Małopolski Konkurs Prac Matematycznych

Zadania geometryczno-kombinatoryczne

Autor

Pola Hołówka

klasa 1D
VI Liceum Ogólnokształcące
im. Adama Mickiewicza
Kraków, ul. Wąska 7

Opiekun

W. W. Wdowik

28. lutego 2022

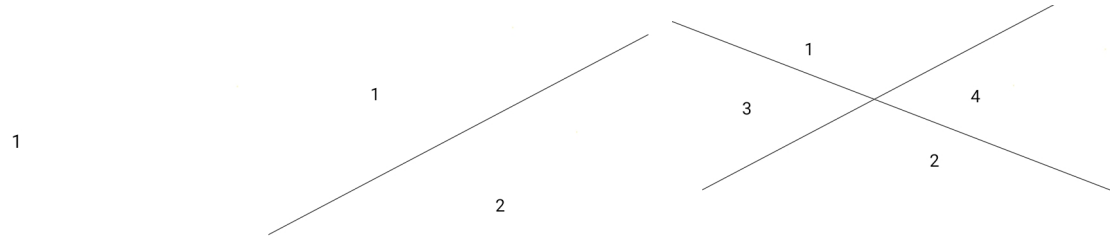
Wstęp

W tej pracy postanowiłam zająć się zadaniami z geometrii. Ten dział matematyki jest mi najbliższy, ponieważ oprócz matematyki interesuję się również rysowaniem. Z tego typu zadaniem, jakie przedstawiłam w pracy, zetknęłam się po raz pierwszy w tym roku szkolnym na lekcji matematyki. Dotyczyło ono diagramu Venna, które przedstawiłam w tej pracy. Było to zadanie dodatkowe i tylko ja je rozwiązałam. Stanowiło to dla mnie impuls, który sprawił, że chciałam coraz bardziej zgłębiać matematykę i uświadomił mi, że naprawdę mnie ona interesuje.

1. Proste na płaszczyźnie

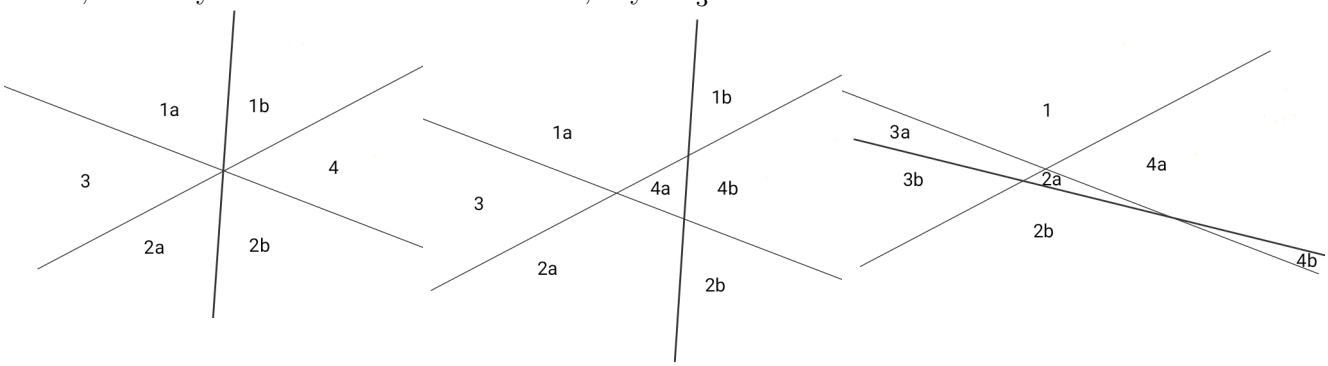
Czy ktoś kiedykolwiek się zastanawiał, na ile najwięcej obszarów można podzielić płaszczyznę za pomocą n cięć? Rozwiązanie tego problemu w 1826 roku przedstawił szwajcarski matematyk Jacob Steiner.

Przyjmijmy, że maksymalna liczba obszarów na którą rozetnie płaszczyznę n prostych to L_n. Aby rozwiązać nasz problem, rozważamy na początku drobne przypadki. Płaszczyzna bez prostych ma jeden obszar, przecięta jedną prostą — dwa obszary, dwiema zaś — cztery.



$L_0 = 1,$ $L_1 = 2,$ $L_2 = 4.$

Wygląda na to, że $L_n = 2^n$. Dodanie nowej prostej podwaja liczbę obszarów. Tak by się stało, gdyby n-ta prosta mogła podzielić każdy obszar na dwie częśći. Zobaczmy, jak to wygląda z trzema prostymi. Trzecia prosta nie jest w stanie podzielić płaszczyzny na osiem, a maksymalnie na siedem obszarów, czyli $L_3 = 7$.



Można zauważyć, że n-ta prosta (dla $n > 0$) zwiększa liczbę obszarów o k wtedy i tylko wtedy, gdy przecina k obszarów spośród wszystkich znalezionych. Ma to miejsce dokładnie wtedy, gdy prosta przecina się z innymi prostymi w $k-1$ różnych punktach. Skoro jednak dwie różne proste przecinają się w co najwyżej jednym punkcie, to prosta przecina co najwyżej $n-1$ prostych w maksymalnie $n-1$ różnych punktach, zatem $k \leqslant n$.

Dostajemy więc rekurencję:

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ L_n = L_{n-1} + n \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Czas rozwiązać otrzymaną rekurencję. Rozwijając ją otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n \\
&= L_{n-2} + (n-1) + n \\
&= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + S_n,
\end{aligned}
$$

przy czym $S_n = 1 + 2 + ... + n$.

