ETIUDY NA TEMAT TRANSFORMACJI WIELOKĄTÓW RÓWNOWAŻNYCH

Joanna Dobrowolska
Victoria Center Primary School, Wrząsowice, klasa 8

Powyższym tematem zainteresowałam się w momencie, gdy przeglądałam książkę „Lilawati" Jerzego Jeleńskiego. Znalazłam w niej ciekawe zagadnienia o rozcinaniu dowolnego wielokąta i składania z rozciętych elementów innego wielokąta o tym samym polu. Skontaktowałam się z moim byłym nauczycielem matematyki by powiedział mi cos więcej na ten temat i spotkaliśmy się na Teamsie gdzie mogłam bliżej zgłębić ten temat.

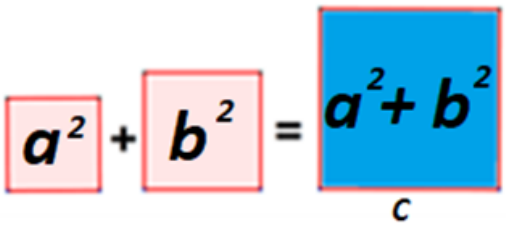
Poznałam wówczas wiele figur rozciętych na różne sposoby z których złożone były inne figury. Nie znałam sposobów w jakich je utworzono. Okazało się to ciekawym wyzwaniem dla mnie. W mojej pracy posługiwałam się programem Geogebra. Pliki przygotowane przeze mnie wymagały wiele pomysłowości i sprytu. Niektóre z tricków podpowiedział mi nauczyciel. Dzięki tym konstrukcjom Geogebry czytelnik może łatwiej odczytać sposoby tworzenia transformacji tych wielokątów.

W geometrii znane jest **twierdzenie Gerwiena Bolyai, które mówi nam że każdy wielokąt można rozciąć tak, aby z rozciętych kawałków uzyskać inny wielokąt o tym samym polu.**

Co to są wielokąty równoważne? Są to wielokąty o takim samym polu, z których jeden można uzyskać z drugiego przez rozcięcie.

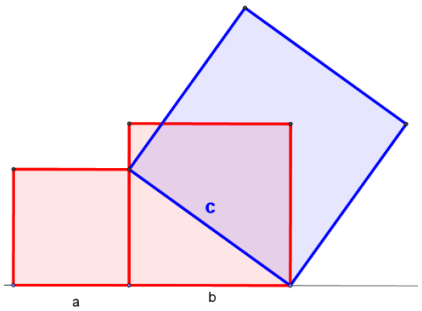
W dalszej części pracy przedstawię kilka przykładów wielościanów równoważnych i sposobów transformacji jednych w drugie.

Problem 1
Dane są dwa dowolne kwadraty (na poniższym rysunku koloru czerwonego) o bokach ***a*** i ***b***, gdzie ***a***<***b***. Należy je rozciąć w taki sposób, by z rozciętych elementów dało się złożyć kwadrat o boku ***c***, którego pole jest równe sumie pól obu kwadratów.



rys. 1

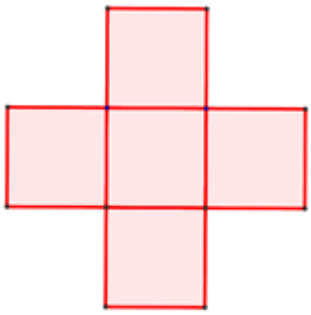
Rozwiązanie:
Ponieważ suma pól obu kwadratów ma być równa polu poszukiwanego niebieskiego kwadratu o boku ***c***, więc długości boków ***a***, ***b***, ***c*** spełniają tezę twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$



rys. 2

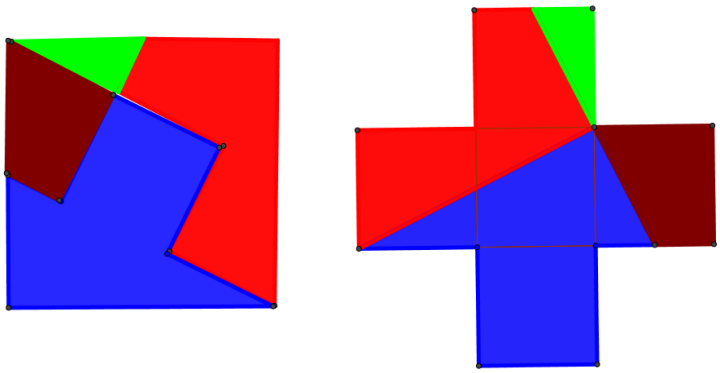
Zsuwamy oba czerwone kwadraty tak, aby bok mniejszego przylegał do boku większego. Kreślimy w GeoGebrze odcinek którego długość jest równa $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Odcinek ten jest bokiem ***c*** poszukiwanego kwadratu. Kreślimy ten kwadrat.

