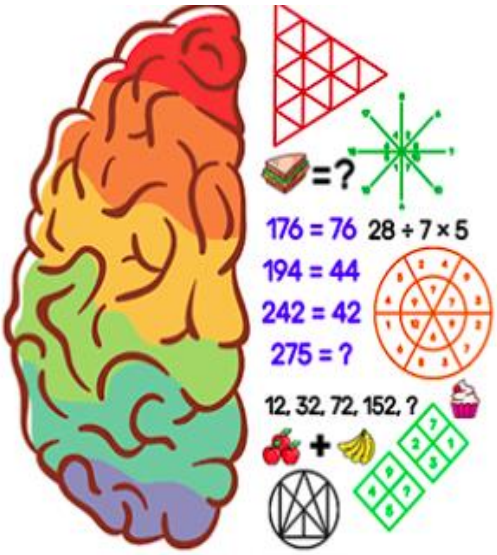
"Tajemnice matematyki,

czyli zagadki, łamigłówki matematyczne, sofizmaty i paradoksy"



Lena Stryjska

Maja Wastag

klasa 5a

Kraków, 2022 r.

"Matematyka jest dziedziną tak poważną,
że nie można zmarnować żadnej okazji,
by uczynić ją bardziej zabawną."

/Blaise Pascal/

"Dziewięć dziesiątych matematyki,
wszystko poza tym, co powstało z potrzeb praktycznych,
pochodzi z rozwiązywania zagadek."

/Jean Dieudonne/

Spis treści

Wstęp

1. Jak to dawniej z zagadkami matematycznymi było
    1.1. Nauki o łamigłówkach
    1.2. Historia zagadek matematycznych i ich sławni twórcy

2. Rodzaje łamigłówek matematycznych
    2.1. Kryptarytm
    2.2. Alfametyk
    2.3. Zadania z arytmetyki szkieletowej
    2.4. Algebraf
    2.5. Krzyżówki liczbowe
    2.6. Sudoku
    2.7. Calcudoku
    2.8. Zadania z zapałkami

3. Tworzymy własny alfametyk

4. Twierdzenia błędne - sofizmaty. Czy to sofizmat czy paradoks?
    4.1. Sofizmaty geometryczne
    4.2. Sofizmaty algebraiczne

5. Paradoks - definicja
    5.1 Scheda Araba ? - *czy to jest paradoks??*
    5.2 Paradoks Hotelu Hilberta
    5.3 Paradoks Kawalera de Méré
    5.4 Paradoks Hoopera
    5.5 Paradoks Zenona z Elei
    5.6 Nowa postać paradoksu Zenona z Elei

Wstęp

Zadania i zagadki zawsze wzbudzały zainteresowanie, rozwijały logiczne myślenie. Warto dbać o ćwiczenia umysłu w każdym wieku, bo ludzki mózg jest bardzo plastyczny, a to oznacza, że dzięki odpowiednim ćwiczeniom, można usprawnić swoje umiejętności kojarzenia, szukania wyjść z różnych sytuacji oraz zapamiętywania. Umiejętności logicznego myślenia i wyciągania wniosków ułatwią nam odnalezienie się w świecie, który wciąż nieustannie dostarcza nam wielu informacji, tych prawdziwych jak i zafałszowanych, a my musimy sobie radzić z odróżnieniem jednych od drugich.

W naszej pracy zatytułowanej "Tajemnice matematyki, czyli zagadki, łamigłówki matematyczne, sofizmaty i paradoksy" chciałyśmy przedstawić zagadnienie matematyki rekreacyjnej i pokazać, że matematyka może być zabawą i przyjemnością, ale może również zadziwiać. Przygotowanie materiałów do rozdziałów poświęconych paradoksom i sofizmatom w matematyce niejednokrotnie wprawiło nas w zdumienie.

Obok przykładów zagadek matematycznych i nieszablonowych zadań z różnych epok historycznych i z różnych geograficznych regionów, starałyśmy się zaprezentować różnorodność łamigłówek, krzyżówek matematycznych, kryptarytmów, zadań z zapałkami i wielu innych.

W naszej pracy zajmiemy się głównie zagadkami matematycznymi jako problemami natury rozrywkowej rozwiązywanymi przez jedną osobę.

Cytaty umieszczone w naszej pracy zaznaczyłyśmy kursywą/w cudzysłowie, a pojęcia matematyczne, z którymi do tej pory nie spotkałyśmy się w szkole, a użyłyśmy w pracy w tekście zaznaczone są kolorem zielonym oraz wyjaśnione w słowniczku na końcu pracy.

1. Jak to dawniej z zagadkami matematycznymi było

1.1 Nauki o łamigłówkach

Zacznijmy od odpowiedzi na pytanie: Czy istnieje osobna nauka, która zajmowałaby się zagadkami matematycznymi, czy rozrywkowa rola matematyki została zdefiniowana?

Poszukując informacji o nauce zajmującej się matematycznymi zagadkami napotkałyśmy kilka ciekawych definicji.

Zaczynając od angielskiej nazwy: **mathematical puzzle** - czyli zagadki matematyczne z określonymi zasadami, zazwyczaj nieobejmujące rywalizacji, w których rozwiązanie ma spełniać warunki, założone w treści zagadki. Zagadki matematyczne to integralna część matematyki rekreacyjnej.

Inny termin na określenie dziedziny, która ma na celu naukowe badanie łamigłówek, to **enigmatologia.** Neologizm stworzony w 1974 przez Willa Shortza, studenta Indiana University w Bloomington, który stał się znanym redaktorem łamigłówek w The New York Times.

Dotarłyśmy również do terminu “zagadkarstwo”, ale głównie w kontekście historycznym i w odniesieniu do zagadek ludowych oraz literackich.

Ostatnia nazwa na określenie nauki o łamigłówkach jaką udało nam się znaleźć to groźnie brzmiąca - **metagrobologia**. Skąd taka nazwa? Francuskie „metagraboliser” pojawiło się już w 1534 roku w powieści François Rabelais'go "Gargantua i Pantagruel". Z francuskiego „grabeler” znaczy “przesiewać”, a w czasach Rabelaisa było używane na określenie “dokładnego, wnikliwego badania, studiowania”. Terminu takiego w znaczeniu nauki o zagadkach użył (według Wikipedii) Rick Irby w 1981 roku w Wall Street Journal. Rick Irby jest projektantem, producentem i sprzedawcą puzzli z drutu od ponad 30 lat i ukuł dla siebie słowo “metagrobolog” jako ten, który intryguje ludzi. Wymyślił także “metagrobolizatory” dla przedmiotów, które wytwarza i sprzedaje oraz “metagrobologię” dla nauki o tym.

---

[1] *https://logic.amu.edu.pl/images/3/30/Zls16x2013.pdf*

[2] *https://penszko.blog.polityka.pl/2006/10/11/niewizytowki-willa/*

1.2 Historia zagadek matematycznych i ich sławni twórcy

Na początek trochę historii:

Gry i rozrywki matematyczne były rozpowszechnione już w **czasach starożytnych.**

Zadania rozrywkowe znajdujemy w papirusie Ahmesa, który żył ok. 2000 lat przed nasza erą na dworze faraona Amenemhata III i sprawował funkcję królewskiego pisarza i matematyka. Zadanie Ahmesa zapisane na papirusie odnalazł Anglik - Aleksander Rhind w 1853 we wnętrzu jednej z piramid.

Mistrzem zagadek matematycznych był **Archimedes**, który sformułował między innymi problem liczebności stada (problema bovinum), gdzie mamy do czynienia z **równaniami diofantycznymi**, czyli takimi, w których niewiadome są liczbami całkowitymi.

A oto zagadka:

Policz liczbę zwierząt w stadach boga Słońca, które pasły się niegdyś na wyspie Sycylia.

Były to 4 stada: białe W, w, czarne B, b, żółte Y, y i pstrokate D, d; gdzie duże litery oznaczają byki, a małe – krowy.
liczba białych byków była równa: połowie i trzeciej części byków czarnych plus wszystkie żółte;
$W = (1/2 + 1/3)B + Y$
liczba czarnych byków – 1/4-ej i 1/5-ej części byków pstrokatych plus wszystkie żółte;
$B = (1/4 + 1/5)D + Y$
byków pstrokatych było 1/6 i 1/7 części byków białych plus wszystkie żółte;

$D = (1/6 + 1/7)W + Y$
liczba białych krów była równa: trzeciej i czwartej części całego czarnego stada;
$w = (1/3 + 1/4)(B + b)$
liczba czarnych krów była równa: czwartej i piątej części całego pstrokatego stada;
$b = (1/4 + 1/5)(D + d)$
liczba pstrokatych krów była równa: piątej i szóstej części całego żółtego stada;
$d = (1/5 + 1/6)(Y + y)$
liczba żółtych krów była równa: szóstej i siódmej części całego białego stada;
$y = (1/6 + 1/7)(W + w)$

$W = (1/2 + 1/3)B + Y$
$B = (1/4 + 1/5)D + Y$
$D = (1/6 + 1/7)W + Y$
$w = (1/3 + 1/4)(B + b)$
$b = (1/4 + 1/5)(D + d)$
$d = (1/5 + 1/6)(Y + y)$
$y = (1/6 + 1/7)(W + w)$[3]

Rozwiązanie zagadki przekroczyło nasze możliwości, a wynik, po sprawdzeniu, przekracza pięćdziesiąt milionów sztuk!

Wielki grecki matematyk, **Diofantos**, który żył w III w. n.e. w Aleksandrii, autor dzieła "Arytmetyka", uważany za twórcę języka algebraicznego, zasłynął również jako twórca zagadek matematycznych[4], a według legendy na jego nagrobku widniał napis:

Tu jest grobowiec, w którym złożono prochy Diofantosa.
Przez jedną szóstą jego życia Bóg obdarzył go młodością,
przez dalszą, dwunastą część życia jego policzki były pokryte brodą.
Po siódmej dalszej części życia doświadczył szczęścia małżeńskiego, w którego piątym roku został ojcem syna.
Nieszczęśliwie syn żył tylko połowę lat ojca, który pozostał w smutku przez cztery ostatnie lata swego życia.
Przechodniu, oblicz długość jego życia![5]

[3] https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/29014-stare-zadania

[4] Kowal S. (1989) "Przez Rozrywkę do Wiedzy. Rozmaitości matematyczne."

[5] https://pl.wikipedia.org/wiki/Diofantos

Tym razem udało się nam rozwiązać zadanie. Poniżej przedstawiamy równanie, gdzie x to czas życia Diofantosa i jego podział na poszczególne etapy:

$\frac{1}{6}x$ – jego dzieciństwo

$\frac{1}{12}x$ – okres młodości

$\frac{1}{7}x$ – czas między wiekiem młodzieńczym a ślubem

5 – lata oczekiwania na syna

$\frac{1}{2}x$ – czas życia syna

4 – czas, jaki Diofantos żył po śmierci syna

Równanie:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Nasze rozwiązanie:

$$9 + \frac{3}{12}x + \frac{1}{7}x + \frac{6}{12}x = x$$

$$9 + \frac{9}{12}x + \frac{1}{7}x = x$$

$$9 + \frac{63}{84}x + \frac{12}{84}x = x$$

$$9 + \frac{75}{84}x = x$$

$$9 = x - \frac{75}{84}x$$

$$9 = \frac{28}{28}x - \frac{25}{28}x$$

$$9 = \frac{3}{28}x \cdot \frac{28}{3}$$

$$84 = x$$

Stąd po wykonaniu prostych działań otrzymujemy **x = 84**, czyli **Diofantos żył 84 lata.**

Twórcą znakomitej zagadki był również hinduski mędrzec **Sissa Nassir**, którego wynalazek - szachy - znalazł uznanie w oczach jego władcy. Król, aby wynagrodzić swojego poddanego obiecał mu nagrodę. Mędrzec poprosił o liczbę ziaren pszenicy, którą wyznaczy szachownica w następujący sposób:

"Połóż panie na pierwszym polu szachownicy jedno ziarno, na drugim dwa, na kolejnych cztery, osiem, szesnaście i tak do ostatniego pola za każdym razem podwajając ich liczbę."

Skromność mędrca zadziwiła władcę, jednak szybko okazało się że w całych Indiach nie ma takiej ilości zboża, by spełnić życzenie mędrca.

A oto rozwiązanie:

1 pole $\mathbf{1=2^2}$, 2 pole $\mathbf{2=2^1}$, 3 pole $\mathbf{4=2^2}$, 4 pole $\mathbf{8=2^3}$ i tak aż do ostatniego 64 pola, na którym znajdzie się 263 ziaren.

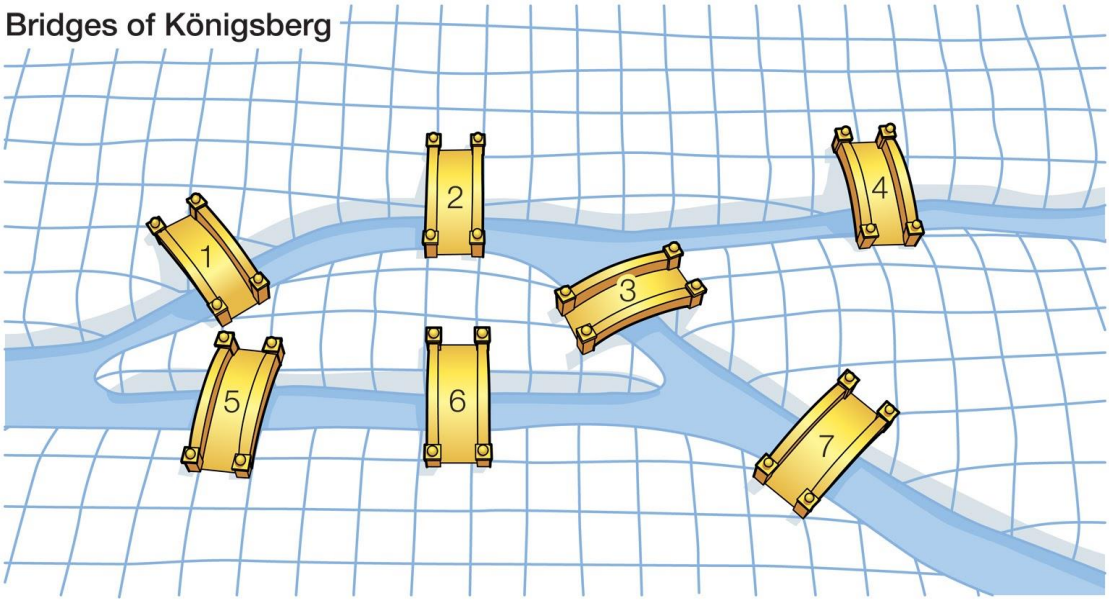
Ilość wszystkich ziaren jest sumą pewnego ciągu geometrycznego i daje nieprawdopodobnie wielką liczbę **18 446 744 073 709 551 615**, czyli ponad **18 trylionów**!

[6] *http://blog2pir.blogspot.com/2014/02/ziarna-pszenicy-na-szachownicy.html*

Szwajcarski naukowiec **Leonhard Euler** (1707 – 1783) rozgryzł zagadkę miasta Królewiec, tworząc przy tym początek tzw. teorii grafów, niezwykle istotnej we współczesnej informatyce (np.w procesie tworzenia różnego rodzaju relacji pomiędzy danymi, planowaniu produkcji, transporcie i genetyce).