Aby wyliczyć S_n, możemy skorzystać z *pomysłu Gaussa*, zapisując dwa razy S_n, tylko że w odwróconej kolejności, a następnie dodając do siebie owe dwie sumy. Mamy:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n, \\
S_n &= n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1,
\end{aligned}
$$

więc

$$
\begin{aligned}
2S_n &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1), \\
2S_n &= n(n+1), \\
S_n &= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

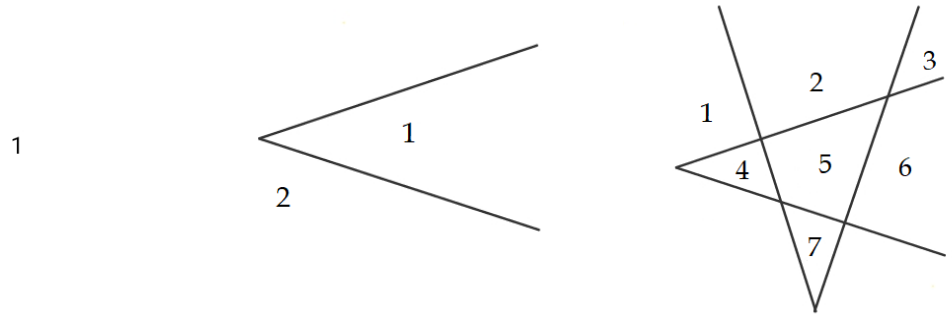
Dzięki uzyskanemu wzorowi na S_n mamy jawny wzór na L_n.

$$
L_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \quad \text{dla } n \geqslant 0.
$$

2. Problem „V” na płaszczyźnie

Teraz zamiast prostych na płaszczyźnie mamy łamane przypominające literę V. Jaka jest maksymalna liczba obszarów możliwych do uzyskania przez n nieskończonych łamanych kształtu V na płaszczyźnie? Oznaczmy tę liczbę obszarów przez V_n.

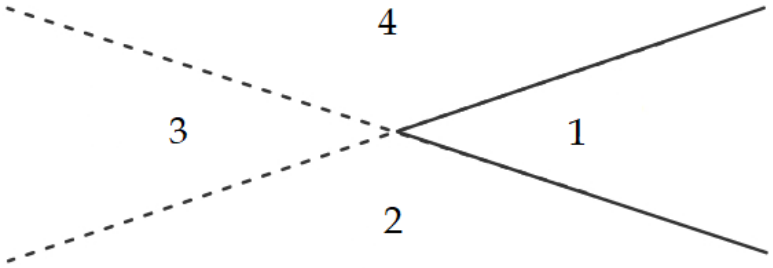
Podajmy najpierw kilka graficznych przykładów.



Mamy więc

$$V_0 = 1, \qquad V_1 = 2, \qquad V_2 = 7.$$

Różnica między prostymi przecinającymi się na płaszczyźnie a tym problemem jest taka — gdy przedłużymy w każdą stronę ramiona naszego V, otrzymamy dwie przecinające się proste, które nie przecinają się poza miejscem przedłużenia ramion. Obszary 3 i 4 są pominięte, łączą się z obszarem 2.



Stracimy więc dwa obszary. Punkt przecięcia ramion nie może znajdować się w miejscu gdzie jest jakiekolwiek inne ramię lub inny punkt spotkania, gdyż nie uzyskamy maksymalnej liczby obszraów. Zatem

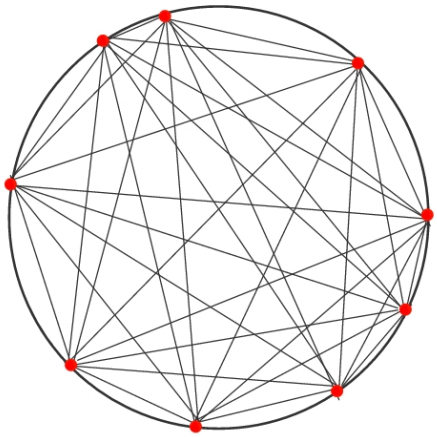
$$V_n = L_{2n} - 2n,$$

czyli ostatecznie

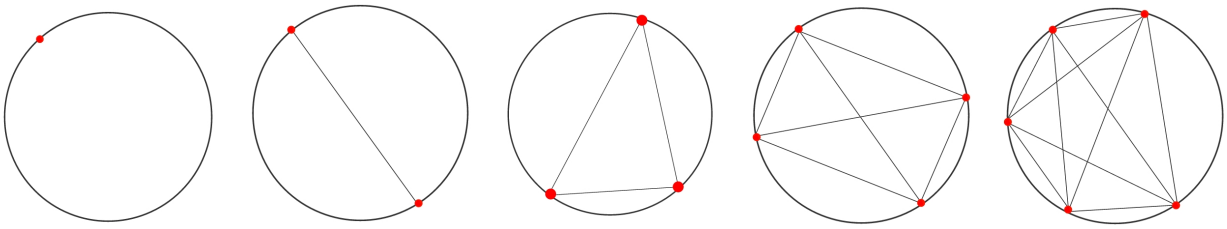
$$V_n = 2n^2 - n + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

3. Punkty na okręgu

Jeśli weźmiemy n punktów na okręgu i połączymy każdą parę z nich prostą, na ile obszarów zostanie przecięte koło? Oznaczmy tę liczbę jako A_n.



