. 2

- Łączymy punkty styczności leżące na różnych okręgach: rysujemy proste FE' oraz EF' . - rys. 3
- Otrzymujemy dwa nowe punkty B i D , które są punktami przecięcia prostej FE' z okręgami. - rys. 4

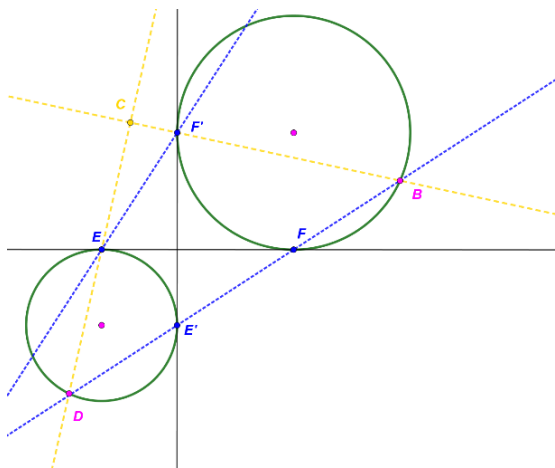


rys. 3

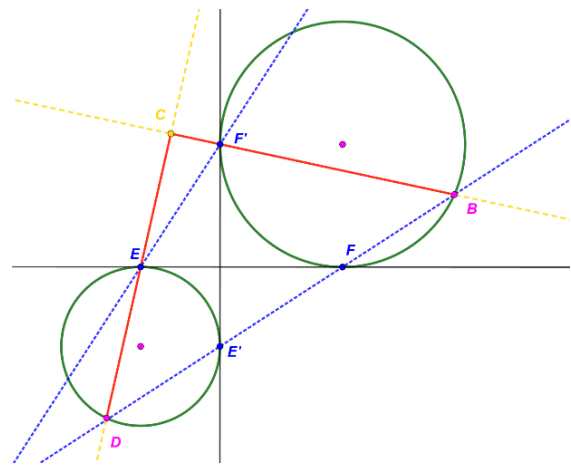


rys. 4

- Teraz rysujemy proste BF' i DE . Punkt ich przecięcia oznaczamy przez C . - rys. 5
- Następnie rysujemy odcinki CB i CD . - rys. 6



rys. 5



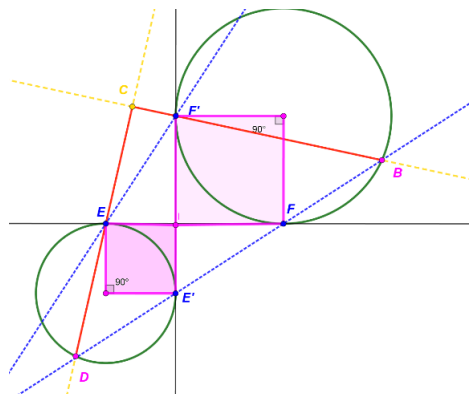
rys. 6

Należy wykazać, że odcinki CB i CD są prostopadłe.

Dowód:

Ponieważ każdy z okręgów jest styczny do obu prostych prostopadłych, promienie poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do odpowiednich prostych.

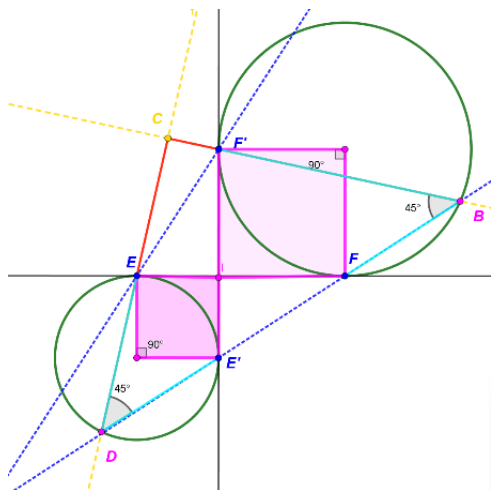
Zatem w dużym okręgu promienie poprowadzone do punktów F i F' są wzajemnie prostopadłe, czyli $\angle FO_1F' = 90^\circ$, gdzie O_2 jest środkiem dużego okręgu.



