MAŁOPOLSKI KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH

Metoda niezmienników

omówienie, przykłady zadań i ich rozwiązania

Autor: Kacper Madej
Szkoła: X Liceum Ogólnokształcące im. Komisji Edukacji Narodowej
Opiekun pracy: mgr Daniel Danieluk

Kraków 2022

Spis treści

Wprowadzenie 3

1 Szach mat! 4

2 Postaw wszystko na jedną kartę 15

3 Zadania olimpijskie 22

Klucz odpowiedzi 26

Bibliografia 28

Wprowadzenie

Korzystanie z metody niezmienników jest jednym z możliwych sposobów rozwiązywania olimpijskich zadań typu „Czy po odpowiednich zmianach, będąc w sytuacji A, jesteśmy w stanie dojść do sytuacji B?". W przypadku małych liczb zmian można oczywiście korzystać z metody prób i błędów poprzez badanie wszystkich możliwych przekształceń do momentu uzyskania pożądanego stanu. Problem występuje jednak podczas rozwiązywania zadań, w których liczba możliwych zmian jest duża. Wtedy rozpatrzenie wszystkich sposobów jest zbyt czasochłonne, a dodatkowo pojawia się ryzyko ominięcia któregoś z nich. Niezmienniki nie wymagają aż tak dużego nakładu czasu, a po odkryciu pewnej reguły można odpowiedzieć na pytanie zadane powyżej ze stuprocentową dokładnością.

Należy jednak mieć na uwadze to, że ta metoda nie jest wyłącznie zarezerwowana dla zadań pochodzących z olimpiady matematycznej. Aby przybliżyć to zagadnienie, ułatwić jego zrozumienie, przytoczę różne przykłady z życia, w których można je wykorzystać.

Rozdział 1

Szach mat!

Zaczniemy od tego, czym tak właściwie jest niezmiennik.

Definicja 1. (niezmiennik)

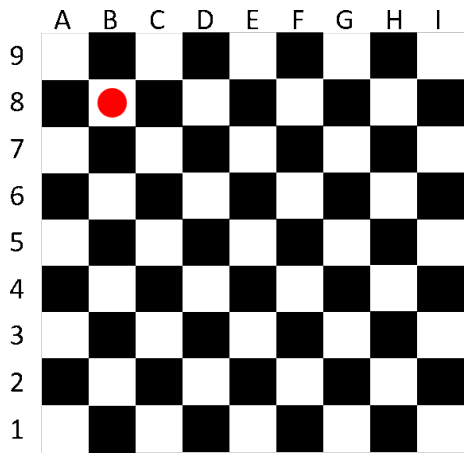
Niezmiennikiem nazywamy pewną własność charakteryzującą daną sytuację, nieulegającą zmianie pod wpływem różnych operacji.

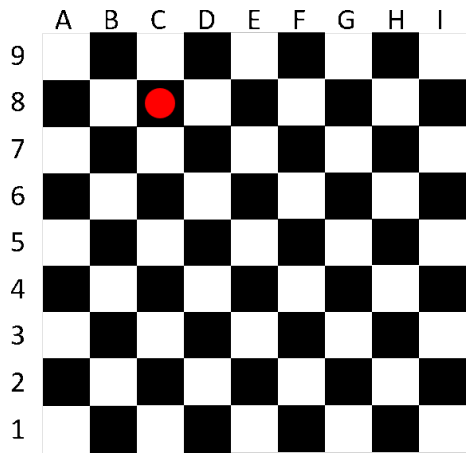
Na pierwszy rzut oka definicja może się wydawać mało zrozumiała. Dlatego najlepiej przedstawić, jak działa ona w praktyce.

Choć szachy nie należą do najłatwiejszych gier planszowych, z pewnością ułatwią pokazanie, w jaki sposób działają niezmienniki.