Problem 2
Dane jest pięć kwadratów ułożonych w konfiguracji krzyża. Trzeba, używając nożyczek, rozciąć ten krzyż za pomocą dwóch cięć, tak, by z rozciętych części uzyskać dokładnie jeden kwadrat.



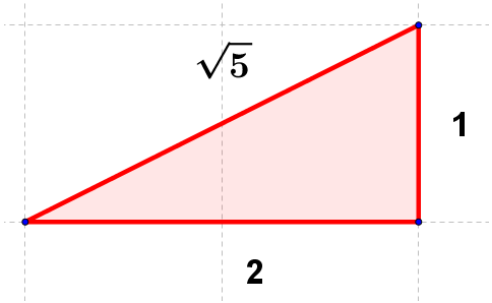
rys. 3

Rozwiązanie:
Zauważmy, że poszukiwany kwadrat ma mieć takie samo pole jak pole wszystkich kwadratów tworzących krzyż. Niech długość każdego tych kwadratów jest równa 1 cm^2. Oznacza to, że pole krzyża jest równe 5 cm^2. Poszukiwany kwadrat musi mieć więc pole 5 cm^2, skąd wynika, że jego bok ma długość $\sqrt{5}$ cm.



rys. 4

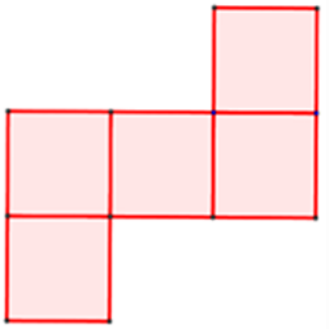
Odcinek o długości $\sqrt{5}$ jest przekątną prostokąta o wymiarach 2cm x 1 cm, gdyż $1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2$.
Odcinek ten oddziela część koloru niebieskiego od czerwonego na rysunku 4.



rys. 5

Problem 3

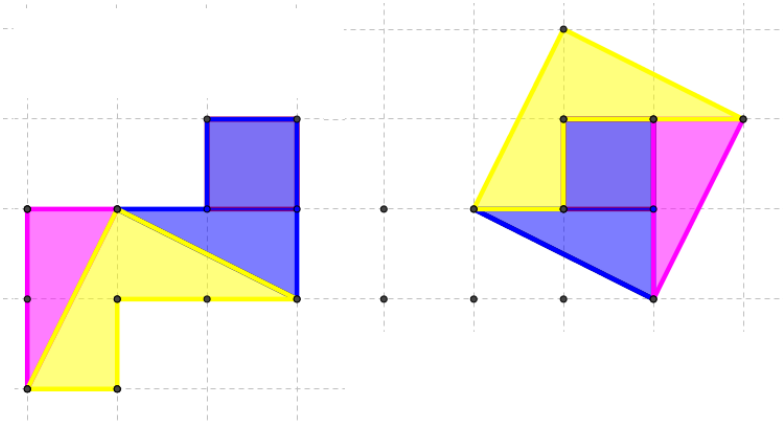
Dane jest pięć kwadratów ułożonych w takiej konfiguracji, jak na rysunku 5. Należy rozciąć tę konfigurację dwoma cięciami tak, by z rozciętych części złożyć dokładnie jeden kwadrat.



rys. 6

Rozwiązanie:

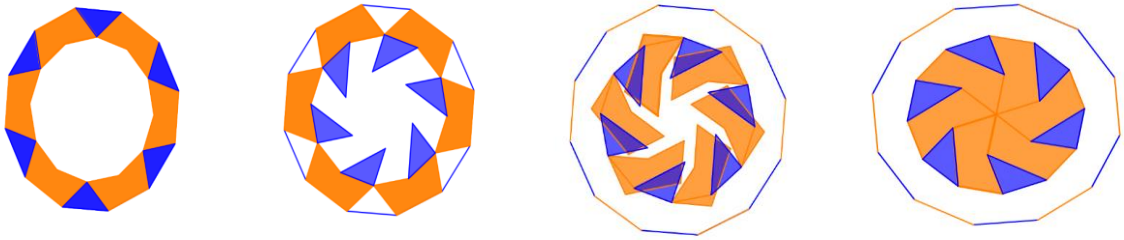
Zadanie to jest bardzo podobne do poprzedniego, gdyż znowu suma pól tych 5 kwadratów jest równa $5cm^2$. Jedno rozcięcie o długości $\sqrt{5}$ cm jest łatwe do odnalezienia. Trudno jednak znaleźć drugie rozcięcie o tej długości. Oto rozwiązanie tej układanki – wystarczy przesunąć dwie części w odpowiedni sposób – rys. 7.