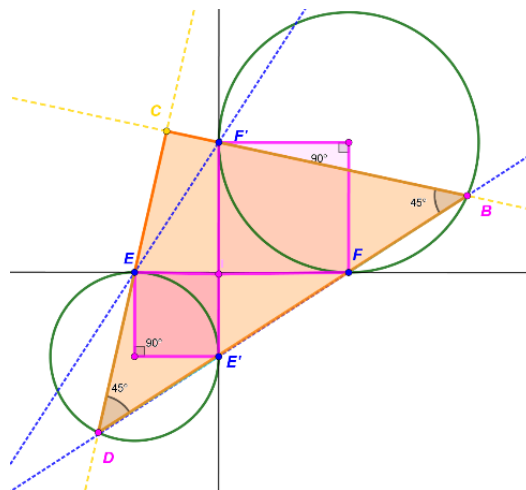
rys. 7

Analogicznie w małym okręgu: $|\angle EO_2E'| = 90^\circ$ gdzie O_1 jest środkiem małego okręgu.

Punkt B leży na dużym okręgu, więc kąt $|\angle FBF'|$ jest kątem wpisanym opartym na łuku FF' . Kąt wpisany ma miarę równą połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku, więc $|\angle FBF'| = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$. Analogicznie, punkt D leży na małym okręgu, więc $|\angle EDE'| = 45^\circ$.



rys. 8



rys. 9

W trójkącie BCD : $|\angle BCD| = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

Zatem $CB \perp CD$

c.b.d.u.

PROBLEM 6

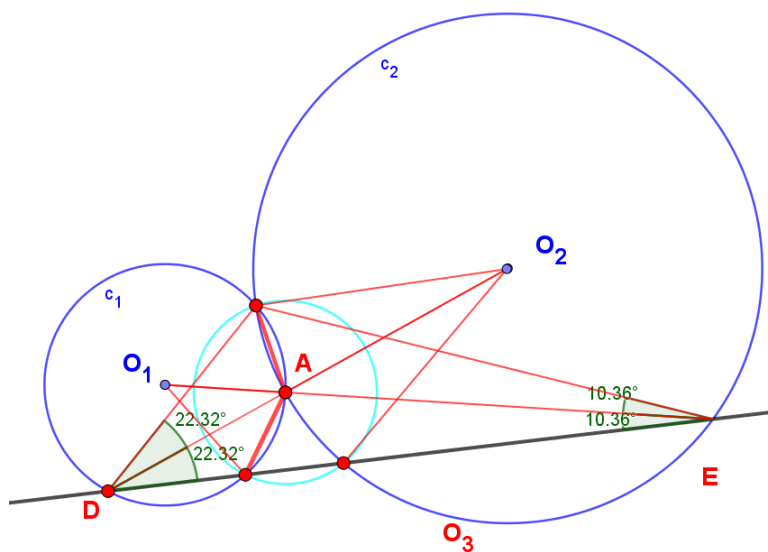
Dane są dwa przecinające się okręgi c_1 i c_2 . Przez jeden z punktów przecięcia, punkt F , i środki okręgów konstruujemy nowy okrąg c_3 . Punkty przecięcia c_3 z dwoma istniejącymi okręgami oznaczamy jako D i E . Narysuj prostą przechodzącą przez punkty D i E . Prosta przecina okręgi

c_1

i

c_2

w dwóch nowych punktach B i C . Połącz punkty A z B i A z C .