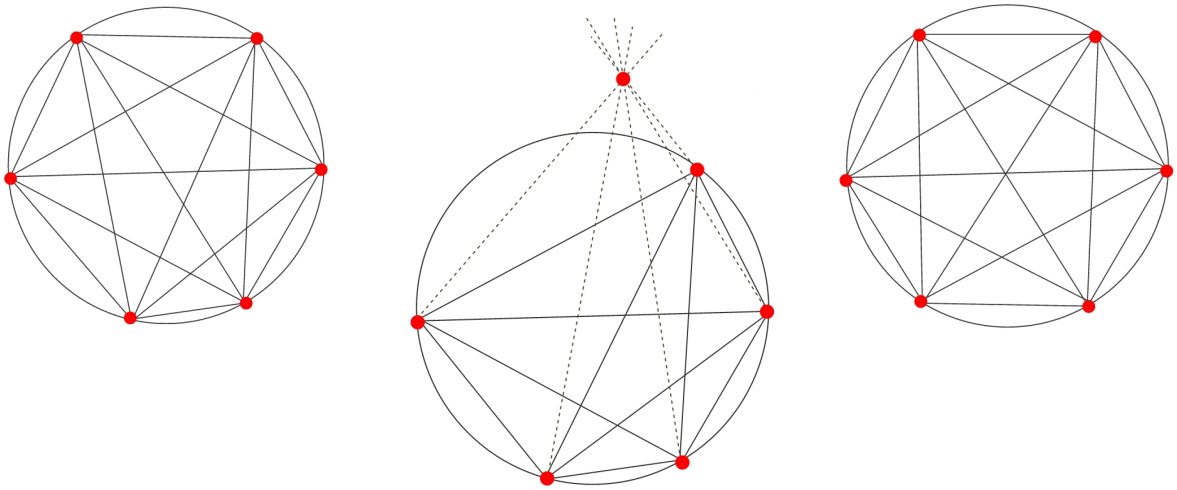
Zobaczmy, jak to wygląda dla paru pierwszych punktów.



Mamy więc

$A_1 = 1,$ $A_2 = 2,$ $A_3 = 4,$ $A_4 = 8,$ $A_5 = 16.$

Ile mamy prostych? W pierwszym przypadku zero, ponieważ punkt nie ma się z czym połączyć, w drugim jest jedna prosta, w czwartym sześć, w piątym zaś dziesięć. Ile wewnątrz okręgu mamy przecięć (bez czerwonych punktów)? W pierwszym jest ich zero, w drugim również zero, w czwartym już jest jedno, a w piątym zaś pięć. Na razie może nam się wydawać, że $L_n = 2^{n-1}$, ale tak w ogólności *nie jest*.



Dla $n = 6$ maksymalna liczba obszarów wynosi 31, a nie 32. Na powyższych rysunkach widzimy również, iż liczba obszarów zmienia się w zależności od tego, czy punkty przetną się wewnątrz koła i czy w jednym miejscu przetną się więcej niż dwie proste. Widzimy różnice między prostymi na płaszczyźnie i w kole. Punkty przecięć muszą znajdować się w wyznaczonym obszarze i punkty, z których proste wychodzą, są miejscami, gdzie mogą przeciąć się więcej niż dwie proste. Tak się składa, że każda prosta wyznaczona jest przez parę punktów. Dla $n = 6$ te pary wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ccccc} (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), & (3,4), \\ (3,5), & (3,6), & (4,5), & (4,6), & (5,6). \end{array}$$

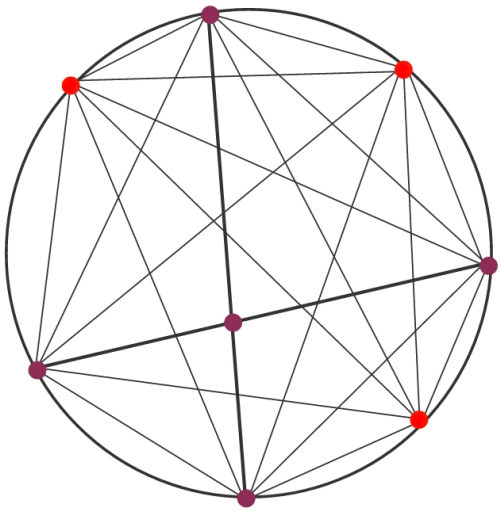
Wszystkich tych par nie musimy zliczać mechanicznie, ale możemy to uczynić za pomocą *dwumianu Newtona*. Przypomnijmy, iż

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{dla } n \geqslant k \geqslant 0.$$

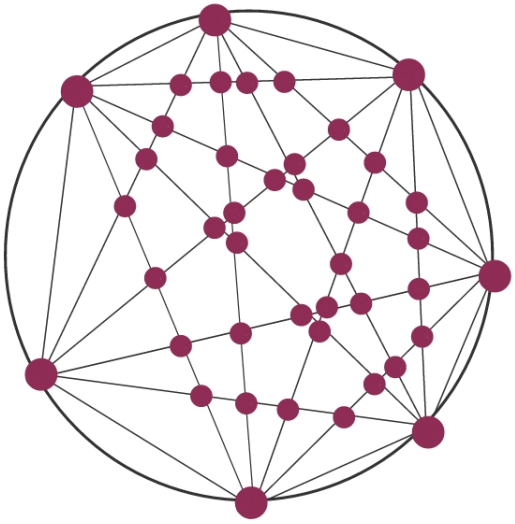
oraz

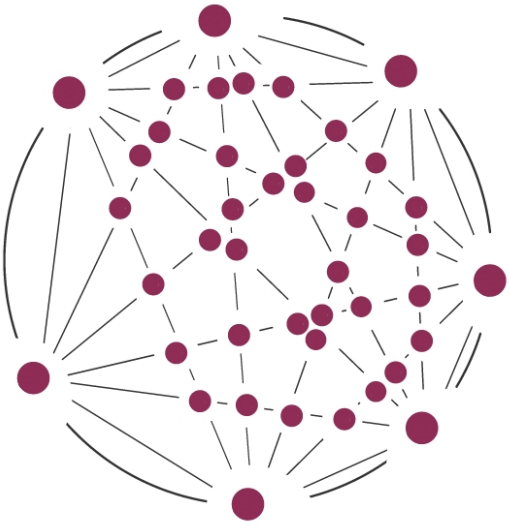
$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k > n \geqslant 0.$$

Naszych par będzie więc $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$. W szczególności dla $n = 6$ mamy $\binom{6}{2} = 15$ takich par.