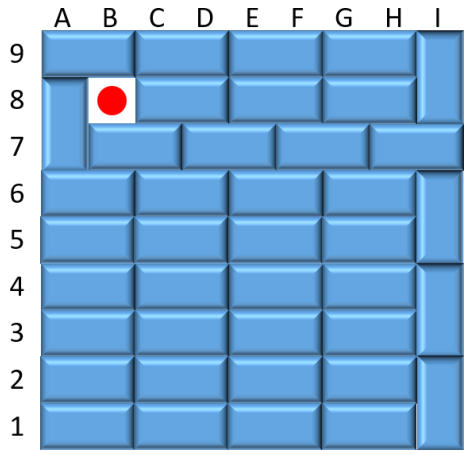
Zadanie 1. Adrian i Natalia grają wspólnie w pewną grę. Do dyspozycji mają po jednej szachownicy o wymiarach 9x9, po jednym czerwonym pionku i nieskończoną ilość klocków o wymiarach 1x2. Zasady polegają na umieszczeniu czerwonego pionka na takim polu, aby można było zapełnić całą resztę szachownicy klockami. Adrian umieszcza pionek na polu B8, Natalia zaś kładzie go na polu C8. Kto wygra tę grę?

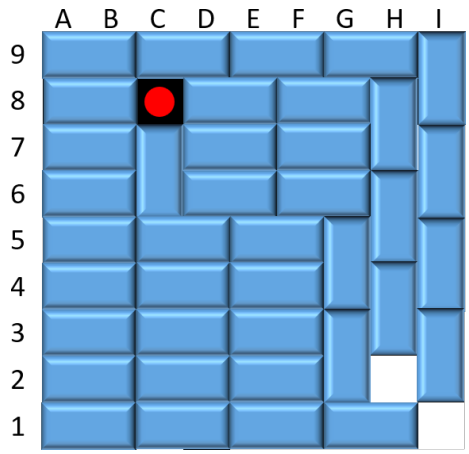
Rozwiązanie. Zacznijmy od graficznego przedstawienia obu przypadków.





Póki co, spróbujmy rozwiązać to zadanie metodą prób i błędów.





Już na tym etapie możemy zauważyć, że Adrian jest w stanie zapełnić szachownicę. Zwróćmy uwagę na to, jakiego koloru jest pole, na którym oboje postawili swoje pionki. Adrian umieścił go na polu białym, Natalia – na czarnym. Aby wypełnić całą szachownicę, każdy klocek zawsze musi zajmować jedno pole białe i jedno pole czarne. Dzięki tej obserwacji możemy wypowiedzieć pewne twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli mamy inną liczbę pól białych niż pól czarnych, nie jesteśmy w stanie wypełnić całej szachownicy o wymiarach $n \times n$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, klockami o wymiarach 1×2.

Niezmiennikiem jest różnica pól białych i pól czarnych. Jeżeli pól białych jest więcej niż czarnych, to po wypełnieniu szachownicy klockami 1×2 pól białych wciąż będzie więcej, ponieważ każdy dołożony klocek zajmuje jedno pole białe i jedno pole czarne.

W przypadku Adriana pól białych (z pominięciem pola, na którym jest czerwony pionek) jest 40, pól czarnych również jest 40. Nie spełnia to więc warunków twierdzenia, dzięki czemu pojawia się szansa na wypełnienie szachownicy.

W przypadku Natalii pól białych jest 41, pozostałych pól czarnych – 39. Warunki powyższego twierdzenia zostały spełnione, co oznacza, że nie wypełnimy szachownicy.

Odpowiedź: Tę grę wygra Adrian.

Korzystając z Twierdzenia 1., jesteśmy w stanie rozwiązać pozostałe cztery zadania ze strony 7.

Zadanie 2. Czy można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 8×8 klockami o wymiarach 1×2?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Liczba 64 jest podzielna przez 2.

Zadanie 3. Czy można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 5×5 klockami o wymiarach 1×2?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Spójrz na liczbę pól białych i na liczbę pól czarnych.

Zadanie 4. Czy po wycięciu jednego białego pola można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 7×7 klockami o wymiarach 1×2? Przyjmijmy, że pole A7 jest koloru białego.