rys. 1

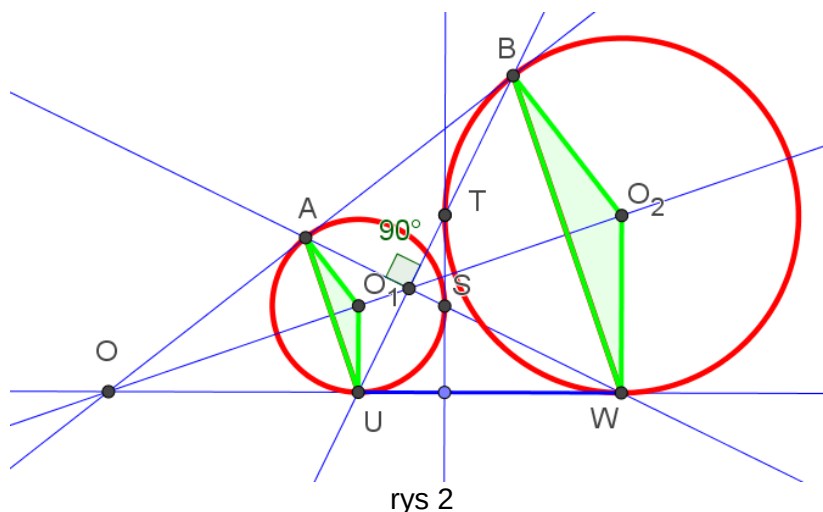
Należy udowodnić, że $|AB|=|AC|$.

Dowód:

- Zwróćmy uwagę na kąty $\angle DEO_1$ i $\angle O_1EF$.
- Są one wpisane w okręgu o środku O_3 oparte na tych samych cięciwach DO_1 i O_1F o tych samych długościach równych promieniowi okręgu o środku O_1 .
- Zatem kąty te są przystające, czyli $|\angle FEO_1| = |\angle O_1ED|$.
- To oznacza, że EO_1 jest dwusieczną kąta FEB .
- Podobnie kąty $\angle FDO_2$ i $\angle O_2DE$ są przystające jako kąty wpisane w kole o środku O_3 oparte na tych samych cięciwach FO_2 i O_2E .
- To oznacza, że DO_2 jest dwusieczną kąta BDF .
- Niech A będzie punktem przecięcia odcinków DO_2 i EO_1 .
- Kąt $\angle FEO_1$ jest przystający do kąta $\angle FEA$, bo mają wspólny wierzchołek a ramiona ich pokrywają się
- To oznacza, że cięciwy AF i CA są tej samej długości.
- Podobnie cięciwy FA i FB są tej samej długości.
- Zatem $AB = AC$.

PROBLEM 7

Okręgi styczne do dwóch prostych prostopadłych znajdują się po tej samej stronie jednej z nich. Połącz punkty styczności okręgów z prostymi kreśląc proste UW , UB , WA . Proste te przecięły okręgi w punktach A i B . Utwórzmy odcinki UA i WB .



Należy udowodnić, że odcinki te są równoległe.

Dowód:

- Wiadomo, że każde dwa okręgi są ze sobą jednokładne.
- Utwórzmy prostą O_1O_2 łączącą środki okręgów.
- Przecięcie tej prostej ze styczną UW wyznacza środek jednokładności O obu okręgów.
- Odbijmy punkty U , W i styczną UW względem prostej O_1O_2 .
- Otrzymamy wówczas drugą styczną do obu okręgów.
- Utwórzmy trójkąty UO_1A i WO_2B .
- Są one jednokładne tak jak okręgi względem punktu O .
- Odcinek UO_1 i WO_2 są do siebie równoległe.
- Podobnie odcinki AO_1 i BO_2 też są równoległe.
- Stąd UA i WB są równoległe

- Równoległość odcinków AU i BW wynika też bezpośrednio z podobieństwa trójkątów UO_1A i WO_2B .
- Zauważmy też, że proste UB i WA są zawsze prostopadłe do siebie niezależnie od wyboru punktów U i W .