Jak znaleźć punkty wewnątrz koła? Okazuje się, że jeden punkt wewnątrz odpowiada czterem na okręgu, czyli liczba punktów wewnątrz okręgu odpowiada liczbie czwórek naszych czerwonych punktów. Znowu możemy skorzystać z dwumianu Newtona, wyliczając $\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!\,(n-4)!}$. Każda prosta poprzez przecięcie się z inną prostą dzieli się na dwa w miejscu przecięcia. Liczbę odcinków stworzonych z przeciętych prostych można obliczyć poprzez dodanie liczby prostych i dwa razy liczby punktów przecięć, ponieważ każdy punkt przecięcia się prostych przecina prostą na dwie.





Jak w końcu obliczyć na ile obszarów zostanie podzielony okrąg? Skorzystamy ze *wzoru Eulera dla grafów planarnych*. Wygląda on następująco

$$V - E + F = 2,$$

przy czym V to liczba punktów, E to liczba odcinków, F to liczba obszarów (wraz z obszarem poza figurą). My potrzebujemy liczby obszarów F. Po bardzo krótkim przekształceniu wzoru otrzymujemy $F = 2 + E - V$. Wiemy już, jak obliczyć liczbę punktów wewnątrz okręgu — jest to $\binom{n}{4}$, trzeba do tego dodać jeszcze n, ponieważ potrzebujemy również punktów na okręgu. Zatem

$$V = \binom{n}{4} + n.$$

Znamy też liczbę prostych, czyli $\binom{n}{2}$. Potrzebujemy liczby odcinków. Potrzebna jest nam liczba odcinków. Punkty przecięcia można traktować jako dwie łączące się krawędzie, ponieważ każdy punkt przecięcia bierze dwie istniejące proste i dzieli je na cztery mniejsze części. Widać, że 3 proste przecinające się w dwóch punktach zostaną rozcięte na $3 + 2 \cdot 2 = 7$ mniejszych odcinków. Cztery proste przecinające się w trzech punktach zostaną rozcięte na $4 + 3 \cdot 2$, czyli na 10 mniejszych kawałków, , to znaczy liczbę prostych plus podwojoną liczbą punktów przecięć, a do tego trzeba dodać n, ponieważ mamy n kawałków stworzonych poprzez przecięcie ramy okręgu n punktami. Zatem

$$E = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n.$$

Podstawiamy wszystko i otrzymujemy

$$\begin{aligned} F &= 2 + E - V \\ &= 2 + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n - \binom{n}{4} - n \\ &= 2 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \end{aligned}$$

Trzeba nam odjąć teraz 1, gdyż nie liczymy zewnętrza jako jeden z obszarów. Ostatecznie można ładnie zapisać wynik jako

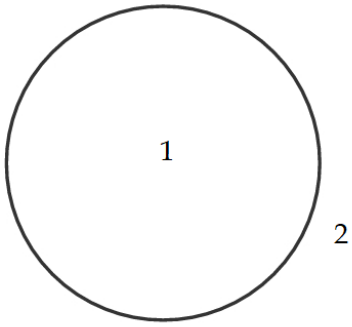
$$A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

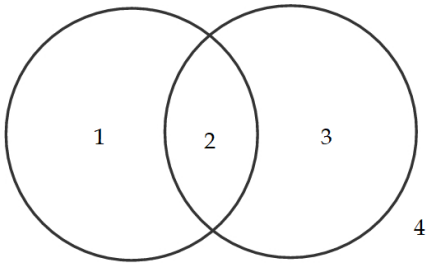
4. Diagram Venna

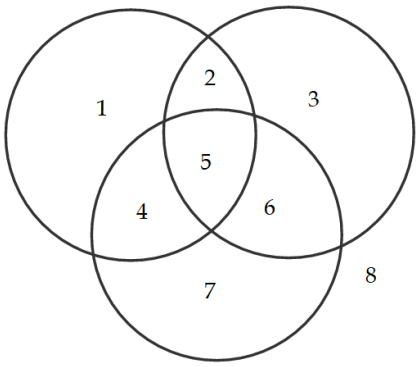
Czy można zilustrować diagram Venna dla czterech zbiorów przy użyciu czterech zachodzących na siebie *kół*, w którym mamy szesnaście możliwych podzbiorów związanych z tymi czterema danymi zbiorami?

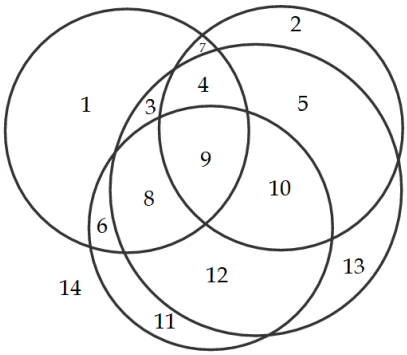
Okazuje się, iż diagram Venna stworzony z czterech lub więcej zbiorów w kształcie kół *nie jest wykonalny*. Diagram o dwóch kołach ma cztery podzbiory, o trzech ma ich osiem, a o cztreech powinien ich mieć szesnaście, ale nie ma. Dlaczego?