Zagadka brzmiała następująco:

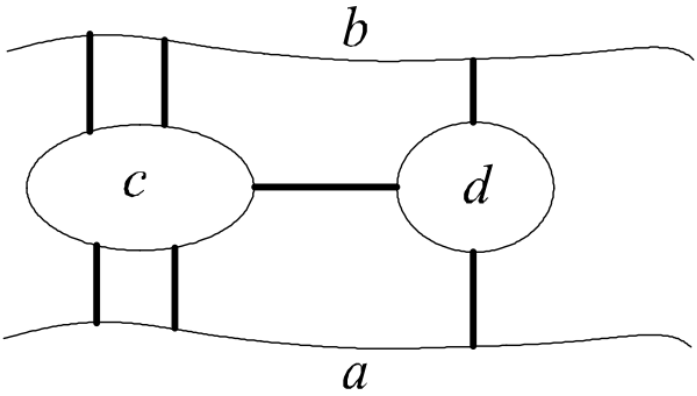
„Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta (Nördliches Ufer, Insel Kneiphof, Südliches Ufer, Insel Lomse) z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż raz jeden?” [7] [8]



© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

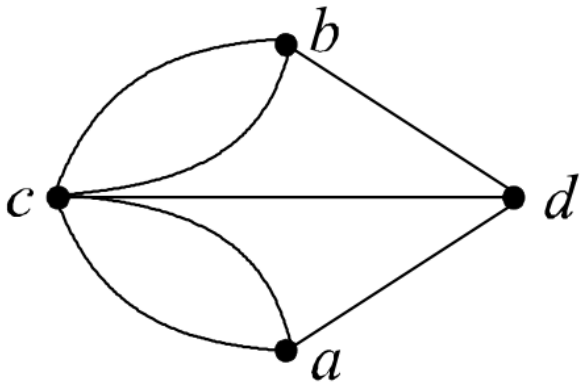
[7] *https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/29014-stare-zadania*

[8] *Steinhaus H. (1989) Kalejdoskop matematyczny, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa*



Odpowiedź Eulera brzmiała: Nie!

Zauważył on bowiem, dwie rzeczy: nie ma znaczenia jak duża jest wyspa czy wybrzeże, liczy się tylko z jakiego obszaru można dojść do którego obszaru, oraz że sama rzeka nie ma znaczenia, liczą się tylko połączenia, który obszar łączy się z którym obszarem i iloma przejściami. Sytuację, tę można przedstawić na grafie [9]:



Potrzebna jest nam również informacja ile jest wyjść z każdego wierzchołka (czyli mostów z każdego obszaru).

Z wierzchołka c jest 5 wyjść. Z wierzchołka a, b i d są tylko po 3 wyjścia.

Dodatkowo wiemy, że Euler udowodnił poniższe stwierdzenia [10]:

1) Jeżeli każdy wierzchołek ma parzystą liczbę wyjść to ZAWSZE da się znaleźć drogę zgodną z regułami zadania.
2) Jeżeli tylko 2 wierzchołki mają nieparzystą liczbę wyjść to ZAWSZE da się znaleźć drogę zgodną z regułami zadania, co więcej ta droga zacznie się w jednym z nieparzystych wierzchołków a zakończy w drugim.
3) Jeżeli więcej niż 2 wierzchołki mają nieparzystą liczbę wyjść to NIGDY nie da się znaleźć drogi zgodnej z regułami zagadki.

---

[9] *http://math.uni.lodz.pl/~malfil/pliki/grafy_r3*

[10] *https://betaandbit.github.io/KiedyTyWreszcie/indexGrafy.html*

W tym przypadku, wszystkie 4 wierzchołki (a,b,c,d) mają nieparzystą liczbę wyjść więc nie ma możliwości znaleźć dobrej drogi.

Co ciekawe, współcześnie mamy możliwość przejścia przez wszystkie mosty w Królewcu nie przechodząc przez żaden więcej niż raz, bowiem ostało się ich tylko 5.

W opublikowanej w 1736 roku pracy Euler sformułował pierwsze twierdzenie teorii grafów, które dziś zapisujemy następująco: W grafie można znaleźć cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy graf jest spójny i każdy jego wierzchołek ma parzysty stopień.

Znając to twierdzenie zawsze można stwierdzić, czy łamigłówka typu "narysuj figurę nie odrywając ołówka od kartki" ma rozwiązanie. Figury, które można nakreślić jednym pociągnięciem ołówka, nie prowadząc go nigdy po linii już nakreślonej, nazywają się **unikursalne**.

A poniżej nasza próba narysowania koperty otwartej:

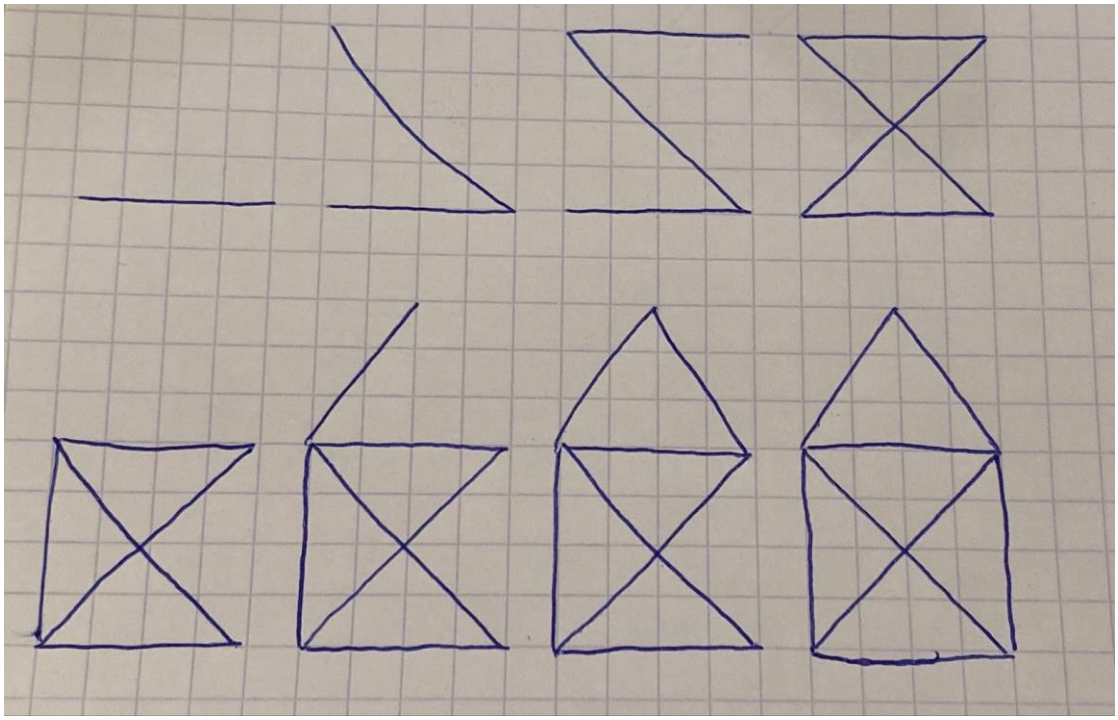
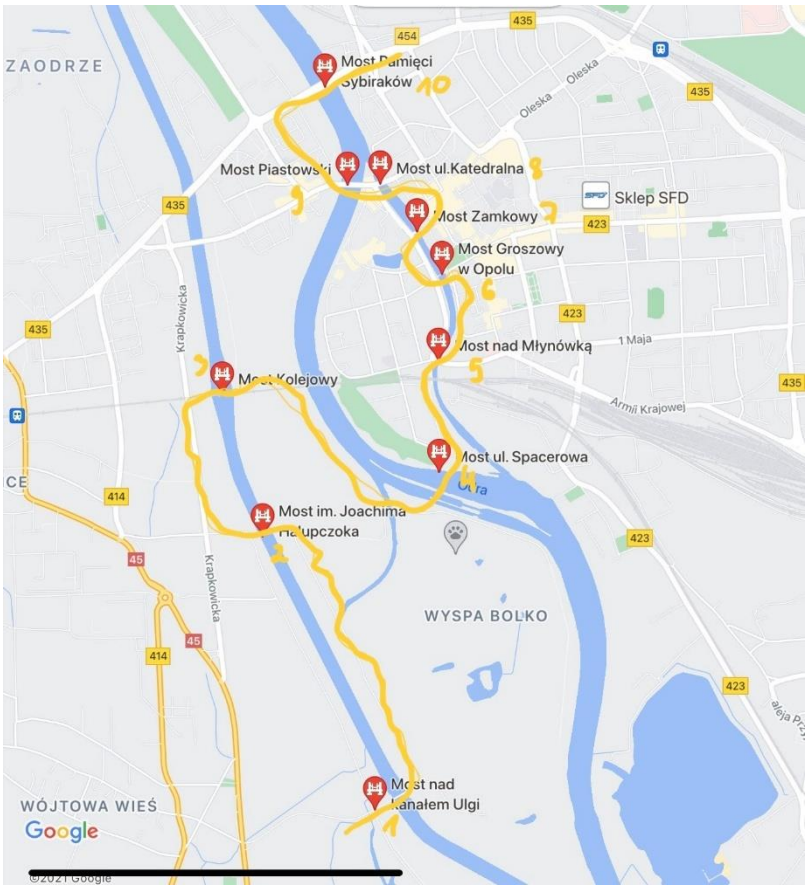


Figura jest unikursalna, gdy **nie ma w niej punktów rzędu nieparzystego**, lub jeśli są na niej dwa takie punkty. Graf mostów królewieckich ma ich trzy; znana dobrze wszystkim koperta ma dwa takie punkty.

[11] *Jordi Deulofeu "Dylematy więźniów i zwycięskie strategie. Teoria gier" 2012*

Zastanawiałyśmy się czy jest w Polsce miasto, którego mieszkańcy łamią sobie głowę nad podobną zagadką (z dostępnej literatury wiemy, że taka możliwość jest we Wrocławiu). Śledząc mapy miast położonych nad największymi rzekami trafiłyśmy na Opole. Na poniższej mapie centrum miasta zaznaczonych jest 16 mostów, spróbowaliśmy iść tokiem myślenia naukowca Eulera. Tym razem się udało - w Opolu, spacerujący po mostach wędrowiec może przejść przez wszystkie 16 mostów, przekraczając każdy tylko jeden raz.



Poniższą anegdotę autorstwa Ferdinanda Lagarrigue można znaleźć w jego pracy zatytułowanej: Recreations scientifiques.

Pewna Włoszka, wyprawiając na targ trzy córki z pomarańczami, dała najstarszej 50 sztuk, młodszej 30, a najmłodszej, która była jeszcze dzieckiem, włożyła do koszyczka 10. Przykazała przy tym sprzedawać towar jak najkorzystniej, ale po tych samych cenach, by sobie nie robiły konkurencji.

Jakież było zdumienie matki, gdy dziewczęta wróciwszy oświadczyły, że uczyniły, jak im nakazała, i że wszystkie trzy otrzymały równe sumy ze sprzedaży.

— Jak to być może, abyście sprzedając po tych samych cenach osiągnęły te same kwoty za 50, za 30 i za 10 pomarańcz?! To niemożliwe! Żartujecie!

A jednak jest to zupełnie możliwe: dziewczęta sprzedały najpiękniejsze pomarańcze po 15 groszy, a resztę po 5 groszy za 7 sztuk. Najmłodsza z nich miała 3 wielkie, dorodne pomarańcze, średnia siostra 2, a najstarsza tylko 1"[12] .

Kolejny problem matematyczny jest autorstwa **Henry'ego Ernesta Dudeneya** (1857 –1930) angielskiego matematyka, który specjalizował się w zagadkach matematycznych. W roku 1899 H. Dudeney zamieścił na łamach tygodnika "Weekly Dispatch" zadanie, uchodzące dziś za klasykę matematyki rekreacyjnej[13].

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

Łącząc (lub nie) znajdujące się po lewej stronie znaku równości cyfry, czyli tworząc liczby przynajmniej dwucyfrowe, oraz umieszczając między nimi znaki czterech podstawowych działań [+ – × :] należy przekształcić powyższy zapis w poprawną równość.

Urok tej łamigłówki polega m. in. na zachowaniu naturalnej kolejności cyfr. Rozwiązań jest bardzo dużo – oto dwa z nich opublikowane przed 115 laty:

123 - 4 - 5 - 6 + 8 - 9 = 100,

(1 + 2 - 3 - 4)×(5 - 6 - 7 - 8 - 9) = 100

Wielki wkład w rozwój łamigłówek miał również pisarz **Lewis Carroll 1832-1898** (Charles L. Dodgson, twórca książki "Alicja w Krainie Czarów", autor ponad 250 dzieł naukowych). Jego największą pasją były rozmaite gry matematyczne, łamigłówki, paradoksy, sztuczki magiczne, a także zabawy słowne. Właśnie te zainteresowania Carrolla znalazły swoje odbicie m.in. w jego dwóch książkach o Alicji.

Lewis Carroll prowadził dzienniki, w których regularnie zapisywał różne, wymyślane przez siebie ciekawe zadania. I tak 27 maja 1894 roku Carroll w swoim dzienniku napisał: „W ostatnich dniach opracowałem kilka ciekawych zadań związanych z problemem kłamcy".

A oto jedno z tych zadań. Przy jego rozwiązaniu przyda się odrobina logicznego myślenia i umiejętność wyciągania wniosków:

Mamy 3 panów, nazwijmy ich imionami A, B i C. Pan A mówi, że pan B kłamie. Pan B mówi, że pan C kłamie. Natomiast pan C mówi, że zarówno pan A jak i pan B – kłamią. No to kto kłamie a kto mówi prawdę?

---

[12] *Jeleński S. (1954) "LILAVATI Rozrywki matematyczne"*

[13] *https://penszko.blog.polityka.pl/2014/08/28/wedlug-dudeneya/*

[14] *https://bigosmatematyczny.pl/mfu2/*

Rozważyłyśmy wszystkie trzy możliwości, zakładając, że każdy z panów mówi prawdę:

- 1 założenie: **Pan A mówi prawdę**, to znaczy, że pan B kłamie o tym, że pan C kłamie. Czyli pan C mówi prawdę, a kłamią razem pan A jak i pan B. Więc otrzymujemy sprzeczność. Nasze założenie, że pan A mówi prawdę jest błędne.

- 2 założenie: **Pan B mówi prawdę**, ale to znaczy, że pan A kłamie jak i pan C kłamie. Pan C twierdzi, że pan A kłamie jak i pan B kłamie. Więc w tym przypadku gdy pan A kłamie, a pan B mówi prawdę, stwierdzamy, że pan C rzeczywiście kłamie. I tu nie otrzymujemy żadnej sprzeczności – wszystko się zgadza.

Dla formalności sprawdźmy jeszcze 3 założenie: **pan C mówi prawdę**, to znaczy, że zarówno pan A jak i pan B kłamią. Skoro więc pan A kłamie (o tym, że pan B kłamie) to znaczy, że pan B mówi prawdę o tym, że pan C kłamie. Otrzymujemy sprzeczność – pan C nie mówi prawdy!

Zatem: **pan A – kłamie, pan B – mówi prawdę, pan C – kłamie**.

Jednym z pierwszych pionierów matematyki rozrywkowej i zagadek matematycznych był **Francuz Claude-Gaspaer Bachet de Méziriac** (1581-1638), znany ze swoich dzieł *Diophanti* (1621) i *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres* (1612), które były pierwszą dużą pracą poświęconą matematyce rekreacyjnej i stanowiły zbiór matematycznych zagadek z XVII wieku, takich jak wilk koza i kapusta, magiczne kwadraty, zadania na liczbach całkowitych.

Kolejną pracą na temat rozrywek matematycznych był Récréations mathématiques, francuskiego jezuity **Jean'a Leurechon'a** - jego dzieło służyło jako wzór dla kolejnych autorów,

W wieku XVIII pojawiła się książka Rational Recreations autorstwa Williama Hoopera, z zagadką znikających pól (vanishing paradoxes), która wymaga użycia ciekawych matematycznych własności. Temat ten omówimy w kolejnym rozdziale [15].

[15] *Jordi Deulofeu " Dylematy więźniów i zwycięskie strategie" Teoria gier*

2. Rodzaje łamigłówek matematycznych

2.1 Kryptarytm

Kryptarytm: (gr. *kryptós* = ukryty; *arythmos* = liczba) to rodzaj gry matematycznej w postaci działania arytmetycznego – dodawania, odejmowania, mnożenia lub dzielenia, w którym cyfry są reprezentowane przez litery alfabetu. Celem zadania jest określenie wartości każdej litery[16].

Takim samym literom powinny odpowiadać takie same cyfry, a różnym literom różne cyfry. Żadna z liczb wielocyfrowych nie może zaczynać się zerem. Po zastąpieniu liter cyframi powinno otrzymać się poprawne działanie. Zadanie powinno mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Rolę liter mogą spełniać również inne symbole: figury szachowe, symbole kolorów karcianych, gwiazdki itp.

Łamigłówki podobne do kryptarytmów znane były już w starożytnych Chinach (jako arytmetyka liter lub arytmetyka słów) i w średniowiecznych Indiach (zadania polegające na odtwarzaniu działań, w których wszystkie cyfry lub większość z nich zastąpiono gwiazdkami lub iksami). W czasach nowożytnych pierwsze kryptarytmy zamieścił w 1924 roku brytyjski magazyn Strand Magazine [17].