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Wycięcie pola jest odpowiednikiem czerwonego pionka w Zadaniu 1.

Zadanie 5. Czy po wycięciu dwóch przeciwległych rogów można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 6×6 klockami o wymiarach 1×2? Przyjmijmy, że pole A6 jest koloru czarnego.

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

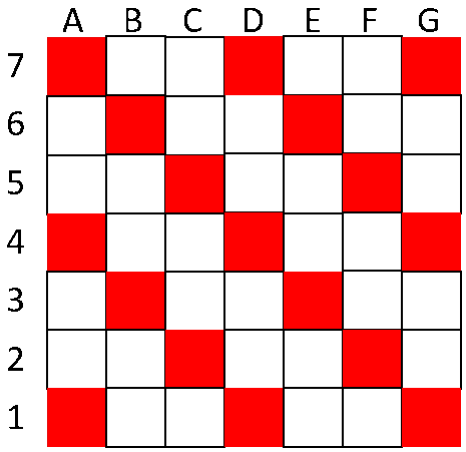
Wskazówka! Zwróć uwagę na to, jaki kolor ma pole F1.

Skoro wiemy już, jak rozwiązywać zadania z szachownicą i klockami o wymiarach 1×2, pójdźmy o krok dalej.

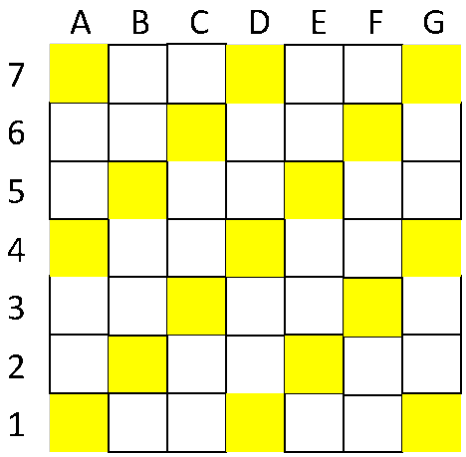
Zadanie 6. Robert jest architektem. Dostał zlecenie zbudowania placu, na którym znajduje się fontanna. Plac ma mieć rozmiar 7×7. Dodatkowo cały teren musi dookoła wypełnić płytami o wymiarach 1×3. W jakim miejscu Robert może zaplanować postawienie fontanny?

Rozwiązanie. W przypadku klocków 1×2, każdy z nich zajmował zarówno jedno białe, jak i jedno czarne pole. Niestety, gdy mamy do czynienia z płytami 1×3, standardowe kolorowanie szachownicy nie pomoże nam w rozwiązaniu zadania.

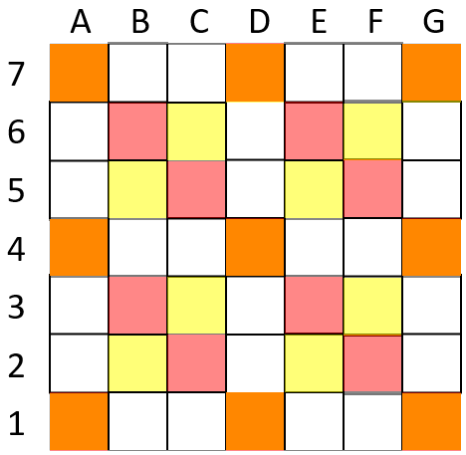
Każda płyta zajmuje dwa pola białe i jedno czarne lub dwa pola czarne i jedno białe. Potrzebna będzie inna metoda kolorowania, która będzie charakterystyczna dla wszystkich płyt.



Korzystając z takiego sposobu, każda płyta 1×3 zajmuje jedno pole czerwone i dwa pola białe. Warto jednak zwrócić uwagę, że nie jest to jedyny sposób pokolorowania szachownicy. Jeśli zastosujemy odbicie lustrzane, założenie będzie takie samo. Zróbmy to.