Sprawdźmy, jak wygląda diagram dla 1, 2, 3 i 4 zbiorów.







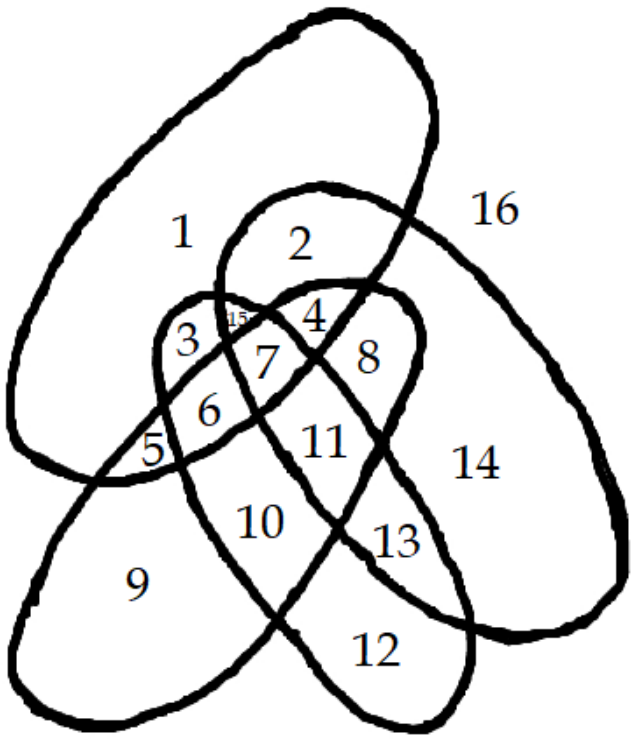


W jednym zbiorze mamy 2 podzbiory i 0 przecięć, w dwóch zborach 4 podzbiory i 2 przecięć, w trzech 8 i 6, a w czterech 14 i 12.

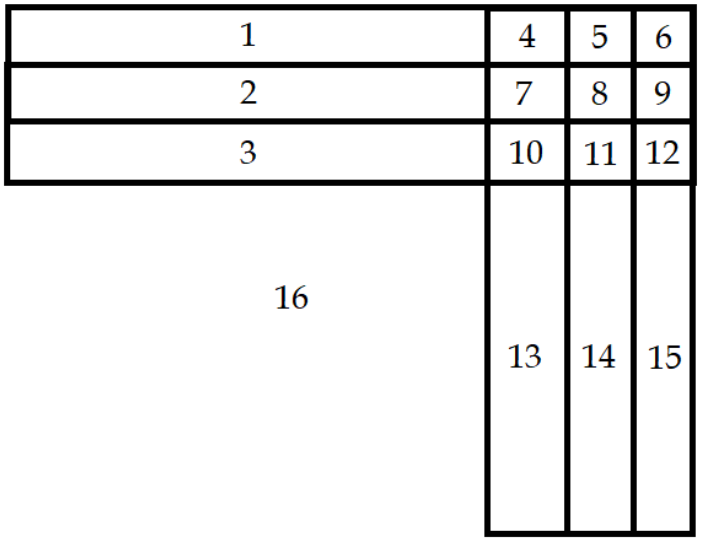
Dlaczego w czwartym przypadku mamy 14, a nie 16?

Bardzo istotne są punkty przecięcia się okręgów. Jeden okrąg może przeciąć drugi maksymalnie w dwóch punktach, dlatego kiedy do diagramu z trzema zbiorami dodamy czwarte, powstaje dodatkowo 6 części, co w sumie daje nam 14, a nie 16. Przez to każde następne koło przecina inne w dwóch miejscach i jest coraz większa różnica między pożądaną liczbą podzbiorów, a ich faktyczną liczbą.

Diagram Venna *można* za to stworzyć za pomocą np. elips, ponieważ one mogą maksymalnie przeciąć się w 4 miejscach.



Można również stworzyć za pomocą prostokątów, gdyż one również mogą się przeciąć maksymalnie w 4 miejscach.



Jeśli koniecznie chcemy stworzyć diagram Venna z kół, jak obliczyć faktyczną liczbę podzbiorów?

Możemy to sprawdzić za pomocą tego, co już wiemy, czyli tego, że jedno koło może przeciąć drugie w maksymalnie dwóch punktach. Liczbę okręgów diagramu składającego się z $n-1$ zbiorów należy pomnożyć razy 2. Wtedy tworzą się te części, które powstają podczas dołożenia kolejnego zbioru. Ich liczbę należy dodać do liczby podzbiorów wcześniejszego diagramu. Oznaczając więc liczbę części przez K_n otrzymujemy rekurencję:

$$\begin{cases} K_1 = 1, \\ K_n = K_{n-1} + 2(n-1) \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Teraz możemy mechanicznie sprawdzić, ile podzbiorów ma diagram stworzony z ośmiu zbiorów, musimy po kolei wyliczyć następne diagramy. Wiemy, że $K_4 = 14$.

n	$K_{n-1} + 2(n-1)$	K_n
5	$14 + (5-1)$	22
6	$22 + (6-1)$	32
7	$32 + (7-1)$	44
8	$44 + (8-1)$	58

Rozwinięcie uzyskanej rekurencji daje nam:

$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1} + 2(n-1) \\ &= K_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= K_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &\vdots \\ &= K_0 + 2 + 4 + ... + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= 2 + 2S_{n-1}, \end{aligned}$$

przy czym $S_n = 1 + 2 + ... + n$.