2.2 Alfametyk

Alfametyk to kryptarytm, w którym cyfry zaszyfrowane są literami tworzącymi wyrazy powiązane znaczeniowo, bądź też słowa składające się w sensowne frazy lub zdania. Angielskie określenie „***alphametic***" pojawiło się za sprawą J.A.H.Huntera w 1955 roku w kanadyjskim czasopiśmie Globe And Mail.

Za najstarszy alfametyk uznawany jest (najpopularniejszy i najczęściej cytowany kryptarytm na świecie) autorstwa H. E. Dudeneya, który ukazał się w dziale łamigłówkowym brytyjskiego miesięcznika The Strand Magazine w roku 1924 i brzmi :

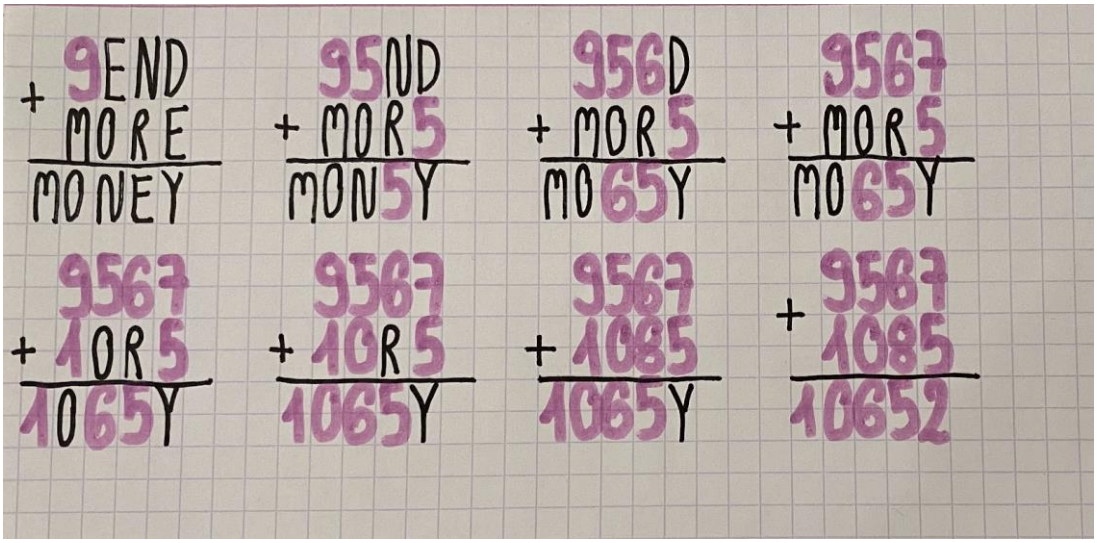
$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline = & M & O & N & E & Y \end{array}$$

(ang. przyślij więcej pieniędzy)

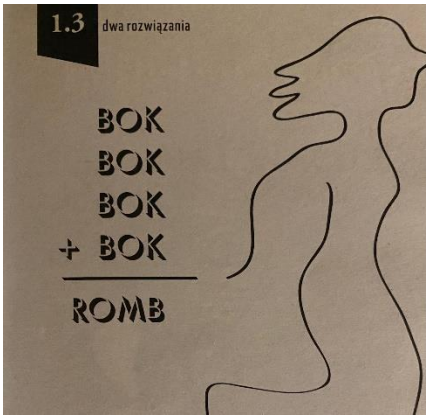
[16] *http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/gry_zagadki_paradoksy/2013/12/30/Kryptarytmy_czyli_arytmetyka_sl/*

[17] *https://repozytorium.uph.edu.pl/bitstream/handle/11331/3080/Jurasinska.R.Matematyczne%20inspiracje%20w%20szaradziarstwie.pdf?sequence=1*

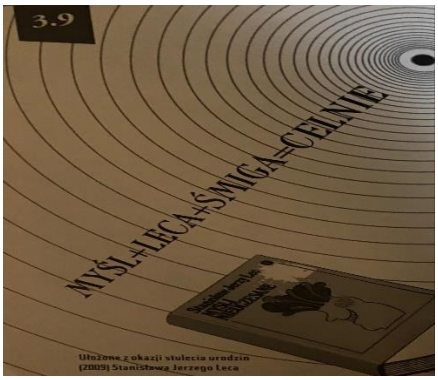
Rozwiązanie:



My, w bardzo ciekawej książeczce Katarzyny Lipszyc zatytułowanej: “Kryptarytmy czyli arytmetyka słów” z 2013 r. znalazłyśmy wiele przykładów polskich alfametyków. Poniżej jedna z łatwiejszych zagadek.

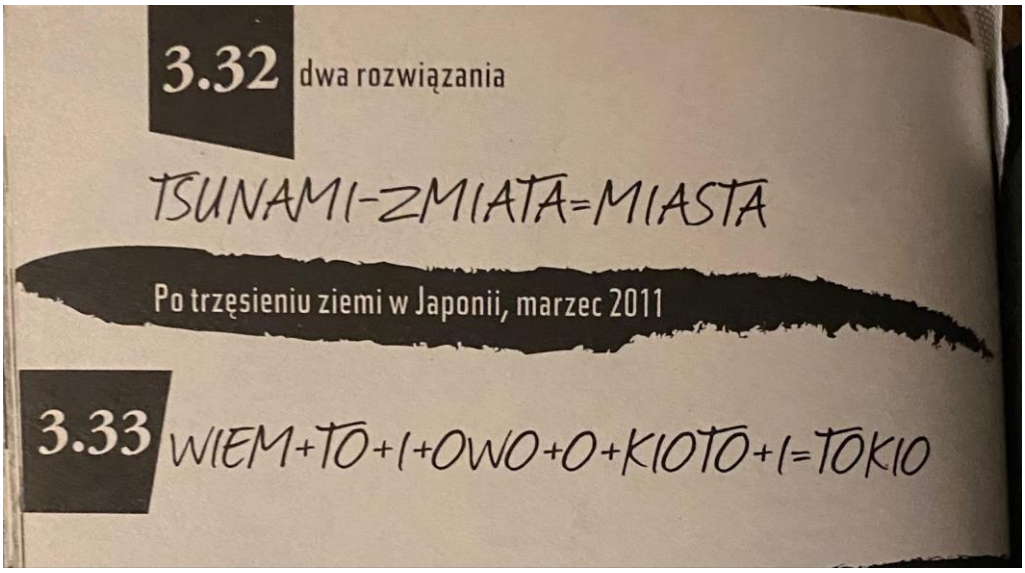


Rozwiązanie to : 496 + 496 + 496 + 496 = 1984



Inspiracją dla poniższego kryptarytmu było stulecie urodzin Stanisława Jerzego Leca w 2009 roku.

Poniżej zadanie, dla którego podstawą stało się trzęsienie ziemi w Japonii w 2011 i spowodowana nim fala tsunami, która zniszczyła pacyficzne wybrzeże regionu Tōhoku[18].



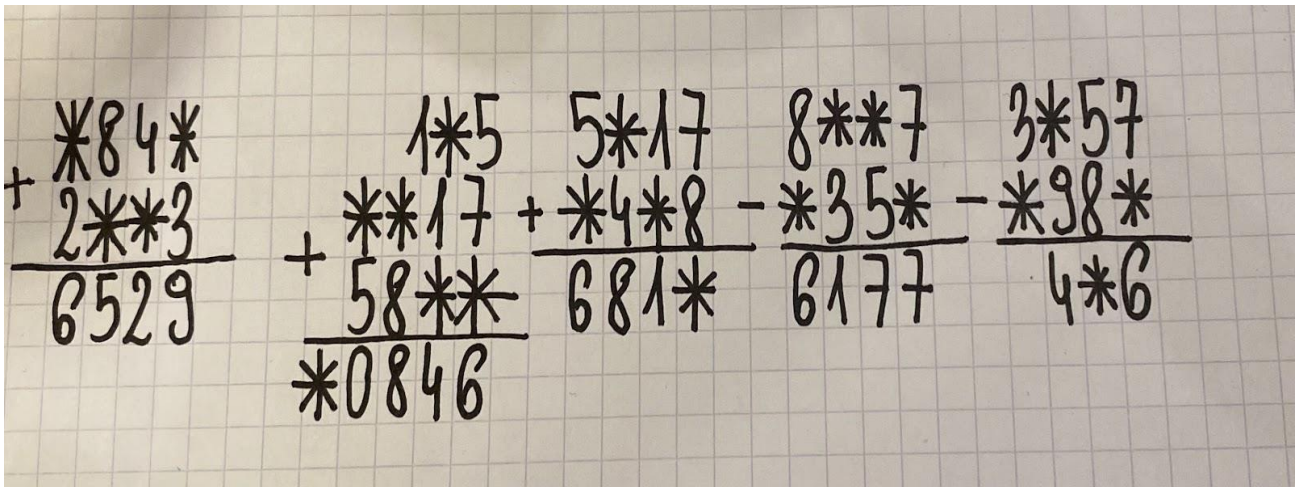
2.3 Zadania z arytmetyki szkieletowej

Zadania z arytmetyki szkieletowej polegają na odtwarzaniu pełnego zapisu działania arytmetycznego na podstawie jego fragmentów. W działaniu arytmetycznym, szkielet tworzą miejsca na cyfry. Często w czasopismach szaradziarskich zadania takie nazywane są działaniami „zamazanymi" lub „zaplamionymi". Pod nazwą, której geneza jest podobna - „molowe rachunki "- znane są w Chinach i Japonii, gdzie były popularne już w XVIII wieku. We wspomnianej już książce S. Jeleńskiego Lilavati rozdział 44 nosi tytuł "Spłowiałe rękopisy" i przedstawia takie zadania.

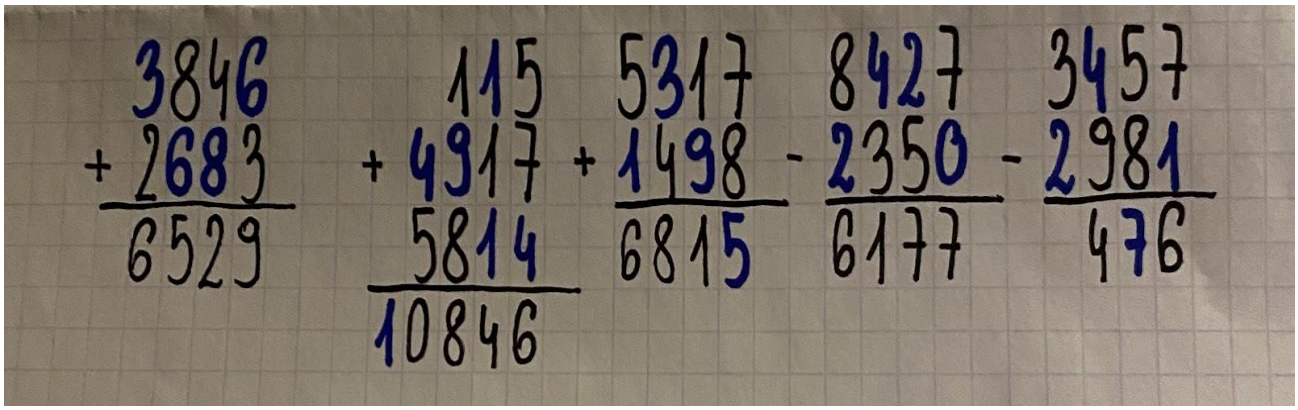
"Odnaleziono bardzo cenne rękopisy matematyczne, które jednak wskutek niewłaściwego przechowywania spłowiały tak dalece, że tylko zarysy niektórych cyfr można było odróżnić.
Cyfry nieczytelne oznaczymy gwiazdkami.

[18] *https://pl.wikipedia.org/wiki/Trzęsienie_ziemi_w_Tōhoku*

Należy w ich miejsce wstawić pierwotnie tam wpisane cyfry wiedząc, że w pierwszym szeregu dokonywano niegdyś dodawania, w drugim odejmowania:”



Odtworzenie tych działań nie sprawiło nam żadnej trudności.



Trudniejsze będzie przywrócenie pierwotnych liczb w tych miejscach rękopisu, gdzie było mnożenie lub dzielenie.

```
    ***
  X 457
  ------
    ****
   1705
  ****
  ------
  ******
```

```
    341
  X 457
  ------
   2387
  1705
 1364
 ------
 155837
```

```
    **8*
  ********** : ***
  ***
  ------
   302*
  *695
  ------
    **11
    3*8*
    ----
      2*1*
      ****
```

```
    178
  ********** : 385
  385
  ------
   3026
   2695
   ----
    3311
    3080
    ----
     2310
     2310
```

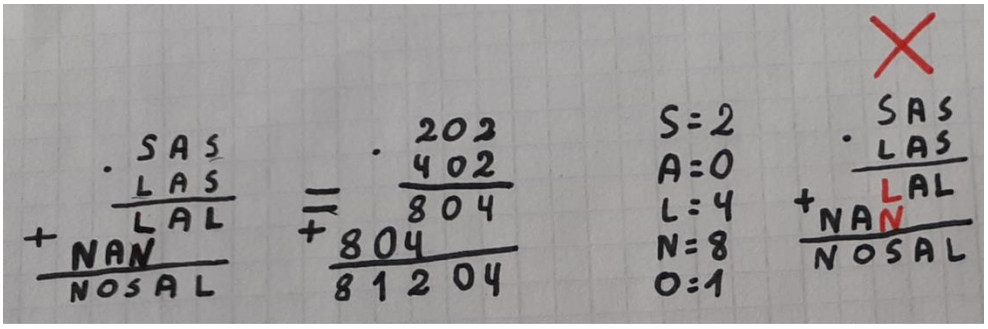
2.4 Algebraf

Algebraf to rodzaj łamigłówki arytmetycznej, w której cyfry zastąpiono literami lub piktogramami w wyniku czego powstał swego rodzaju szyfr. Rozwiązanie algebrafu polega na zastąpieniu liter lub piktogramów odpowiednimi cyframi tak, aby powstałe w ten sposób liczby tworzyły poprawne działania zarówno w poziomie jak i w pionie. W algebrafach obowiązuje zasada, w której takim samym literom odpowiada taka sama cyfra, różnym literom odpowiadają różne cyfry.

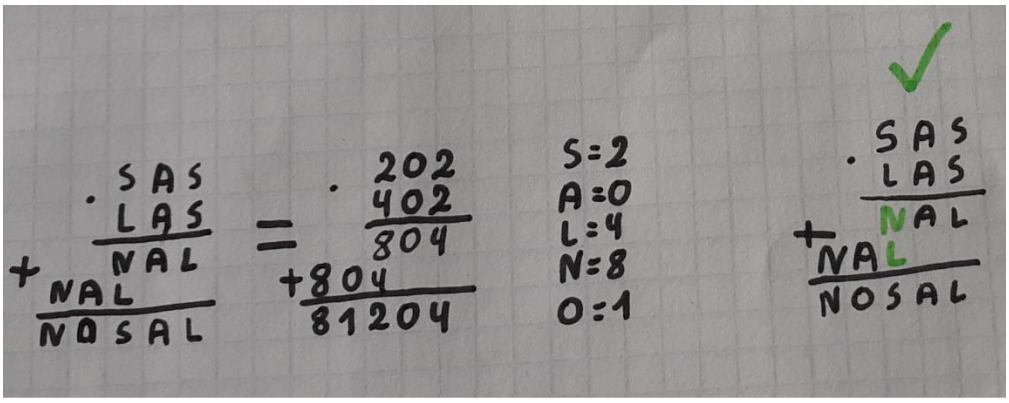
Poniżej przykład rozwiązanego algebrafu:

AAA	+	BBB	=	CCC		444	+	555	=	999
:		+		-	=	:		+		-
D	x	EA	=	FFF		3	x	74	=	222
GAH	+	IFC	=	EEE		148	+	629	=	777

Kolejny algebraf jest z naszego podręcznika do Matematyki dla klasy piątej.
Podczas rozwiązywania tego przykładu znalazłyśmy błąd. Poniżej próba rozwiązania tego przykładu:



Postanowiłyśmy zmienić ten przykład, aby był prawidłowy i po kilku próbach powstał można powiedzieć “nasz własny algebraf”.