rys. 7

Problem 4

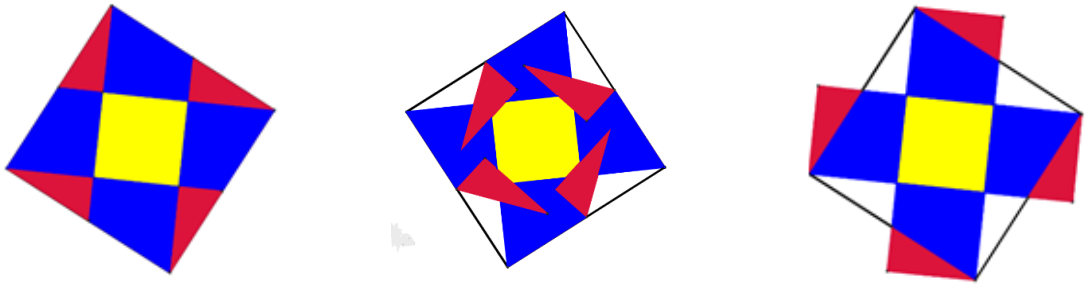
To zadanie jest ciekawym wyzwaniem dla użytkowników programu GeoGebra. Należy dokonać dość trudnej transformacji kawałków pierścienia. Rozwiązanie zapożyczyłam z Internetu, ale konstrukcję w GeoGebrze wykonałam samodzielnie.



rys. 8

Problem 5

Zadanie z pięcioma kwadratami tworzącymi konfigurację krzyża można rozwiązać inaczej niż rozwiązano to w przykładzie 2. Tu widać, że to jest najkorzystniejsza układanka, gdyż wyraźnie widać tworzący się kwadrat o bokach $\sqrt{5}$.



rys. 9

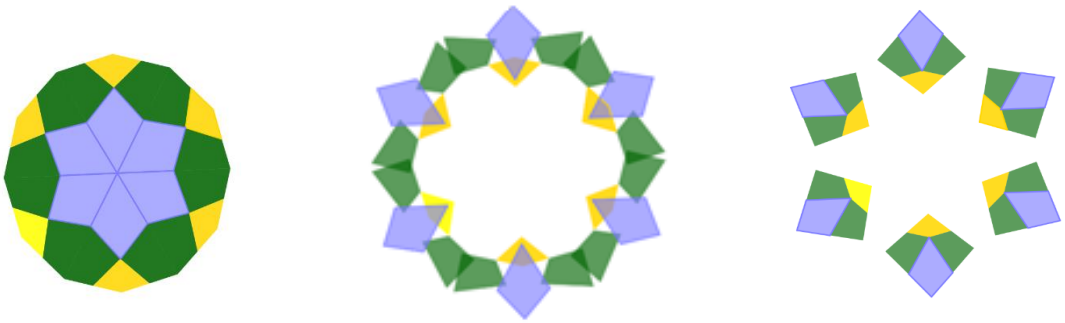
Problem 6

Ta układanka przekształcająca ośmiokąt z wyciętym wewnątrz kwadratem w kwadrat z wyciętym tym samym kwadratem prezentuje idealną symetrię wszystkich figur. Układanka ta należy do układanek typu „zygzak", gdzie z tego samego układu pięciokątów można zagiąć w jedną stronę inną figurę niż po zagięciu w drugą.

Rys. 10

Problem 7

Dwunastokąt foremny można po odpowiednim jego rozcięciu na trzy rodzaje czworokątów a następnie obróceniu złożyć dwunastokąt gwiaździsty. Ta znana układanka była dla mnie ciekawym wyzwaniem gdyż wymagała trochę kombinowania przy pracy z programem GeoGebra.



rys. 11

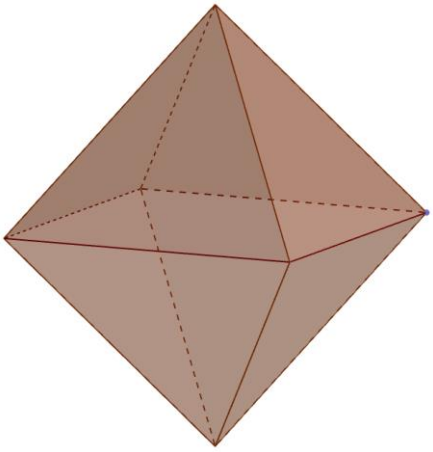
Problem 8

Ciekawszymi od płaskich transformacji są przekształcenia dwóch wielościanów równoważnych w przestrzeni 3D.