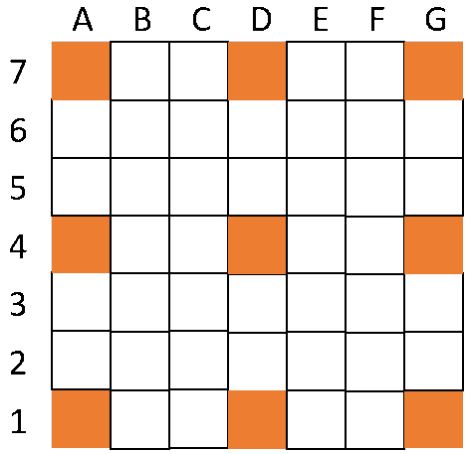


Możemy te dwa rysunki na siebie nałożyć.



Po zmieszaniu dwóch kolorów powstały pomarańczowe pola. Jeśli umieścimy fontannę w miejscu tych pól, na pewno uda nam się wypełnić cały teren wokół niej płytami o wymiarach 1×3.

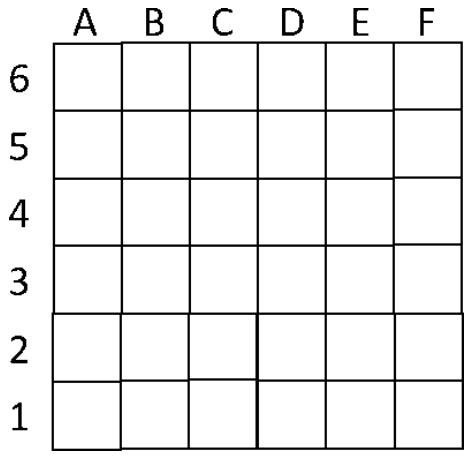
Odpowiedź: Stosując oznaczenia, które zostały przedstawione powyżej, Robert może zaplanować postawienie fontanny w polach oznaczonych kolorem pomarańczowym.



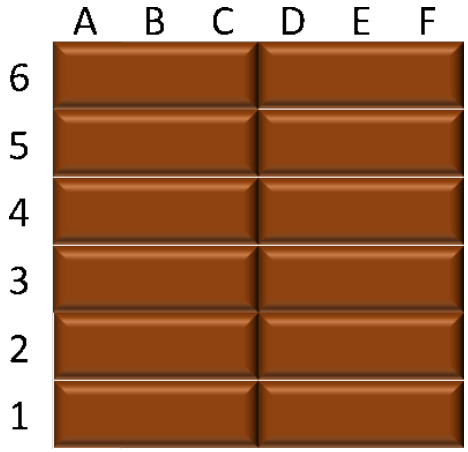
Liczba pól w zadaniu 6. po podzieleniu przez 3 daje resztę 1. Skoro wcześniej udało nam się ustalić, że w przypadku wypełniania klockami 1×2 całej szachownicy liczba pól musi być parzysta, sprawdźmy, czy analogicznie w przypadku wypełnienia płytami 1×3 liczba pól musi być podzielna przez 3.

Zadanie 7. Kartonowe pudełko ma wymiary 6×6. Czy jest możliwe, aby Kuba wypełnił całe to pudełko czekoladkami, które mają rozmiar 1×3?

Rozwiązanie. Na początku narysujmy schemat pudełka 6×6.



Teraz spróbujmy rozwiązać to zadanie metodą prób i błędów.



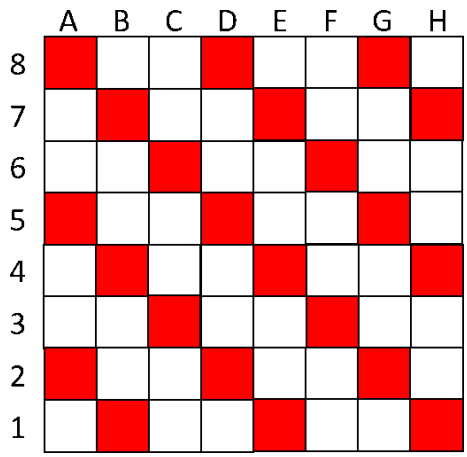
Jak można łatwo zauważyć, każdą planszę o liczbie pól podzielnych przez 3 uda nam się wypełnić klockami 1×3