Ustaliliśmy wcześniej, że $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, więc

$$K_n = n^2 - n + 2 \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Można do tego również dojść nie przez rekurencję, ale szukając zależności — czyli zgadując. Nie jest to zbyt ścisła metoda, lecz bardziej empiryczna.

Sprawdźmy, czy jest jakaś zależność między liczbą kół, kwadratem tej liczby, a liczbą podzbiorów.

n	n^2	K_n	$n^2 - K_n$	$n - (n^2 - K_n)$
1	1	2	-1	2
2	4	4	0	2
3	9	8	1	2
4	16	14	2	2
5	25	22	3	2
6	36	32	4	2
7	49	44	5	2
8	64	58	6	2
9	81	74	7	2
10	100	92	8	2

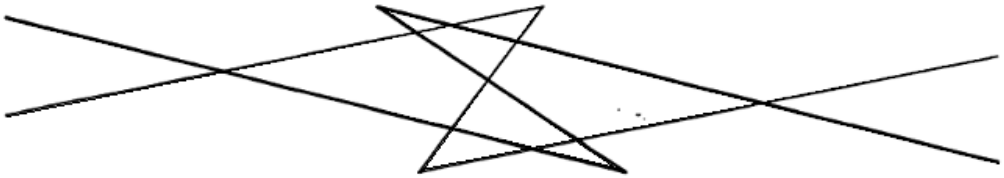
Z przedstawionej tabeli widać, że różnica n^2 i K_n za każdym razem jest większa od poprzedniej o 1. Można również zauważyć, iż $n - (n^2 - K_n)$ za każdym razem daje 2.

Dzięki temu jesteśmy w stanie obliczyć liczbę podzbiorów naszym już znajomym wzorem.

$$K_n = n^2 - n + 2.$$

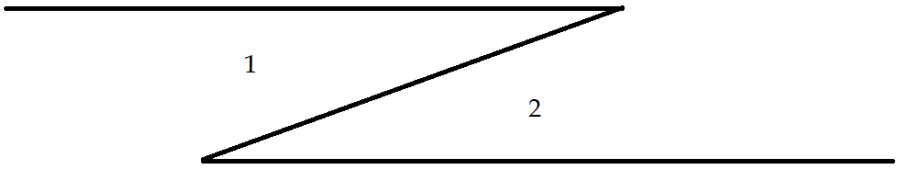
5. Zygzaki

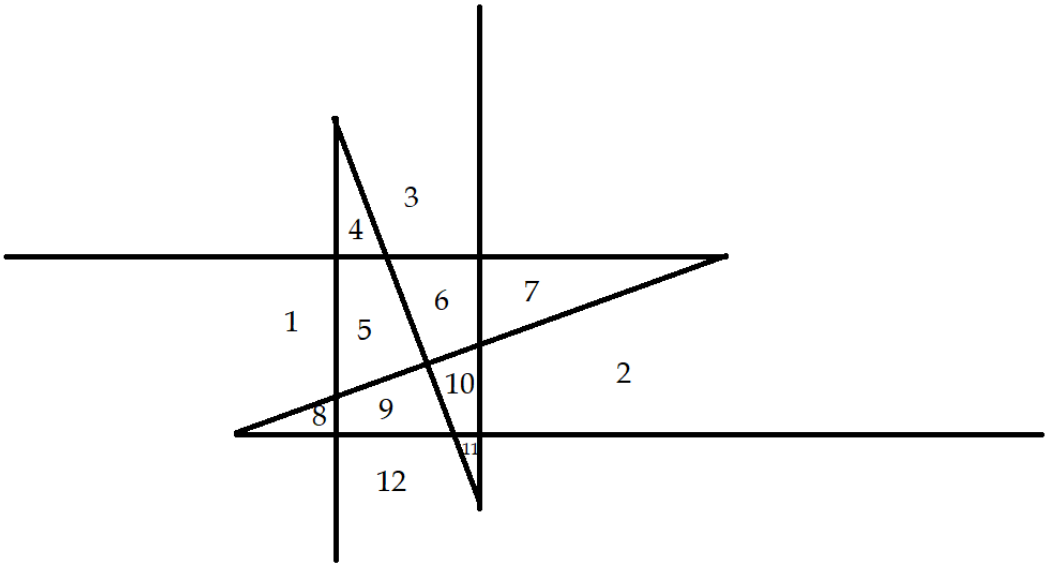
Jaka jest największa liczba obszarów wydzielonych przez n zygzaków, gdzie każdy zygzak składa się z dwóch równoległych półprostych połączonych odcinkiem?