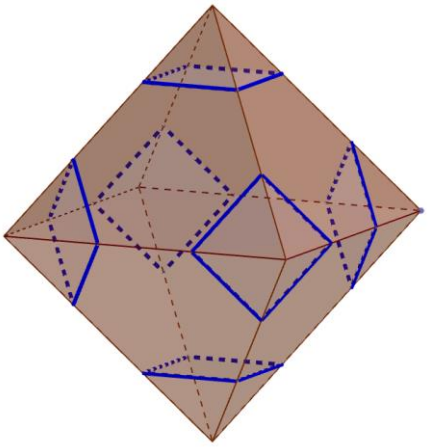
Długo poszukiwałam takiego przykładu, aż taki pomysł podsunął mi nauczyciel, opiekun tej pracy.

Wykonał on z kartonu bryłę ośmiościanu ściętego i rozcinał ją na osiem przystających części i nieopatrznie ułożył z tych części graniastosłup foremny o podstawie ośmiokątnej.
Zapragnęłam to zaprojektować w GeoGebrze 3D. Było to ciekawe ale trudne zadanie, gdyż wymagało dobrej orientacji i wyobraźni przestrzennej.
Oto sposób realizacji tego rozwiązania:

- Najpierw konstruujemy w GeoGebrze ośmiościan foremny (rys.12).
- Ścinamy w tym ośmiościanie jego sześć naroży (rys.13) tworząc wielościan o ścianach kwadratowych i sześciokątnych.

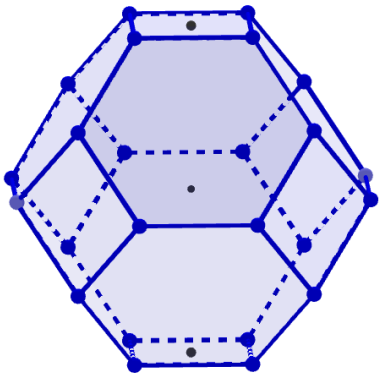


rys. 12

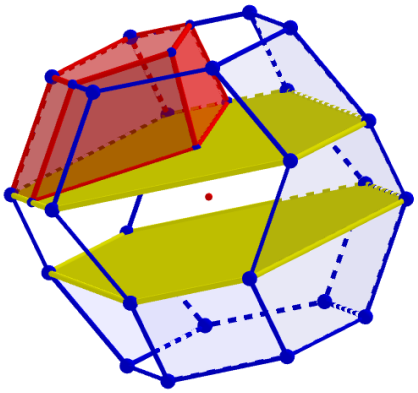


rys. 13

- Łączymy boki sześciu kwadratów (rys.13) tworząc osiem sześciokątnych ścian.
- Ściany sześciokątne wraz ze ścianami kwadratowymi tworzą ośmiościan ścięty - jedną z brył archimedesowych - rys. 14.
- Ośmiościan ścięty można rozciąć na osiem przystających siedmiościanów.
- Konstruujemy jeden z tych siedmiościanów (czerwony wielościan na rysunku 15).

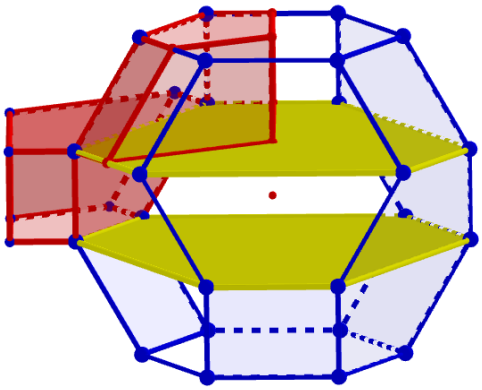


rys. 14

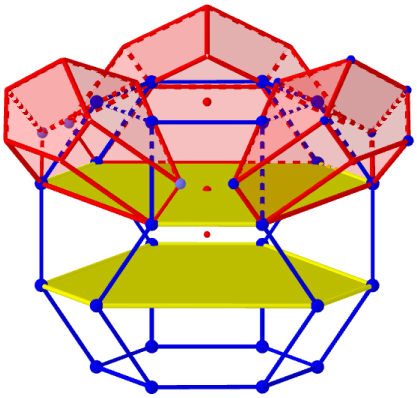


rys. 15

- Ten wyróżniony siedmiościan obracamy wokół dolnej jego krawędzi za pomocą suwaka w zakresie 0°-180° (rys. 16).
- W wyniku obrotu tego siedmiościanu otrzymaliśmy drugi siedmiościan.
- Ukrywamy pierwszy siedmiościan, by nie przeszkadzał nam w obserwacji tego drugiego.
- Uzyskany siedmiościan obracamy dwukrotnie wokół pionowej osi symetrii ośmiościanu ściętego o kąt o mierze 120° - rys. 17.