2.5 Krzyżówki liczbowe

Krzyżówki liczbowe to zadania, w których zamiast słów lub liter wpisujemy cyfry tworzące poprawne wyniki lub działania. Trudniejsze krzyżówki należy rozwiązywać powoli i dokładnie, ponieważ jeden mały błąd może spowodować, że całą krzyżówkę trzeba będzie zacząć rozwiązywać od początku.

Jest wiele rodzajów krzyżówek liczbowych - w jednych należy wpisać wyniki działań, w innych wpisać słownie odpowiedź.

Nasza prosta krzyżówka liczbowa:

	×	6	=	
×		+		-
	×		=	12
=		=		=
	+	12	=	

Rozwiązanie:

6	×	6	=	36
×		+		-
2	×	6	=	12
=		=		=
12	+	12	=	24

Przykład trudniejszej krzyżówki liczbowej:

16	÷		=		+		=	5
÷		+		×		×		+
	+		=	13	-		=	
=		=		=		=		=
	×	13	=		-	12	=	
+		-		÷		+		+
8	+		=		×		=	
=		=		=		=		=
	-		=	2	+		=	14

Rozwiązanie:

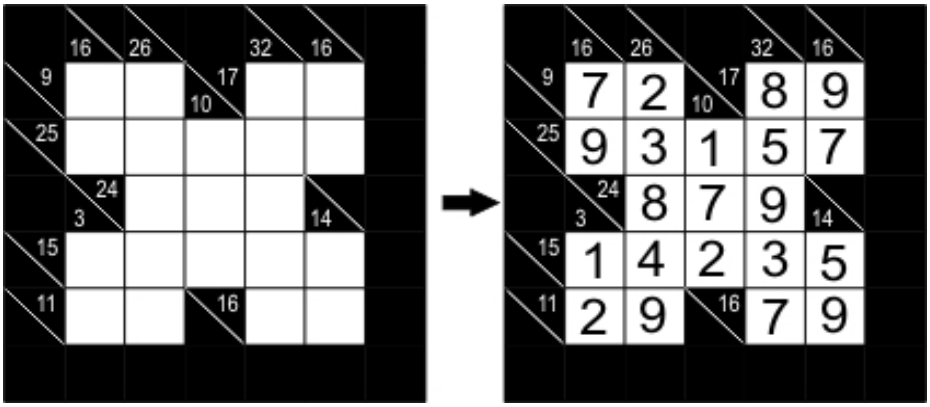
16	÷	8	=	2	+	3	=	5
÷		+		×		×		+
8	+	5	=	13	-	4	=	9
=		=		=		=		=
2	×	13	=	26	-	12	=	14
+		-		÷		+		+
8	+	5	=	13	×	0	=	0
=		=		=		=		=
10	-	8	=	2	+	12	=	14

Przykładem krzyżówki numerycznej jest **Kakuro (Cross -Sums).** Polega na wpisywaniu cyfr od 1 do 9 tak, aby ich suma wynosiła tyle, ile liczba wskazana w pionowym lub poziomym bloku. W jednym bloku nie mogą się powtarzać takie same cyfry. Zabawa podobna jest do popularnej gry sudoku. Jej powstanie wypada na 1950 rok - wtedy ukazała się po raz pierwszy w **Official Crossword Puzzles.**

https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/kakuro/history

Jak ją rozwiązać?

- ✓ w puste pola wpisujemy liczby od 1 do 9
- ✓ liczby określają, jaka ma być suma wpisanych cyfr (na przykład 23=9+6+8)
- ✓ w obrębie jednej sumy cyfry nie mogą się powtarzać
- ✓ **każda łamigłówka ma dokładnie jedno rozwiązanie!**



2.6. Sudoku

Sudoku (*Jpn. su= liczba; doku=poszczególna*) - to rodzaj łamigłówki polegająca na wypełnianiu diagramu w taki sposób, aby w każdej kolumnie, wierszu i kwadracie składającym się zdziewięciu pól (3x3) znalazły się liczby od 1 do 9. Liczby umieszczone w tym samym kwadracie, kolumnie oraz wierszu nie mogą się powtarzać[19]

[19] *https://pl.wikipedia.org/wiki/Sudoku*

a. Tradycyjne sudoku + rozwiązanie

Poniżej przykład sudoku tradycyjnego z naszym rozwiązaniem, aby ułatwić kolejne kroki zastosowałyśmy oznaczenia poszczególnych kolumn i wierszy jak w popularnej grze „Statki" . Kolejne cyfry od 1 do 9 oprócz już wpisanych które są w czarnym kolorze będą miały swój kolor. Poniższy diagram składa się z 81 cyfr , podane mamy 27 cyfr, a więc do rozwiązania tego zadania musimy wpisać 54 cyfry zgodnie z zasadami łamigłówki Sudoku.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	7	|		8		3		
2	-	-	|	2	5	-	7	-	-
3	|	2	|	3					4
4	|	9	|						
5	|		|	7	3		5	6	
6	7		|		6		4		
7	|		7	8		3	9		
8	|		|						3
9	3		|						2

Zaczynamy:

Krok 1. W pierwszym kroku bierzemy pod uwagę umieszczenie cyfry 7.

I tak Cyfrę 7 mamy w polu C7, A6, G2 rysując z podanych pól linie prostopadłe i równoległe jak poniżej wychodzi nam że w pierwszym górnym kwadracie zostaje nam jedno pole na wpisanie cyfry 7 jest to pole **B1.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	7	6	4	8	1	3	2	5
2	1	4	3	2	5	9	7	8	6
3	5	2	8	3	7	6	1	9	4
4	6	9	4	5	1	8	2	3	7
5	8	1	2	7	3	4	5	6	9
6	7	3	5	9	6	2	4	1	8
7	4	6	7	8	2	3	9	5	1
8	2	5	1	6	9	7	8	4	3
9	3	8	9	1	4	5	6	7	2

Stosując analogiczną metodę;

Cyfra 9 – A1,B4 → C9, cyfra 4 – C4,G6 → F5, cyfra 3 - A9,E5 → B6; I8,B3,E3,G1 →H4 ; A9,B6,3D,G1→C2 , Cyfra 2 – B3 ,D2 ,I9 → H1 ; I9,H1→G4 ; G4,D2→F6, Cyfra 8 – E2,D8 →F4 , cyfra 4 – I3,F5 → D1 , cyfra 5 – E2,C6→A3; A3,E2→I1 , Cyfra 6 – E6,H5→A4 , cyfra 4 – I3,F5 → D1,

Linia pozioma 1. W polu C1 i F1 może być 6 lub 1 cyfra z pola C 8 wyklucza 1 w C1 a więc C1 = 6 a F1 =1,

cyfra 5 – E2,C6→A3; A3,E2→D4;

Środkowy mały kwadrat : w polu E4 i D6 może być cyfra 1 lub 9. Pole B4 wyklucza cyfrę 9 z E4 a więc E4 =1 a D6=9. Cyfra 1 – F1,E4,C8 →D9, D8= 6 , Cyfra 9 – D6,B4 → I5,

Linia pozioma C : w polu C3 i C5 może być 2 lub 8 cyfra z pola B3 wyklucza 2 z C3 a więc C3 = 8 a C5 =2 , Cyfra 6 – E6,H5→A4 , I4 = 7 ,

Kolumna G: brakuje cyfr 1,8,6 i Tak Cyfra 1 może być tylko w G3 ponieważ C8,D9 wyklucza ją z G8,G9; Cyfra 6 = G9 bo z G8 wyklucza ją D8 , Cyfra 8 = G8; G 8,D8→B9, B9→A5 , B5=1→A2=1 , B2=4,

Cyfra 6 A4,D8→B7 , B7,H5→ I2, Cyfra 8 -C3,F4→H2; H2→I6, H3 =9, Cyfra 1 =H6,I7, Cyfra 9 = F2 , F2,C9,G7→E8 , Cyfra 6 = F3, E3 =7; cyfra 5 =B8 ; E2,B8→F9 ;B8,F9→H7, cyfra 7 = F8, H9, cyfra 4 =H8 ,A7,E9 , Cyfra 2 = E7,A8 **SUDOKU ROZWIAZANE**

b. Sudoku samurai[20] **-** składa się z kwadratów połączonych i nachodzących na siebie.

	3								
	6				2				
2				1					
						4			
			6	3					
					5	1			
			3						
					4				2
				3				1	
								5	

4	3	1	2	6	5				
1	6	5	3	4	2				
2	5	6	4	1	3				
3	2	4	1	5	6	3	2		
6	4	3	5	2	1	4	6		
5	1	2	6	3	4	5	1		
		6	2	4	5	1	3	2	6
		5	3	1	2	6	4	3	5
		1	4	6	3	2	5	4	1
				5	4	3	1	6	2
				3	6	5	2	1	4
				2	1	4	6	5	3

c. Sudoku nieregularne[21]**:** zamiast 9-polowych kwadratów występują tu 9-polowe figury o nieregularnych kształtach.

	7		8			9		
4		2					8	
	3				9			6
6						8		
	6			8			7	
		3						7
8			4				3	
	8					5		3
		7			4		6	

3	7	1	8	2	6	9	5	4
4	1	2	6	3	5	7	8	9
5	3	8	7	1	9	4	2	6
6	4	5	9	7	3	8	1	2
9	6	4	2	8	1	3	7	5
2	9	3	5	6	8	1	4	7
8	2	9	4	5	7	6	3	1
7	8	6	1	4	2	5	9	3
1	5	7	3	9	4	2	6	8

[20] *„Mind Games Sharpen your focus and boost your brain power " edition published in 2021 By SpiceBox TM.*

[21] *https://docplayer.pl/48245593-X-mistrzostwa-polski-w-sudoku-instrukcje-22-luty-2015-r-kilka-waznych-informacji.html*

d. Sudoku diagonalne - cyfry w diagramie nie mogą się powtarzać również po przekątnych kwadratu

	1	7				9		
			1		6		7	
		9			7		1	
	7	6	5			3		
	3					5		
	6				8	2		
	2			6	5	1	3	
	5					4		

6	1	7	8	3	2	9	4	5
5	4	3	1	9	6	8	7	2
2	8	9	4	5	7	6	1	3
8	7	6	5	2	4	3	9	1
1	9	5	6	8	3	7	2	4
4	3	2	9	7	1	5	8	6
7	6	1	3	4	8	2	5	9
9	2	4	7	6	5	1	3	8
3	5	8	2	1	9	4	6	7

2.7. Calcudoku

Calcudoku (KenKen) (*Jpn. su= liczba; doku=poszczególna*) to łamigłówka arytmetyczno-logiczna wynaleziona przez japońskiego nauczyciela Tetsuya Miyamoto, która polega na poprawnym umieszczeniu liczb w danym diagramie.

Diagram łamigłówki KenKen może mieć wymiary od **3x3 do 9x9.** W diagram wpisuje się cyfry od **1** do **n**, gdzie **n jest rozmiarem diagramu**; np. w diagramie o wymiarach 3x3 gra się cyframi od 1 do 3, a w diagramie 9x9 cyframi od 1 do 9. Wewnątrz diagram podzielony jest pogrubionym obramowaniem na tzw. klatki. Każda z klatek ma przypisane działanie arytmetyczne cyfry wewnątrz klatki muszą spełniać to działanie. Cyfry mogą powtarzać się wewnątrz klatki, ale nie mogą powtarzać się w tych samych kolumnach i wierszach diagramu.

Przykład rozwiązanego KenKen :

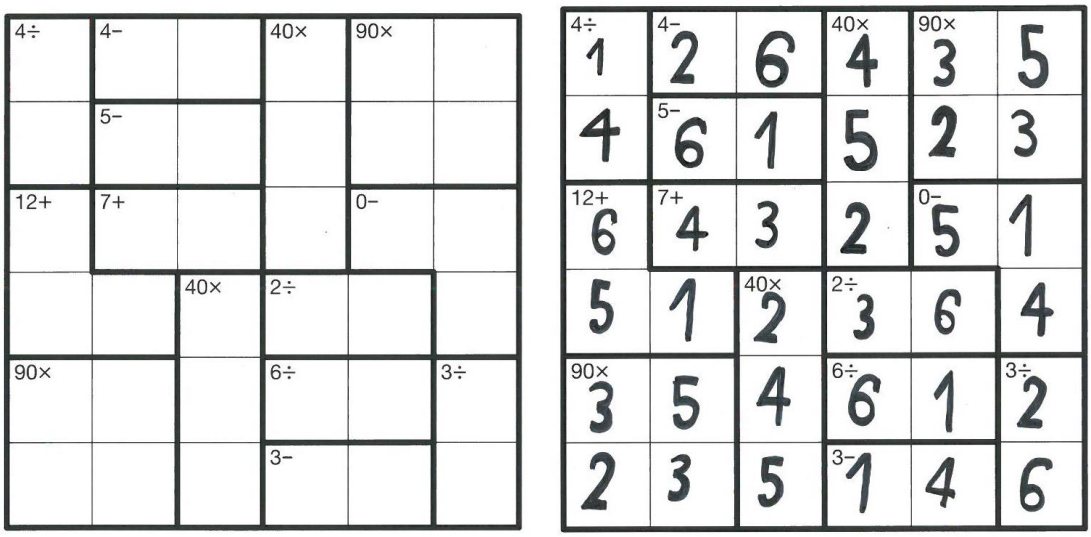
2- 3	1	2× 2
3+ 2	3 3	1
1	5+ 2	3

Każdy rząd i kolumna może zawierać tylko jedną cyfrę od 1 do 3

W przedstawionym przykładzie:

- **2-** w pierwszej kolumnie; należy wpisać cyfry, które po odjęciu od siebie dadzą wynik 2 (musimy pamiętać o tym że w tym diagramie możemy użyć tylko cyfr od 1 do 3) więc są to cyfry „ 3 – 1 = 2 ‘’.
- **2 x** wynik mnożenia 2 dają jedynie cyfry 2 x 1.
- **3 +** wynik dodawania do 3 dają cyfry „ 3 + 0 ‘’ i „ 1+1+1’’ oraz „2 + 1 ‘’a ponieważ nie możemy użyć ani cyfry 0 ani trzech cyfr odpowiedzią będzie „2 + 1 ‘’.
- **3** oznacza to, że musimy tu po prostu wpisać liczbę 3
- **5 +** wynik dodawania do 5 (w tym diagramie) dają jedynie cyfry „2+3’’

Kolejny przykład rozwiązanego KenKen o większym stopniu trudności[22]:



[22] *„Mind Games Sharpen your focus and boost your brain power “ edition published in 2021 By SpiceBox TM.*

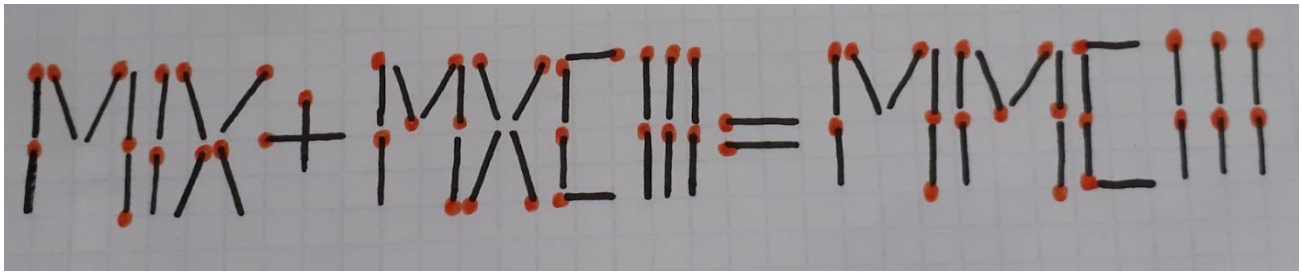
2.8. Zadania z zapałkami

Jednymi z popularniejszych rodzajów zagadek zapałczanych są **łamigłówki**, które polegają na tym, że mamy podane błędne równanie ułożone z zapałek i należy przełożyć tylko jedną z nich, aby powstało zupełnie nowe, prawdziwe równanie. To są właśnie łamigłówki z zapałkami. Tego typu zadania rozwijają umiejętność logicznego myślenia.

Przed wymyśleniem równań z zapałkami chciałyśmy stworzyć równanie, które da się zapisać rzymskimi oraz arabskimi cyframi.

W dwóch poniższych przykładach należy zmienić położenie jednej zapałki tak, aby równania były prawdziwe.