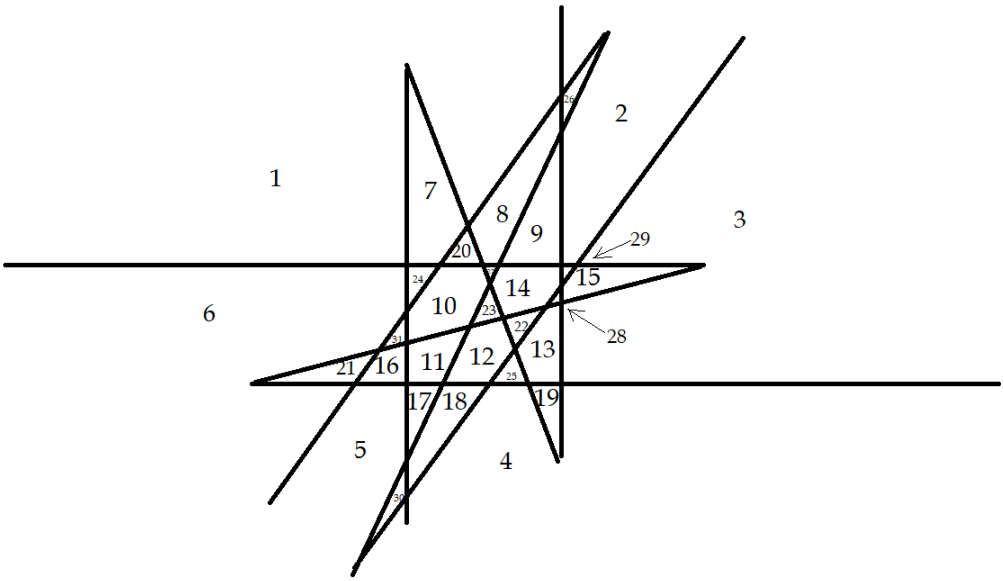


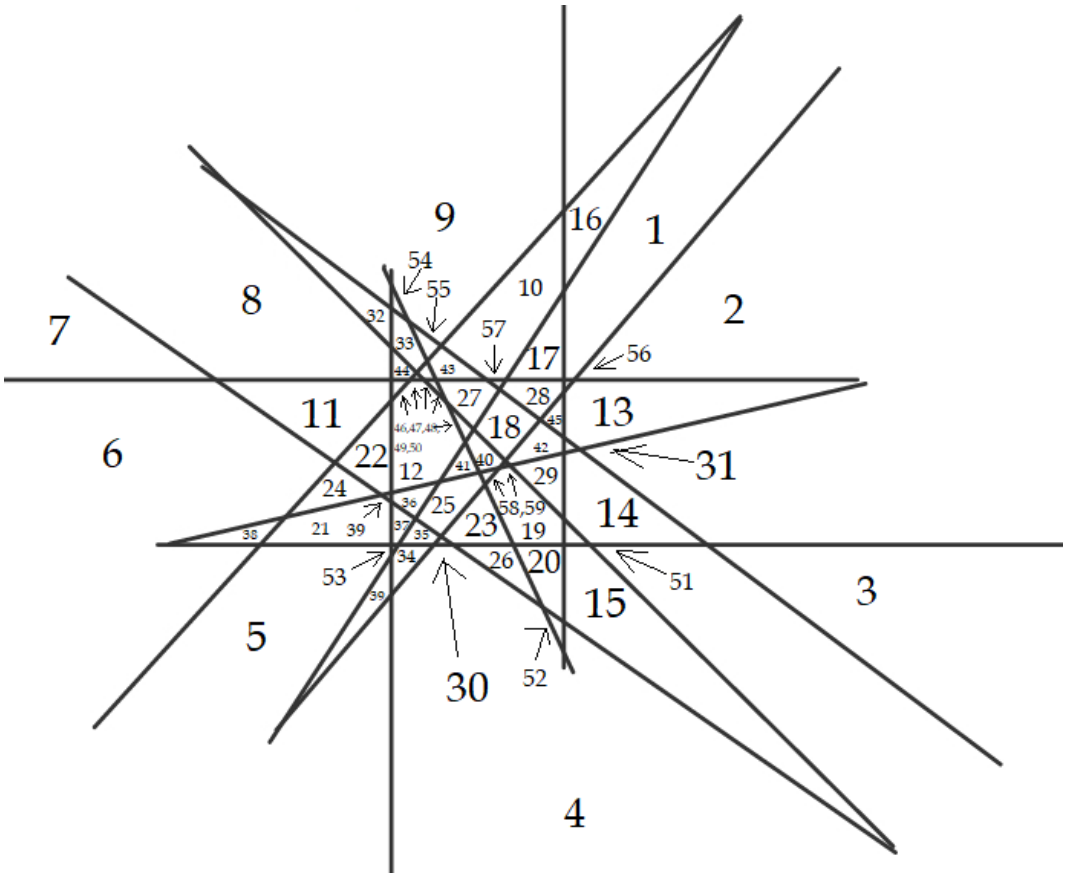
Można zauważyć, iż jeden zygzak z drugim może się przeciąć w maksymalnie 9 punktach i mamy 12 obszarów.

Sprawdźmy, jak to wygląda dla 1, 2, 3 i 4 zygzaków.









- Mamy 2 obszary i 0 punktów przecięcia.
- Mamy 12 obszary i 9 punktów przecięcia.
- Mamy 31 obszarów i 27 punktów przecięcia.
- Mamy 59 obszary i 54 punktów przecięcia.

Każdy zygzak przecina inny w dziewięciu punktach. Liczba przecięć można obliczyć tworząc następujący wzór rekurencyjny:

$$\begin{cases} Z_0 = 1, \\ Z_n = Z_{n-1} + 9(n-1) + 1 \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Rozwijając otrzymaną rekurencję otrzymamy:

$$\begin{aligned}
Z_n &= Z_{n-1} + 9(n-1) + 1 \\
&= Z_{n-2} + 9(n-2) + 1 + 9(n-1) + 1 \\
&= Z_{n-3} + 9(n-3) + 1 + 9(n-2) + 1 + 9(n-1) + 1 \\
&\vdots \\
&= Z_0 + 0 + 1 + 9 + 1 + 18 + 1 + 27 + 1 + ... + 9(n-2) + 1 + 9(n-1) + 1 \\
&= 1 + S_n,
\end{aligned}$$