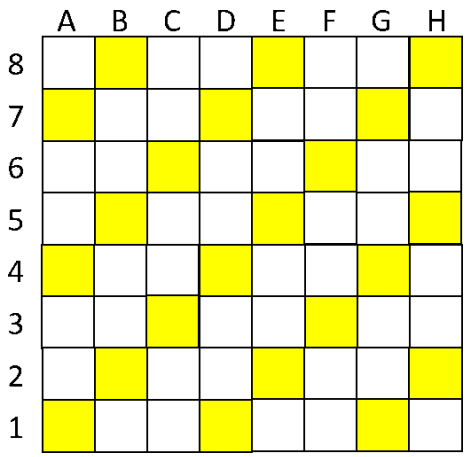
Odpowiedź: Tak, jest możliwe, aby Kuba wypełnił całe pudełko czekoladkami.

Sprawdziliśmy już, jak wypełnić klockami 1×3 plansze o liczbie pól zarówno podzielnych przez 3, jak i niepodzielnych, które przy dzieleniu dają resztę 1. Pozostaje więc jeszcze jedna sytuacja, gdy liczba pól planszy po podzieleniu przez 3 daje resztę 2. W takim razie rozwiążmy zadanie 8.

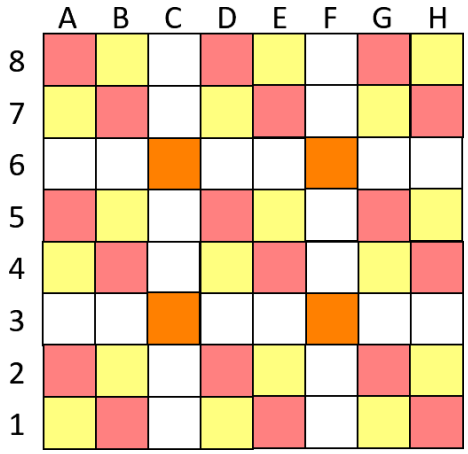
Zadanie 8. Justyna jest jubilerką. W swoim sklepie ma pewną szafkę o wymiarach 8×8 z przegródkami. Justyna wkłada do szafki jeden pierścionek zajmujący pole 1×1, resztę przegródek zapełnia łańcuszkami zajmującymi pole 1×3. Gdzie musi znajdować się przegródka, aby Justyna mogła zapełnić całą szafkę?

Rozwiązanie. Zastosujmy metody kolorowania pól, które wykorzystaliśmy wcześniej w zadaniu 6.



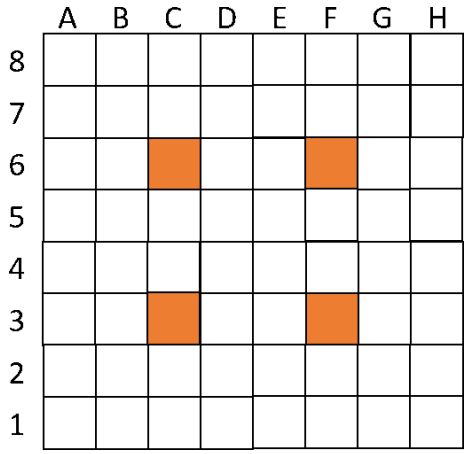


Nałóżmy je na siebie.



Po nałożeniu pól na siebie, powstały pola pomarańczowe. Umieszczając na jednym z tych pól pewną rzecz, mamy pewność, że przestrzeń dookoła możemy wypełnić klockami o wymiarach 1×3.

Odpowiedź: Stosując oznaczenia, które zostały przedstawione powyżej, przegródka musi znajdować się w polach oznaczonych kolorem pomarańczowym.



To wszystko prowadzi nas do trzech twierdzeń.

Twierdzenie 2.