1) **Wersja z cyframi rzymskimi:**

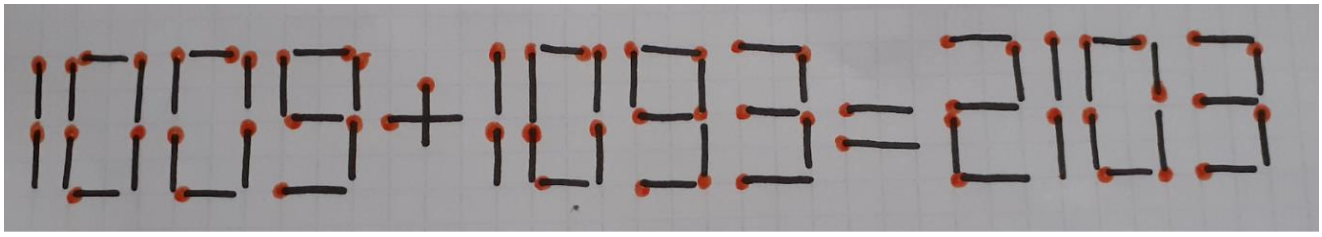


Rozwiązanie powyższego przykładu:

W tym równaniu należy przestawić górną zapałkę z liczby **„ C “** po lewej stronie równania i położyć ją równolegle do cyfry **l** zmieniając ją w ten sposób w cyfrę rzymską **L.**

2) **Wersja z cyframi arabskimi:**

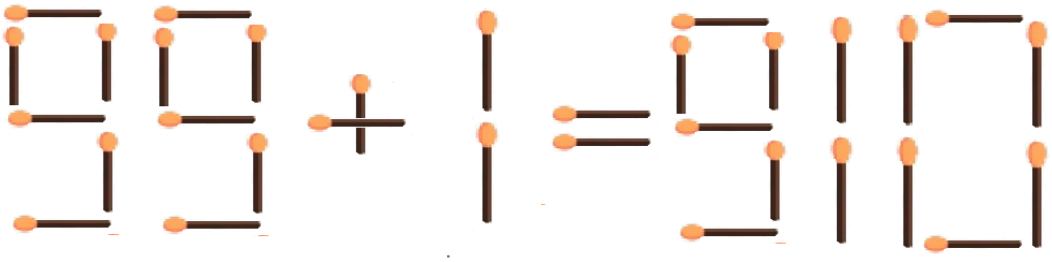
Ten sam przykład zapisujemy za pomocą cyfr arabskich.



Rozwiązanie powyższego przykładu:

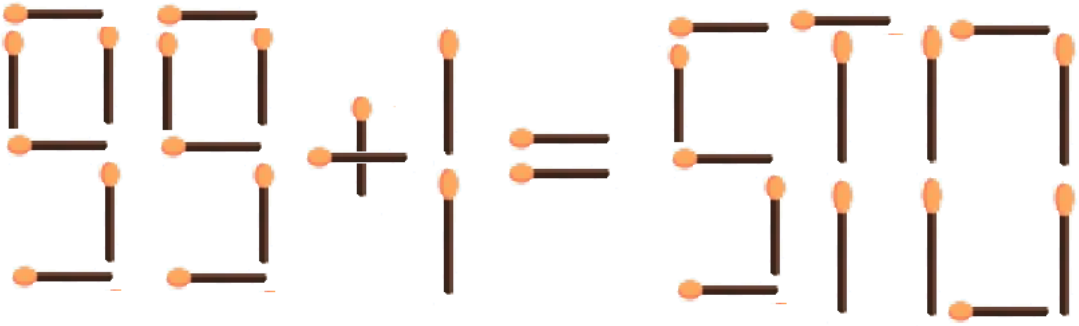
Rozwiązanie tego równania polega na przestawieniu **dolnej zapałki cyfry 3** po lewej stronie równania tak, aby powstała z niej cyfra **2.**

Poniżej przedstawiamy jeszcze jeden podchwytliwy przykład[23]. Nie jest on naszego autorstwa, ale bardzo nam się spodobał. Zasada rozwiązania tego przykłada jest taka sama jak w poprzednich równaniach - trzeba przestawić jedną zapałkę, aby równanie było prawdziwe.



Rozwiązanie powyższego przykładu:

W rozwiązaniu tego przykładu warto skupić się na słowie “logiczny”, gdyż przedstawienie tego równania za pomocą cyfr jest niemożliwe. Aby równanie to było prawdziwe i logiczne usuwamy zapałkę z **cyfry 9** i dajemy ją prostopadle nad cyfrę **1** i otrzymujemy nie cyfrę a słowo **STO**.

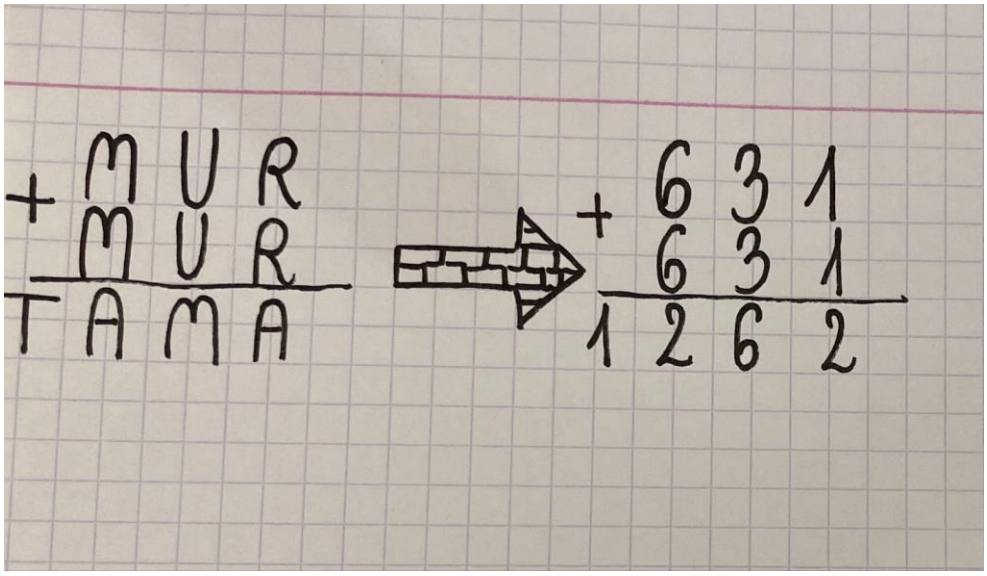


[23] *https://www.goldenline.pl/grupy/Pozostale/zagadki-logiczne/zapalki,2069232/*

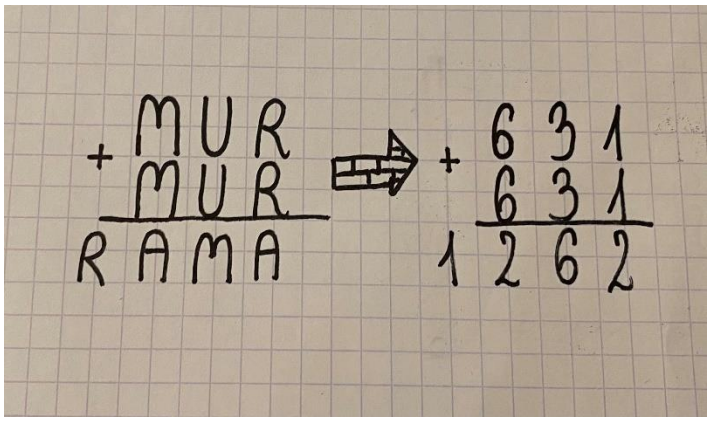
3. Tworzymy własny alfametyk

Rozwiązywanie alfametyków wymaga nie tylko umiejętności logicznego myślenia, ale również wiele cierpliwości i zapału. Przekonałyśmy się o tym same. Postanowiłyśmy stworzyć swój własny alfametyk.

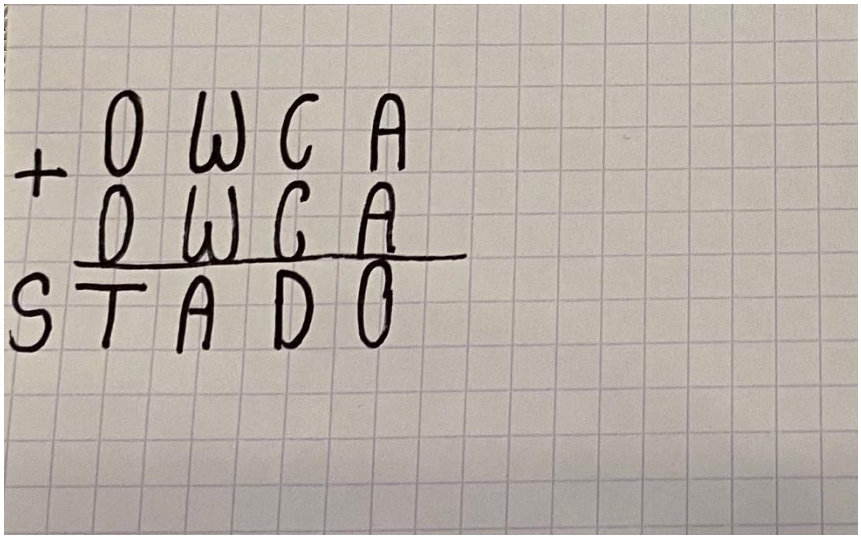
Po wielu próbach i błędach myślałyśmy, że osiągnęłyśmy sukces (zdjęcie poniżej):



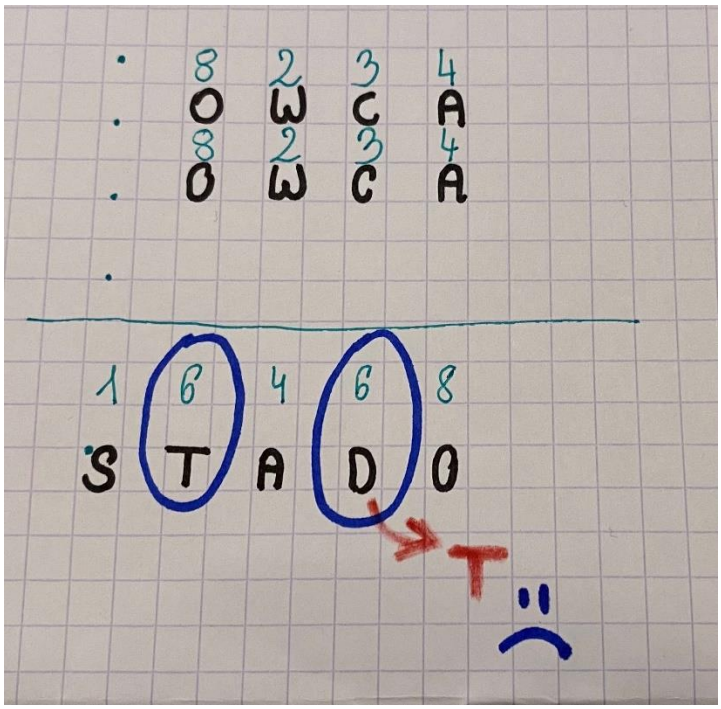
Patrząc jednak na nasze rozwiązanie znalazłyśmy błąd - cyfra **1** przypisana jest zarówno literze **R**, jak i **T**, co jest niestety sprzeczne z definicją alfametyku. Nasz przykład jednak łatwo było poprawić tak, aby rozwiązanie było poprawne:



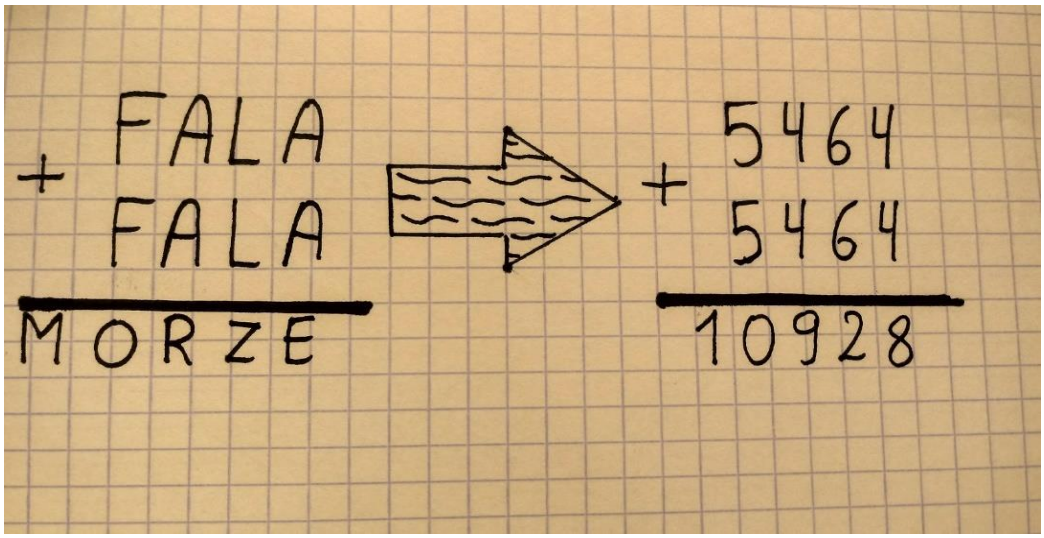
Próbowałyśmy jeszcze na innym przykładzie. Wcale to nie jest takie łatwe. Wydawało nam się, że jesteśmy blisko sukcesu tworząc następujące “równanie”:

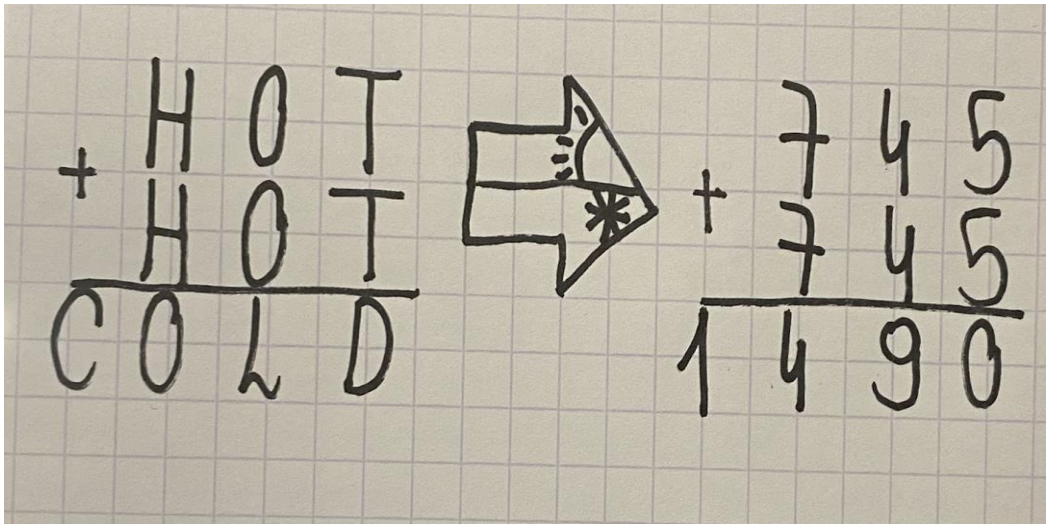


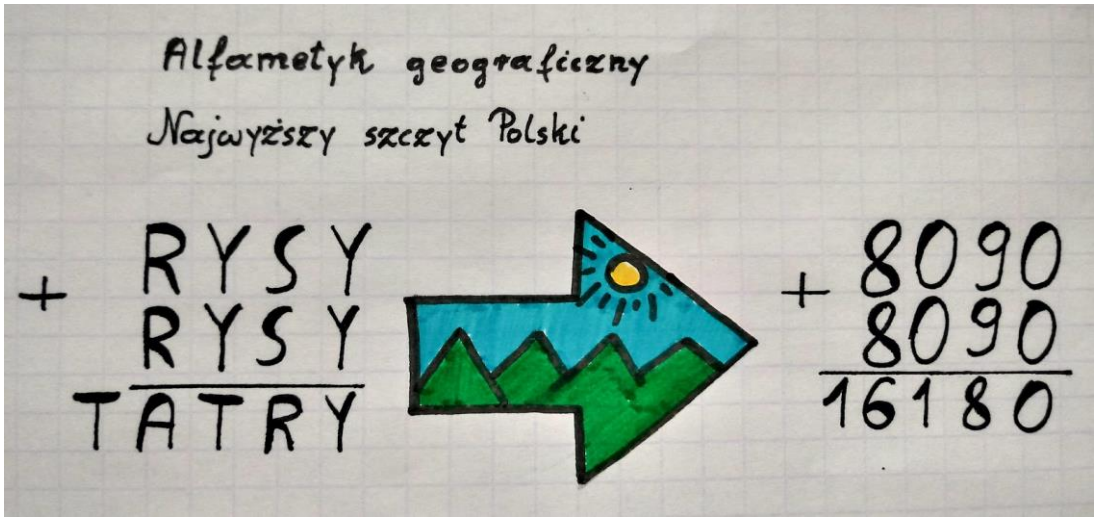
Próbując podstawiać cyfry okazało się, że aby równanie było poprawne musiałybyśmy popełnić błąd ortograficzny i zamiast litery “**D**” użyć **“T”,** szkoda, bo pomysł z owcami bardzo nam się podobał.