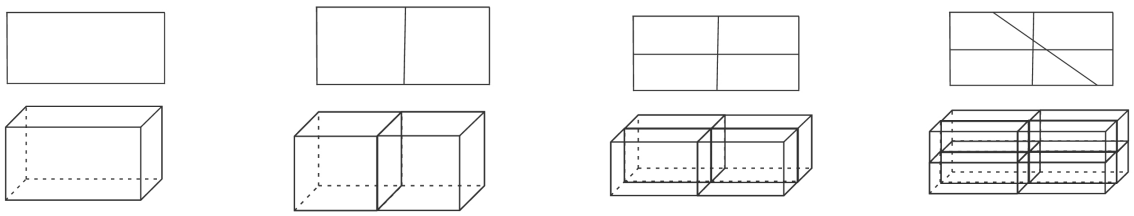
korzystając z tego, iż $S_n = \frac{9n(n-1)+2n}{2}$ (można wyliczyć Gaussem) uzyskujemy

$$Z_n = 1 + \frac{9n(n-1) + 2n}{2} + 1.$$

6. Rozcinanie płaszczyzny

Ile kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka przez cięcia nożem? Ser musi być utrzymany na swoim miejscu w czasie, gdy dokonywane są cięcia i każde cięcie musi odpowiadać pewnej płaszczyźnie w przestrzeni trójwymiarowej

Na początku najlepiej rozważyć kilka małych przypadków. Sprawdźmy, na ile części podzielą się przez 0, 1, 2 i 3 cięć kostka, a na ile płaska płaszczyzna, gdzie L_n to liczba cięć na bryle, a P_n liczba cięć płaszczyzny. Na plastrze sera trudno coś pokazać więc użyjmy całej jego kostki.



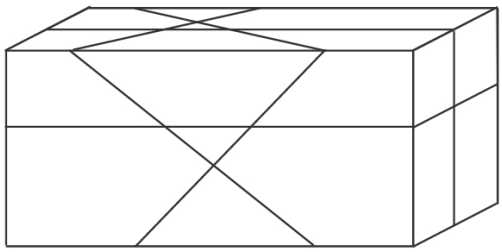
Mamy więc:

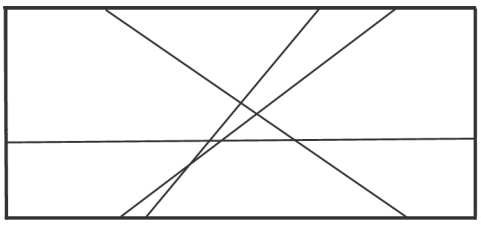
$L_0 = 1, P_0 = 1,$ $L_1 = 2, P_1 = 2,$ $L_2 = 4, P_2 = 4,$ $L_3 = 8, P_3 = 7.$

Jak widać, przy jednym cięciu bryła podzieli się nam na dwie, płaszczyzna tak samo. Przy dwóch oba na 4. Kwestia się zmienia jeśli chodzi o trzy cięcia i kolejne. Bryła podczas trzech cięć dzieli się nam na 8, płaszczyzna za to na 7. Jest tak dlatego, gdyż prosta z drugą może się przeciąć w dwóch miejscach. W pierwszym przypadku ani na bryle, ani na płaszczyźnie nie mamy punktów przecięcia. W drugim proste przecinają się w 1, a płaszczyzny w 2. W trzecim proste w 3, a płaszczyzny w 6.

Abyśmy mieli maksymalną liczbę kawałków, musimy ciąć w taki sposób, aby jedno cięcie przecinało się z drugim w dwóch miejscach i żadna inna prosta nie może przeciąć naszej bryły w tym samym miejscu.

Sprawdźmy zatem, jak będzie to wyglądać dla 4 cięć.





$L_4 = 15,$ $P_4 = 11.$

Mamy 15 brył. Proste w przypadku 4 cięć przetną się na 11 fragmentów.

Chyba widzimy już zależność $L_n = L_{n-1} + P_{n-1}$, gdzie $L_0 = 1$. Wzór na P_n mamy z zadania z płaszczyznami. Teraz zrobimy zestawienie paru początkowych wartości S_n. L_n jest o 1 większe od sumy S_n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_n	1	3	7	14	25	41	63	92	129	175	231	298	377	469

Rozwiązanie rekurencji daje nam:

$$\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\
&= L_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\
&= L_{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\
&\vdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\
&= 1 + S_n,
\end{aligned}$$

gdzie $S_n = 1 + 1 + 3 + 8 + 12 \cdots + \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Aby otrzymać postać zwartą ponownie użyjemy empirycznej metody.

n	S_n	n^3	$n^3 - S_n$	$\frac{n^3-S_n}{5}$
1	1	1	0	0
2	3	8	5	1
3	7	27	20	4
4	14	64	50	10
5	25	125	100	20
6	41	216	175	35
7	63	343	280	56
8	92	512	420	84

Za każdym razem $\frac{n^3-S_n}{5}$ jest mniejsze od S_n o n, a S_n od L_n o 1. Mamy więc wzór:

$$L_n = \frac{n^3 - S_n}{5} + n + 1.$$

Skoro $S_n = L_n - 1$ to możemy do wzoru podstawić $L_n - 1$, aby dostac postać zwartą.

$$
\begin{aligned}
L_n = L_n &= \frac{n^3 - (L_n - 1)}{5} + n + 1 \\
L_n - n - 1 &= \frac{n^3 - (L_n - 1)}{5} \\
5L_n - 5n - 5 &= n^3 - L_n + 1 \\
6L_n &= n^3 + 5n + 6 \\
L_n &= \frac{n^3 + 5n + 6}{6}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

1. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Matematyka konkretna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.

Wstęp 1

1. Proste na płaszczyźnie 2

2. Problem „V” na płaszczyźnie 4

3. Punkty na okręgu 5

4. Diagram Venna 9

5. Zygzaki 13

6. Rozcinanie płaszczyzny 16

Bibliografia 19