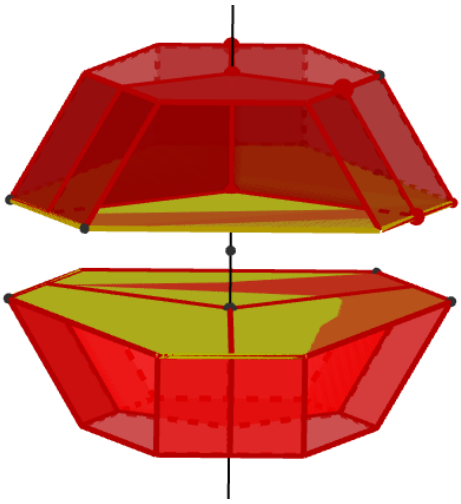


rys. 16

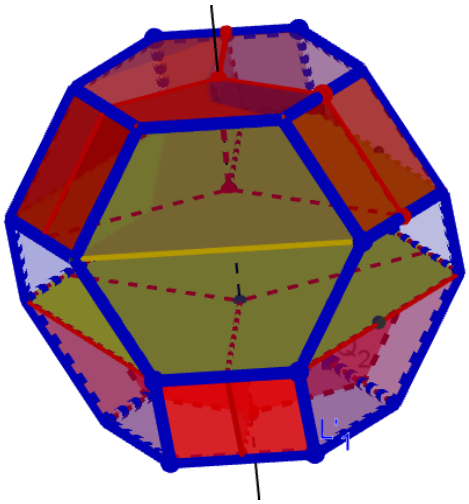


rys. 17

- Mamy więc łącznie trzy przystające siedmiościany, które wypełniają górną część ośmiościanu ściętego – rys. 18.
- Aby uzyskać dolną połowę ośmiościanu ściętego wystarczy odbić względem środka ośmiościanu ściętego trzy górne siedmiościany – rys. 18.

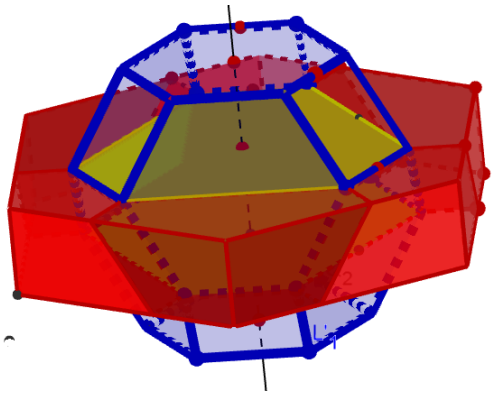


rys. 18

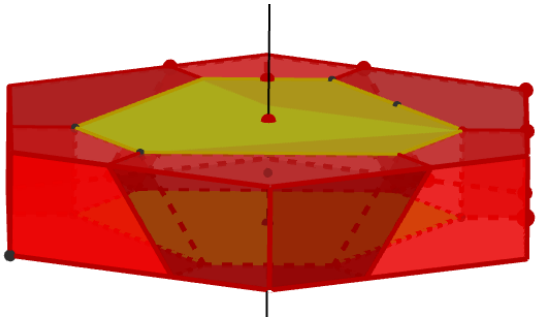


rys. 19

- Wspomniany wcześniej suwak powoduje, że sześć siedmiościanów raz wypełnia ośmiościan ścięty (rys. 19), a innym razem układa się w graniastosłup sześciokątny, którego wysokość jest długością krawędzi bocznej ośmiościanu ściętego (rys. 20), a podstawą sześciokąt o boku długości połowy najdłuższej przekątnej podstawy ośmiościanu ściętego.



rys. 20



rys. 21

Uzyskany graniastosłup (rys. 21) ma objętość równą objętości ośmiościanu ściętego. Łatwiej jest obliczyć objętość tego graniastosłupa niż ośmiościanu foremnego, więc konstrukcja ta jest sporym ułatwieniem dla matematyków którzy chcą wyznaczyć objętość ośmiościanu ściętego.

Podsumowując pracę należy stwierdzić, że opisane w tej pracy dynamiczne transformacje figur płaskich jednych w drugie i figur przestrzennych znalazły obok formy łamigłówek i układanek swoje zastosowanie praktyczne.

Joanna Dobrowolska