Podczas tworzenia alfametyków w środku zimy pomyślałyśmy o wakacjach, z którymi kojarzy nam się morze z falami. Miłe skojarzenia pozwoliły wymyślić wakacyjny Alfametyk :).







4. Twierdzenia błędne - sofizmaty. Czy to sofizmat czy paradoks?

Na podstawie słownika PWN, **sofizmat**[24] (z gr. σόφισμα *sóphisma* – wybieg, wykręt), czyli sztuka „wykręcania kota ogonem”, to :

1. zwodniczy „dowód” matematyczny, pozornie poprawny, lecz faktycznie błędny, zawierający rozmyślnie wprowadzony błąd logiczny, trudny do wykrycia na pierwszy rzut oka;
2. wypowiedź lub sformułowanie, w którym świadomie został ukryty błąd rozumowania nadający pozory prawdy fałszywym twierdzeniom;
3. wszelka próba dowiedzenia swoich racji, bez względu na poprawność logiczną przedstawionej argumentacji.

Sofizmat prowadzi na ogół do fałszywej tezy, wykorzystując rozumowanie, które choć pozornie wydaje się prawdziwe, w rzeczywistości zawiera błąd i ma na celu oszukanie słuchacza.

Sofizmat często bywa mylony z **paradoksem**, choć są one wyrazami o przeciwnym znaczeniu. Różnica polega na tym, że paradoks to stwierdzenie prowadzące do zaskakujących lub sprzecznych wniosków.

Wybitni sofiści w starożytnej Grecjii nazywani byli nauczycielami mądrości trudniących się nauczaniem różnych sztuk i nauk takich jak : gramatyka , retoryka , matematyka , fizyka. Do wybitnych sofistów działających w V w. p.n.e **zaliczamy Protagorasa, Hippiasza, Gorgiasza i Prodikosa**. Byli on wielkimi myślicielami, którzy w dużym stopniu zwracali uwagę na rolę słów w swoich dyskusjach i argumentacjii. O Protagorasie współcześni mu mawiali, że jest człowiekiem, który umie poprawnie używać słów. Prodikos z kolei zasłynął jako badacz synonimów i homonimów. Ich późniejsi naśladowcy nie poszli jednak ich śladami i w miejsce rzetelnych badań nad językiem zaczęli się zajmować sztuką żonglowania słowami, mającą na celu przekonanie, za wszelką cenę, nawet kosztem logiki i zdrowego rozsądku, słuszności bronionej, często absurdalnej tezy. Stąd właśnie wzięło się negatywne określenie sofistyki jako posługiwania się fałszywymi argumentami celem udowodnienia nieprawdy, To negatywne określenie sofistyki pociągnęło za sobą stosowanie nazwy "sofizmat".

---

[24] *W.Doroszewski, „Słownik Języka Polskiego PAN”, wyd PWN*

Poniżej przedstawiamy przykład słownego sofizmatu [25], aby choć trochę zrozumieć o co w tym wszystkim chodzi.

Czy ryby mają rogi? Każdy powie od razu, że nie mają.

A czy ten, który tak odpowiedział, ma rogi? Oczywiście nie ma.

Stąd prosty i narzucający się wniosek - jest on rybą.

Musimy pamiętać, że sofizmat to pokrętne rozumowanie, w którym celowo ukryty jest błąd logiczny. Według tego sofizmatu, jeżeli ryba nie ma rogów i ten, który tak odpowiedział także nie ma rogów oznacza to, że jest on rybą. Oczywiście jest to nieprawda. To, że oboje nie mają rogów nie oznacza, że oboje są rybami. Sofizmaty mają nas właśnie wprowadzić w taki właśnie błąd, który wydaje się (według tego rozumowania) prawidłowy. Tak naprawdę jest niepoprawny.

Nie wszystkie rozumowania, które z pozoru wyglądają na poprawne, takie właśnie są. Sofizmaty każą wyostrzyć myślenie i umiejętność logicznego rozumowania. Warto pamiętać o tym, że istnieje coś takiego i uczyć się, jak znajdować ukryte tam błędy.

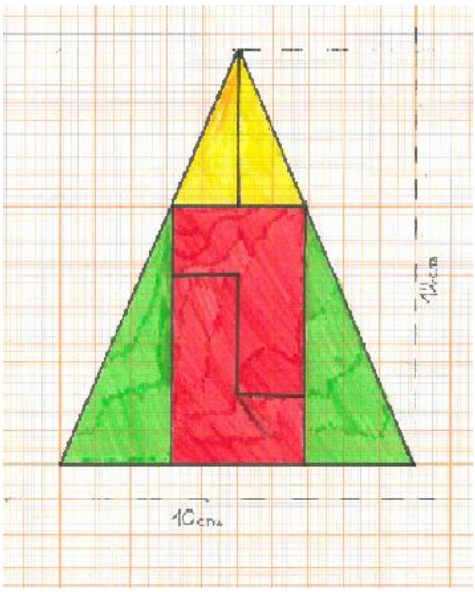
Po krótkim wprowadzeniu w świat sofizmatów przechodzimy do sofizmatów matematycznych. Poniżej przedstawimy kilka przykładów takich zadań.

4.1. Sofizmaty geometryczne

Sofizmat geometryczny „60 = 58 = 59” : Sofizmat ten został wymyślony przez L.Vosburgh Lyons . Na czym on polega?

Rysujemy trójkąt równoramienny o podstawie 10 cm oraz wysokości 12 cm. Dzielimy go na sześć części (tak jak na poniższym rysunku). Obliczamy pole powierzchni tego trójkąta, które równe jest sumie pól wszystkich jego części:

[25] *https://www.polskieradio.pl/10/3951/Artykul/1577989,Sofizmaty-Dlaczego-wszyscy-jestesmy-rybami*



Obliczamy pole powierzchni

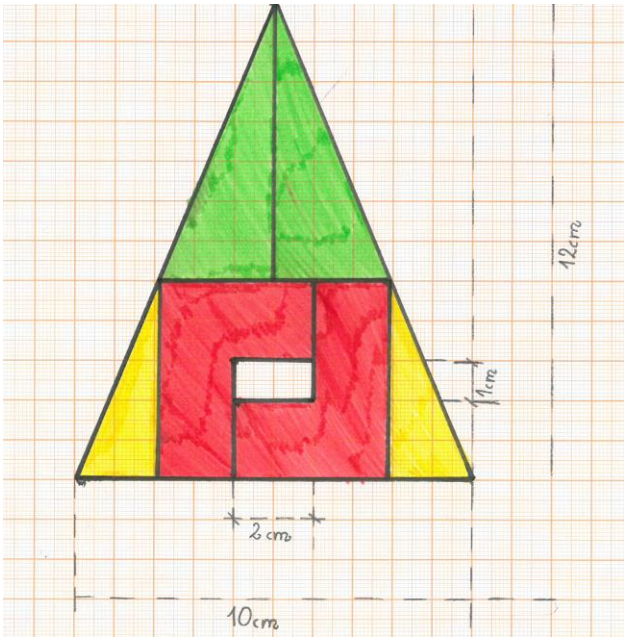
$$P = \frac{1}{2}\ x\ podstawa\ x\ wysokość$$

$$P = \frac{1}{2}\ x\ 10\ cm\ x\ 12\ cm$$

$$P = 60cm^2$$

Pole tego trójkąta wynosi 60 cm^2.

Interesujące jest to, że z tych sześciu figur możemy zbudować trójkąt o takich samych wymiarach, co powinno wskazać, że pole powierzchni powinno wynosić tyle samo, co w pierwszym przypadku, czyli 60 cm^2. Jednak po zbudowaniu tego trójkąta w środku pozostaje pusta przestrzeń w kształcie prostokąta.



Obliczamy pole powierzchni

P trójkąta = 60 cm^2

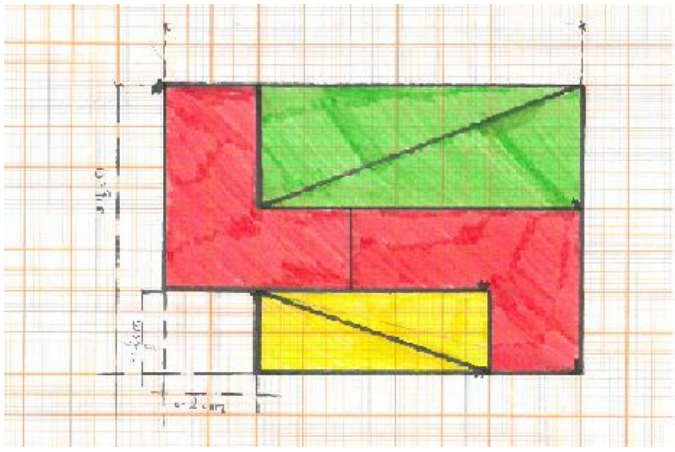
Jednak od tej powierzchni musimy odjąć pole prostokąta, które powstało w środku trójkąta.

P = 1 cm x 2 cm

P= 2 cm^2

I tak oto pole nowego trójkąta o tych samych wymiarach zbudowanego z tych samych figur jest równe **58 cm^2!**

Na tym jednak nie koniec budowania. Okazuje się, że z tych samych części można zbudować kolejną figurę. Tak jak w poprzednich przykładach obliczymy jej pole powierzchni.



Obliczamy pole powierzchni powstałej figury :

P prostokąta = a • b

P = 7 cm • 9 cm

P = 63 cm^2

Od tego pola musimy odjąć pole białego kwadratu, które wynosi:

P= 2 cm • 2 cm = 4 cm^2

Obliczamy pole powierzchni powstałej figury :

Powierzchnia nowej figury utworzonej z tych samych figur, co w dwóch poprzednich przykładach równa się **59 cm^2.**

Wyjaśnienie:

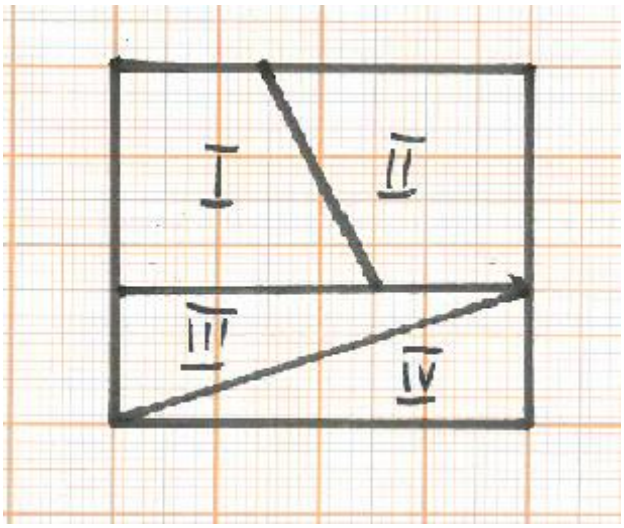
Pierwszy rysunek sugeruje, że trójkąt składa się z dwóch wielokątów w kształcie litery L (o całkowitych długościach wszystkich boków), dwóch większych trójkątów prostokątnych 3×7 oraz dwóch mniejszych trójkątów prostokątnych 2×5. Tak naprawdę jednak, większe trójkąty prostokątne musiałyby mieć wysokość 7,2 cm, a mniejsze „trójkąty" – być trapezami o bardzo małej górnej podstawie (lub należałoby powiększyć nieco figury w kształcie litery L). Analogiczny błąd można popełnić patrząc na drugi rysunek. Jeśli brzegi figur narysuje się grubą linią lub wytnie się je niestarannie, można nie zauważyć niewielkich niedokładności, które jednak razem dają nawet centymetrowe błędy przy wyliczaniu pola powierzchni[26.]

[26] *http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/6ct.htm -----> zadanie z trójkątem*

Sofizmat geometryczny „65 = 64 = 63”

Rysujemy kwadrat o dowolnej wielkości i dzielimy jego boki na 8 jednakowych odcinków oraz cały kwadrat na cztery części jak na rysunku.

Rysunek 1



Kwadrat zawiera w sobie 64 małe kwadraty (jego pole wynosi 64).

Obliczmy pola poszczególnych części.

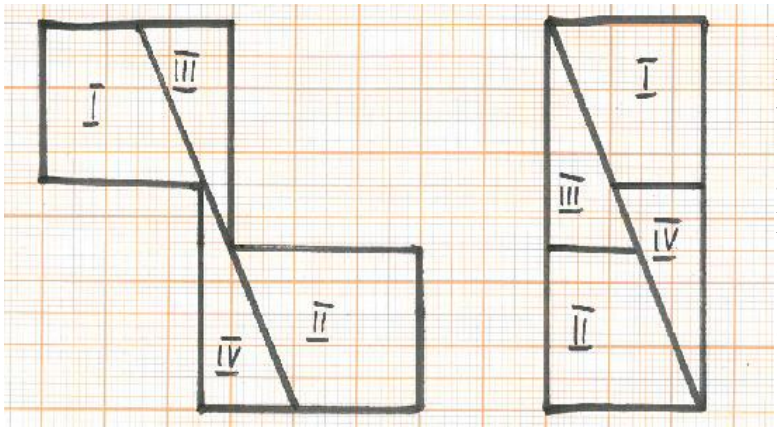
$$P_I = \frac{(3+5)\cdot 5}{2} = \frac{8\cdot 5}{2} = 20$$

$$P_I = P_{II}$$

$$P_{III} = \frac{3\cdot 8}{2} = 12 = P_{IV}$$

Z powstałych części jeżeli je odpowiednio przełożymy otrzymamy następujący wielokąt oraz prostokąt:

Rysunek 2, 3



Można by przypuszczać, że obydwie figury (jako złożone z tych samych trójkątów i trapezów) powinny mieć jednakowe pole, które ponadto jest równe 64 – jako pole naszego wyjściowego kwadratu.

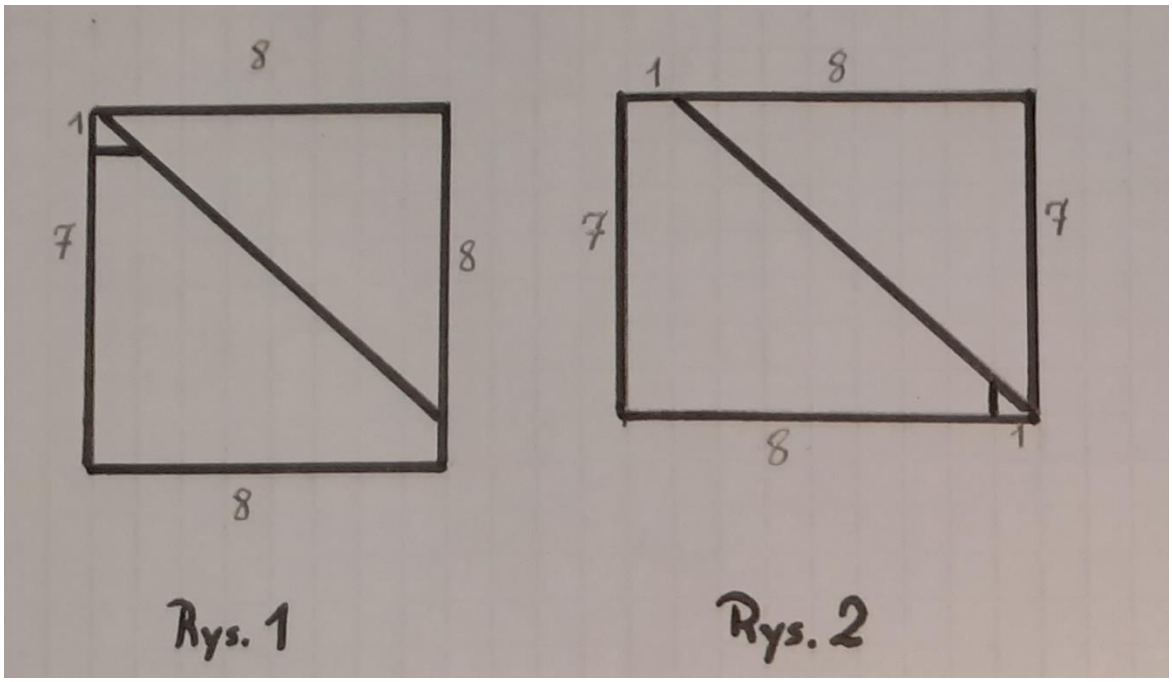
Jak łatwo jednak sprawdzić, ilość małych kwadracików będzie w wielokącie wynosiła 63, a w prostokącie 65

Czyli otrzymałyśmy sofizmat, że **65 = 64 = 63!**

A to nie koniec dowodów. Okazuje się że równość 64 = 63 można przedstawić jeszcze inaczej.

Bierzemy na początku ten sam kwadrat co na początku i dzielimy go jak na rysunku poniżej

Wykonujemy ruchy - zsuwamy część górną (po prawej stronie) do podstawy, a mały powstały z lewej strony trójkąt przenosimy na dół na prawą stronę.

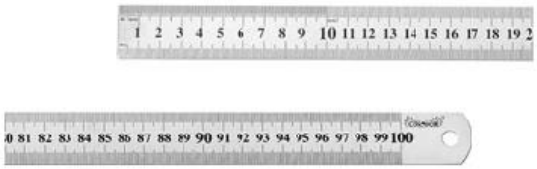


Po wykonanych ruchach z kwadratu liczącego 64 kwadraciki otrzymujemy prostokąt składający się z 63 małych kwadratów.

A więc 64 = 63.

Na czym polega błąd w powyższych sofizmatach geometrycznych łatwo pozna ten kto posiada:

grafion **dobry liniał** **ekierkę**

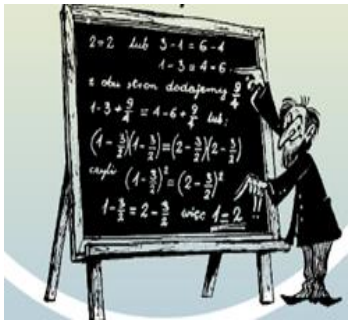


4.2. Sofizmaty algebraiczne

Przykład 1

Czy 1 = 2 ??!!! Po dotychczasowej edukacji matematycznej wydaje się to nieprawdą i ciężko się z tym pogodzić. A może to jednak prawda? Zobaczmy.

1 = 2



Oto "dowód", że 1 = 2:

2 = 2

Tą sama równość zapisujemy jako równanie:

3 - 1 = 6 - 4

Jest to prawda nie można temu zaprzeczyć.

Następnie równanie to mnożymy przez -1 co również nic nie zmienia w poprawności tego równania i jest ono dla nas oczywiste :

1 – 3 = 4 - 6

Następnie do obu stron równania dodajemy te same liczby np. kochane ułamki $\frac{9}{4}$.

$1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4}$

Po tym działaniu okazuje się, że zarówno prawa jak i lewa strona równania stanowią kwadraty dwóch różnic:

$(1 - \frac{3}{2})^2 = (2 - \frac{3}{2})^2$

Kolejnym krokiem jest wyciągnięcie pierwiastka drugiego stopnia, po którym nasze równanie wygląda w następujący sposób:

$1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$

Ostatni etap tego równania to dodanie do obu stron liczby $\frac{3}{2}$ - co jest zupełnie prawidłowe.

Otrzymujemy wówczas rozwiązanie równania, które ukazuje nam że:

1 = 2

Rozwiązanie:

To, że $(1 - \frac{3}{2})^2 = (2 - \frac{3}{2})^2$ nie oznacza, że $1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$,

ponieważ $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, a $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

choć ich kwadraty są sobie równe . **Zapominamy o tym, że kwadraty liczb ujemnych są dodatnie, podobnie jak kwadraty liczb dodatnich.**

Przykład 2

Czy jest możliwe by 1 złoty = 1 grosz???

1 zł = 100 gr

1 zł = 10gr • 10 gr

1 zł = 0,1 zł • 0,1 zł

1 zł = 0,01 zł

1 zł = 1 gr

Wyjaśnienie :

1 zł = 10 •10 gr, a nie jak przyjęto 10 gr • 10 gr. Co prawda liczby się zgadzają, ale miana jednostki już nie.

5. Paradoks matematyczny

Słowo "**paradoks**" pochodzi z języka greckiego - παράδοξος parádoxos - oznacza „nieoczekiwany, nieprawdopodobny, zadziwiający", a definicje hasła brzmią w następujący sposób:

"1. «twierdzenie zaskakująco sprzeczne z przyjętym powszechnie mniemaniem sytuacja pozornie niemożliwa, w której współistnieją dwa całkowicie różne lub wykluczające się fakty»

2. «rozumowanie pozornie oczywiste, ale wskutek zawartego w nim błędu prowadzące do wniosków jawnie sprzecznych ze sobą lub z uprzednio przyjętymi założeniami»[27] "

Pojęcie paradoksu w książce "*Badanie bezkresu*" zdefiniowane jest jako wyjście w rozumowaniu od pewnej przesłanki i zmierzanie do sprzecznych wniosków, poddając w wątpliwość wyjściową przesłankę [28].

Jak to się zatem stało, że funkcjonuje w matematyce? Jak w matematyce mogą istnieć wykluczające się fakty i sposób argumentacji sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem?

Przyjrzałyśmy się kilku paradoksom matematycznym i temat nas bardzo zaintrygował.

"Scheda Araba" to jedna z najstarszych zagadek, najprawdopodobniej pochodzenia arabskiego, nieznanego autora, zamieszczona ze wspomnianej już wcześniej książce Lilavati S. Jeleńskiego, wydaje nam się paradoksem.

Arab pozostawił 3 synom do podziału stado wielbłądów. Najstarszy miał otrzymać połowę, średni syn ⅓, a najmłodszy 1/9 część stada. Stado liczyło 17 sztuk. Synowie zwrócili się o pomoc do sędziego, który zapożyczył jednego wielbłąda i podzielił. Starszy dostał 9 sztuk, średni 6, a najmłodszy 2, a pożyczonego zwierzaka oddano właścicielowi. Co ciekawe każde z dzieci dostało więcej niż wyznaczył ojciec. jeden o ½ zwierzęcia więcej, drugi o ⅓ , a trzeci o 1/9 wielbłąda.

Czyżby rachunek matematyczny się zgadzał mimo, że spadkobiercy otrzymali więcej niż zakładał testament?

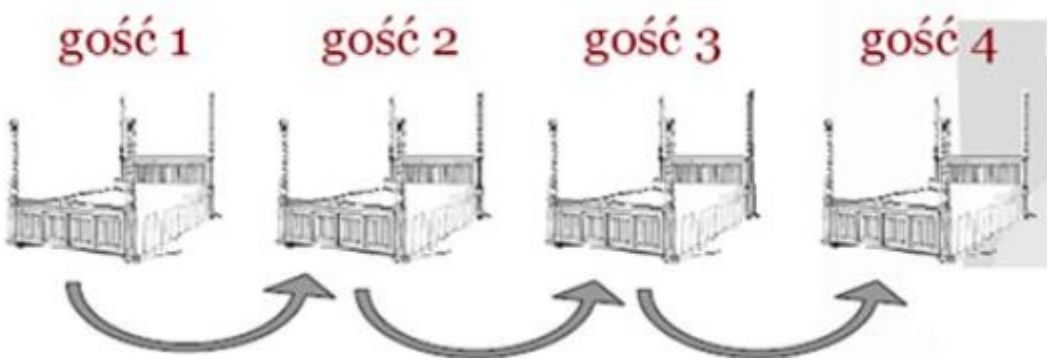
[27] *https://sjp.pwn.pl/sjp/paradoks;2570587*

[28] *Gracián E. (2012) "Badanie bezkresu Nieskończoność w matematyce" RBA*

Jednym z lepiej znanych paradoksów jest paradoks **Grand Hotelu** zwany również paradoksem **hotelu Hilberta**, od nazwiska niemieckiego matematyka Davida Hilberta (1862-1943), który go zdefiniował, aby pokazać jaki problem kryje się za bezwiednym rozumieniem zbiorów z nieskończoną ilością elementów.

A oto opis paradoksu z nieskończoną ilością hotelowych pokoi:

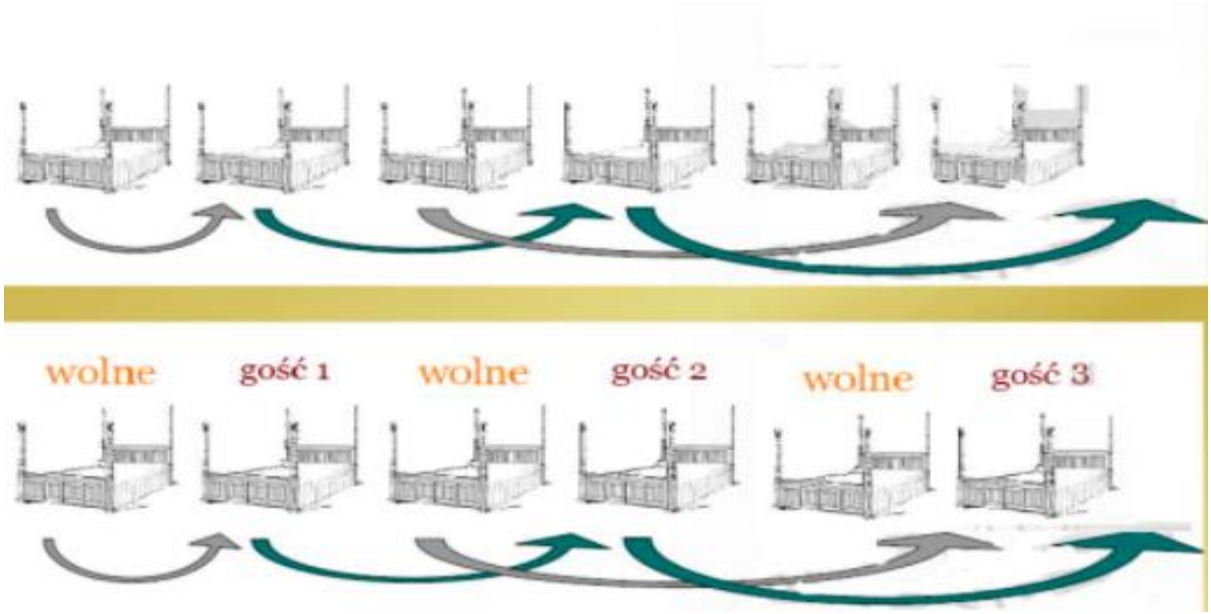
„Wyobraźmy sobie, że jesteśmy portierem w Grand Hotelu, w którym jest nieskończona liczba pokoi. Wszystkie pokoje są już zajęte, gdy przychodzi do nas kolejny klient chcący wynająć pokój. Wydawałoby się, że sytuacja jest bez wyjścia i musimy klienta odprawić z kwitkiem. Na szczęście nasz hotel ma nieskończoną liczbę pokoi, więc możemy wykonać sprytny trik: klienta z pokoju numer 1 przekwaterujemy do pokoju nr 2, tego z pokoju nr 2 do pokoju nr 3,itd [29]



Ogólnie można powiedzieć, że dokonujemy przekwaterowania klientów z pokojów n do pokojów n+1. W ten sposób wszyscy nasi wcześniejsi klienci mają, gdzie mieszkać, a my mamy wolny pokój nr 1, do którego możemy zakwaterować naszego nowego gościa.

Tak więc, mimo że hotel był znalazło się miejsce dla nowego klienta znalazło się miejsce dla nowego klienta.

[29] *https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Hilberta*



Będąc portierem w naszym nieskończonym hotelu mamy jeszcze więcej możliwości. Nawet jeśli przyjedzie do nas nieskończona (ale przeliczalna) liczba autobusów z nieskończoną (przeliczalną) liczbą klientów w każdym z nich, to nadal możemy ich wszystkich zakwaterować dokonując kolejnego, nieco bardziej złożonego triku z zamianami pokojów: najpierw trzeba opróżnić pokoje hotelowe z nieparzystym numerem poprzez chwilowe umieszczenie ich gości w np. autobusie nr 1. Klientów z autobusu nr 1 umieszczamy tymczasem w pokojach z numerami 3^n, gdzie **n** to np. numery miejsc w autobusie (wszystkie te pokoje będą nieparzyste, czyli już wcześniej opróżnione). Potem umieszczamy klientów z autobusu 2 w pokojach o numerach 5^n. Następny autobus pójdzie do pokojów 7^n.

Opisany tu paradoks nie jest sprzeczny z logiką, lecz tylko z intuicyjnym pojmowaniem liczby elementów w zbiorach nieskończonych[30].

Pokazuje on tylko, że moc przeliczalnych zbiorów nieskończonych jest zawsze jednakowa, nawet wtedy, gdy dany zbiór jest podzbiorem innego zbioru.

Paradoks Kawalera de Méré

Do zilustrowania tego paradoksu będziemy potrzebować 3 kostek do gry, którymi rzucamy kilkanaście razy. Notujemy, ile rzutów dało sumę oczek 11 a ile 12.

[30] *https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Hilberta*

Spróbujemy sprawdzić prawdopodobieństwo wypadnięcia sumy oczek 11 i 12 przy rzucie trzema kostkami.

Pozornie prawdopodobieństwo to powinno być takie samo, ponieważ mamy po sześć kombinacji dla sumy zarówno 11, jak i 12. Zobaczmy:

A.	11 =	1 + 4 + 6	B.	12 =	1 + 5 + 6
		1 + 5 + 5			2 + 4 + 6
		2 + 4 + 5			2 + 5 + 5
		2 + 3 + 6			3 + 3 + 6
		3 + 3 + 5			3 + 4 + 5
		4 + 3 + 4			4 + 4 + 4

Jest to jednak niewłaściwe rozumowanie, okazuje się, że rzucając kilkoma kostkami koniecznie należy je rozróżnić. Rezultatem rozróżniania kości, jest to, że następujące wyniki traktujemy jako różne: (1,5,6), (1,6,5), (5,1,6), (5,6,1), (6,1,5), (6,5,1).
Ponieważ uwzględniamy kolejność, to wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Istnieją trzy zestawy różnych cyfr spośród {1,2,3,4,5,6} dających nam w sumie liczbę 11 oraz 3 zestawy dwóch jednakowych cyfr i jednej innej.

- po 6 ustawień liczb 1, 4, 6; 2, 4, 5 oraz 2, 3, 6,
- po 3 ustawienia 1, 5, 5; 3, 4, 4 oraz 5, 3, 3.

Zatem $A = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 18 + 9 = 27$.

Jeśli chodzi o liczbę 12 sytuacja trochę się różni. Są trzy zestawy różnych cyfr, ale tylko 2 zestawy dwóch jednakowych i jednej innej. Ostatni zestaw składa się z trzech czwórek, zatem możliwość ustawienia jest tylko jedna

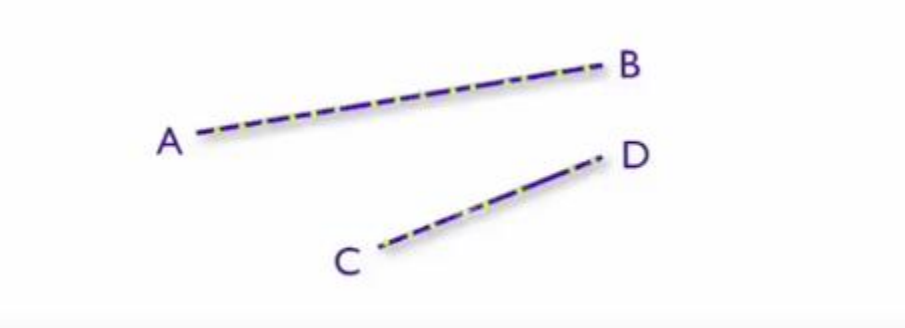
- po 6 ustawień liczb 1, 5, 6; 2, 4, 6 oraz 3, 4, 5,
- po 3 ustawienia 2, 5, 5 oraz 3, 3, 6,
- 1 ustawienie 4, 4, 4.

Stąd $B = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$.
Obliczając teraz prawdopodobieństwo obydwu zdarzeń otrzymujemy:

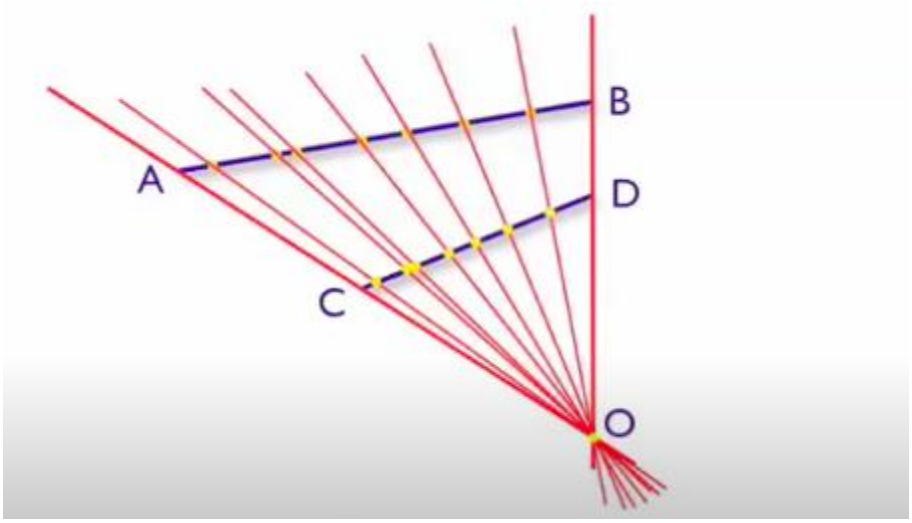
$P(A) = 27 : 216 = 0.125$
$P(B) = 25 : 216 \approx 0.116$

Z powyższych obliczeń wynika, że prawdopodobieństwo wypadnięcia sumy 11 jest większe niż prawdopodobieństwo wypadnięcia sumy 12, choć żeby dostrzec rzeczywiście różnice należałoby wykonać wiele tysięcy powtórzeń rzutów.

Teraz czas na paradoksy geometryczne i na pytanie - czy na dłuższym odcinku zmieści się więcej punktów niż na krótszym?



Okazuje się że nie. Aby to udowodnić łączymy końce obu odcinków wyznaczając punkt przecięcia, potem rysujemy proste przez punkt przecięcia, co pokazuje że każdy punkt na dłuższym odcinku ma odpowiednik na krótszym:

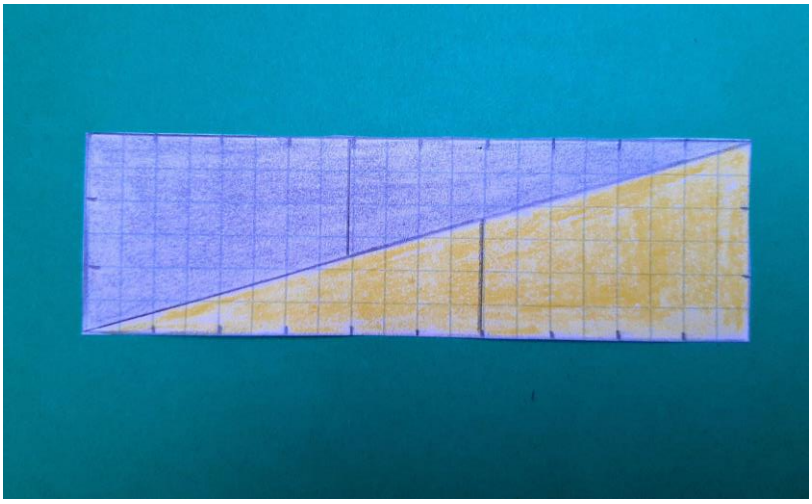


Paradoks Hoopera

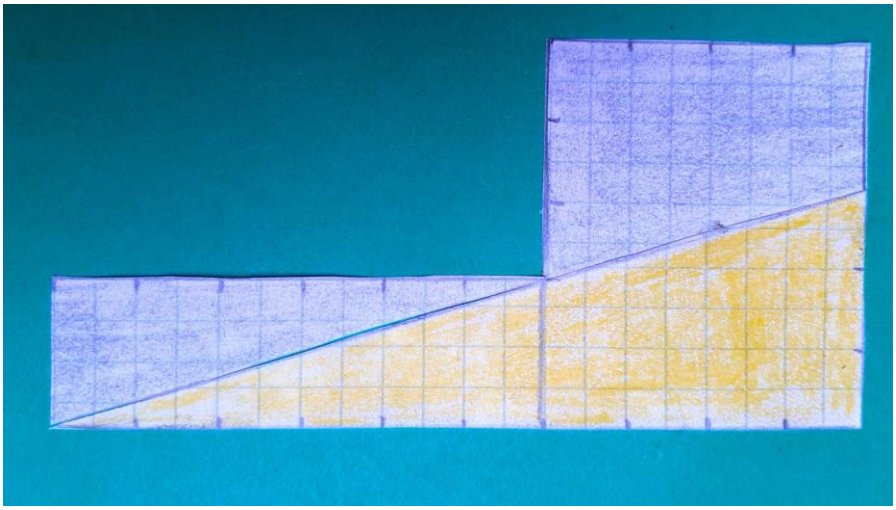
Kolejną ciekawostkę - zwaną paradoksem **Hoopera**, opublikowaną przez autora w 1774 roku, zilustrowałyśmy samodzielnie:

Prostokąt ma wymiary 10 jednostek na 3, co daje powierzchnię 30.

P = 10 x 3 = 30



Ale jego rozcięte kawałki wydają się tworzyć dwa inne prostokąty, o polach 12 i 20. Skąd pochodzą te dwie dodatkowe jednostki?

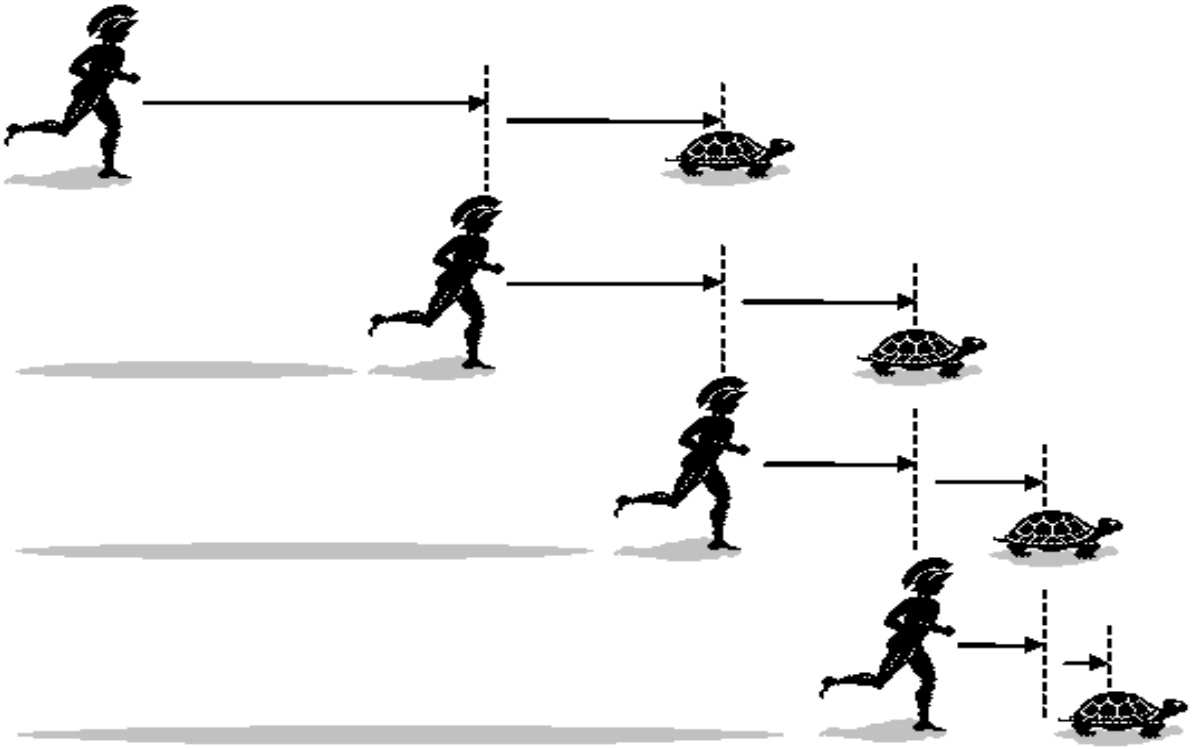


P = 6 x 2 + 4 x 5 = 32

Paradoks Hoopera to fałszywy paradoks oparty na złudzeniu optycznym.
Powierzchnia 30 jednostek kwadratowych została przekształcona w 32, dzięki przecięciu, zmianie proporcji figur i stopnia nachylenia przekątnej.
Dzięki takim "zabiegom" Paradoksowi Hoopera można nadać nieskończoną ilość form i zwiększyć lub zmniejszyć powierzchnię figury, im mniejsze różnice tym trudniej odkryć "oszustwo".

Paradoks Zenona z Elei

Starożytny filozof grecki Zenon z Elei jest autorem kilku zaskakujących teorii prowadzących do twierdzeń sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem, dotyczących ruchu. Najbardziej znanym jest wyścig Achillesa i żółwia



Achilles i żółw stają na linii startu wyścigu na dystansie 100 m. Załóżmy, że Achilles potrafi biegać dwa razy szybciej od żółwia. Aby dać szansę żółwiowi, jego start umieszczono w połowie dystansu. Gdy Achilles dobiegnie do miejsca, z którego startował żółw, żółw przepełznie 25 metrów.
Gdy Achilles przebędzie to 25 m, żółw przebędzie 12,5 m itd., więc Achilles nigdy nie dogoni żółwia[31] [32].

[31] *https://pl.puntomarinero.com/paradoxes-of-zeno-of-elea/*

[32] *Kowal S. (1989) "Przez rozrywkę do wiedzy Rozmaitości matematyczne*

Paradoks Zenona z Elei w nowej postaci

Ten starożytny przykład paradoksu w nowej postaci znalazłyśmy w Rozgrywkach matematycznych Lilavati Szczepana Jeleńskiego;

Punktualnie o północy lub w południe obie wskazówki zegara stoją ponad godziną 12.
W godzinę później wskazówka godzinowa stanie na liczbie 1, a minutowa będzie nad liczbą 12.
Gdy minutowa wskazówka dojdzie do liczby 1, godzinowa przesunie się naprzód o 5/12 podziałki minutowej; gdy minutowa wskazówka dojdzie już do tego punktu, wskazówka godzinowa znów przesunie się dalej - i tak można ciągnąć w nieskończoność.

Właściwie wskazówka minutowa , “zasadniczo” i “teoretycznie” nie powinna by wyprzedzić ani nawet dogonić wskazówki godzinowej!

W owym wyścigu wskazówek, podobnie jak w wyścigu Achillesa z żółwiem, rzecz polega na tym, że kolejne przesunięcia wskazówki minutowej dają szereg geometrycznych nieskończenie malejących’’.

Słowniczek[33]:

ciąg geometryczny (str. 8) - to ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego jest iloczynem wyrazu poprzedniego i pewnej stałej nazywanej ilorazem ciągu.

moc zbioru (str. 44) - (inaczej liczba kardynalna) uogólnienie pojęcia liczebności zbioru. Każdemu zbiorowi przypisana jest dokładnie jedna liczba kardynalna. Moc zbioru skończonego równa jest liczbie jego elementów, tak więc w przypadku zbiorów skończonych liczbami kardynalnymi są liczby naturalne. Jeśli chodzi o zbiory nieskończone, to moc zbioru określamy liczbami kardynalnymi nieskończonymi.

prawdopodobieństwo (str. 45) - (w uproszczonym znaczeniu) to szansa na wystąpienie jakiegoś zdarzenia, natomiast w matematycznej teorii prawdopodobieństwa, rodzina miar służących do opisu częstości lub pewności tego zdarzenia.

piktogram (str. 20) - znakiem rysunkowym, który służy do zapisu treści. Piktogramem jest np. znak drogowy, znak informacyjny i inne rodzaje tym podobnych znaków.

relacja (str. 10) - to wszelki związek lub zależność między elementami zbiorów, np. pokrewieństwo czy przyjaźń między ludźmi, posiadanie większego ciężaru lub wyższej temperatury między przedmiotami fizycznymi, mniejszość czy podzielność między liczbami, podobieństwo między figurami geometrycznymi itd.

spójność grafu (str. 12) - graf spełniający warunek, że dla każdej pary wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy. Graf nie posiadający powyższej własności to graf niespójny. Warunkiem koniecznym, by graf skierowany był spójny, jest spójność jego grafu podstawowego (tego samego grafu bez kierunków na krawędziach).

zbiór (str. 44) - jedno z podstawowych pojęć matematyki: zbiór jest pojęciem pierwotnym teorii mnogości. Przedmioty, z których składa się zbiór, nazywamy elementami tego zbioru (zbiory oznaczamy dużymi literami, a ich elementy małymi).

zbiór nieskończony (str. 44) - zbiór posiadający nieskończenie wiele elementów.

zdarzenie (str. 46) - to taka sytuacja, w której możemy zapytać „Co się stało?”.

[33] *L. Filist, A. Malina , A. Solecka : „Słownik Matematyczny” wyd. Europa, 2003 r.*

Bibliografia:

1. Doroszewski W. „Słownik Języka Polskiego PAN”, wyd PWN
2. Filist L., Malina A., Solecka A. : „Słownik Matematyczny” wyd. Europa, 2003 r.
3. Gracián E. (2012) “Badanie bezkresu Nieskończoność w matematyce” RBA
4. Jeleński S. (1954) “LILAVATI Rozrywki matematyczne”
5. Jordi Deulofeu (2012) “Dylematy więźniów i zwycięskie strategie. Teoria gier”
6. Kowal S. (1989) “Przez Rozrywkę do Wiedzy. Rozmaitości matematyczne.”
7. „Mind Games Sharpen your focus and boost your brain power “edition published in 2021 By SpiceBox TM.
8. Steinhaus H. (1989) Kalejdoskop matematyczny, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa
9. *https://logic.amu.edu.pl/images/3/30/Zls16x2013.pdf*
10. *https://penszko.blog.polityka.pl/2006/10/11/niewizytowki-willa/*
11. *https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/29014-stare-zadania*
12. *https://pl.wikipedia.org/wiki/Diofantos*
13. *http://blog2pir.blogspot.com/2014/02/ziarna-pszenicy-na-szachownicy.html*
14. *https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/29014-stare-zadania*
15. *http://math.uni.lodz.pl/~malfil/pliki/grafy_r3*
16. *https://betaandbit.github.io/KiedyTyWreszcie/indexGrafy.html*
17. *https://penszko.blog.polityka.pl/2014/08/28/wedlug-dudeneya/*
18. *https://bigosmatematyczny.pl/mfu2/*
19. *http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/gry_zagadki_paradoksy/2013/12/30/Kryptarytmy_czyli_arytmetyka_sl/*
20. *https://repozytorium.uph.edu.pl/bitstream/handle/11331/3080/Jurasinska.R.Matematyczne%20inspiracje%20w%20szaradziarstwie.pdf?sequence=1*
21. *https://pl.wikipedia.org/wiki/Trzęsienie_ziemi_w_Tōhoku*
22. *https://pl.wikipedia.org/wiki/Sudoku*
23. *https://docplayer.pl/48245593-X-mistrzostwa-polski-w-sudoku-instrukcje-22-luty-2015-r-kilka-waznych-informacji.html*
24. *https://www.goldenline.pl/grupy/Pozostale/zagadki-logiczne/zapalki,2069232/*
25. *https://www.polskieradio.pl/10/3951/Artykul/1577989,Sofizmaty-Dlaczego-wszyscy-jestesmy-rybami*

26. *http://www.ceti.pl/gralinski/archiwumfi/6ct.htm -----> zadanie z trójkątem*
27. *https://sjp.pwn.pl/sjp/paradoks;2570587*
28. *https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Hilberta*
29. *https://pl.puntomarinero.com/paradoxes-of-zeno-of-elea/*