Jeżeli szachownica ma wymiary $3n \times 3n$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, to można ją całą wypełnić klockami o wymiarach 1×3.

Twierdzenie 3.

Jeżeli szachownica ma wymiary $3n + 1 \times 3n + 1$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, i pominiemy jedno pole na pozycji $(3a + 1, 3b + 1)$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, to możemy wypełnić całą przestrzeń dookoła tego pola klockami o wymiarach 1×3.

Twierdzenie 4.

Jeżeli szachownica ma wymiary $3n + 2 \times 3n + 2$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, i pominiemy jedno pole na pozycji $(3a, 3b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, to możemy wypełnić całą przestrzeń dookoła tego pola klockami o wymiarach 1×3.

Mając tę wiedzę, możemy rozwiązać pozostałe zadania.

Zadanie 9. Czy można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 8×8 klockami o wymiarach 1×3?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! 64 nie jest podzielne przez 3.

Zadanie 10. Czy można wypełnić cały placyk o wymiarach 750×750 kostkami brukowymi o wymiarach 1×3?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Liczbę 750 można zapisać w formie $3n$.

Zadanie 11. Szachownica ma wymiary 4×4. Podaj wszystkie pola, na których mógłby zostać postawiony pionek tak, aby można było go otoczyć klockami 1×3.

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Zwróć uwagę na Twierdzenie 3.

Zadanie 12. Czy po wycięciu pola E3 można zapełnić całą szachownicę o wymiarach 11×11?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! „E" jest piątą literą w alfabecie.

Rozdział 2

Postaw wszystko na jedną kartę

Skoro wyczerpującą grę w szachy mamy już za sobą, czas na coś lżejszego, czyli gry barowe. Od teraz nie musimy liczyć wyłącznie na szczęście — dzięki niezmiennikom możemy przewidzieć przebieg gry i wygrać zakłady z naszymi przyjaciółmi.

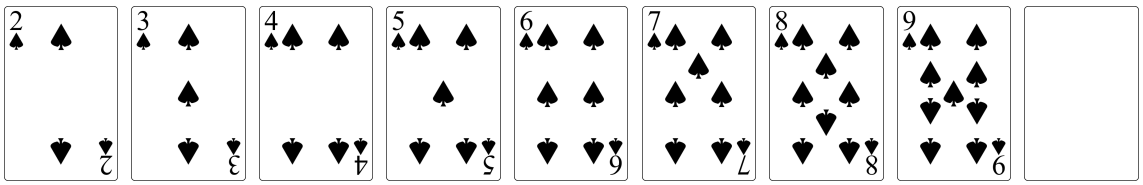
Bez zbędnego przedłużania, przejdźmy do zadania 1.

Zadanie 1. Damian i Marek grają razem w karty. Po jednej stronie karty znajdują się różne symbole, po drugiej — karta jest biała. Jest ich 9, wszystkie z nich są odwrócone białym kolorem do góry. Damian zakłada się z Markiem o to, że odwracając dwie karty jednocześnie, nie jest w stanie doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie karty są odwrócone symbolami do góry. Czy Damian wygra zakład?

Rozwiązanie. Zobrazujmy podany w zadaniu problem.

Każda z dziewięciu kart jest odwrócona białym kolorem do góry.

Odwróciliśmy dwie karty jednocześnie. Zróbmy to samo z pozostałymi.



Została nam jedna karta odwrócona białym kolorem do góry. Dzieje się tak samo w każdej próbie odwrócenia kart.

Zauważmy, że na początku liczba kart odwróconych symbolem do góry wynosiła 0. Wszystkich kart jest 9. 0 jest liczbą parzystą, 9 — nieparzystą. Nasze przekształcenia nie zmieniają parzystości. W związku z tym, po odwróceniu kart, z liczby 0 nie jesteśmy w stanie uzyskać liczby 9. Możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.

Jeżeli mamy możliwość zapisania liczby kart w postaci $2n+1$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, to po dowolnej liczbie jednoczesnych odwróceń dowolnych dwóch kart nie jesteśmy w stanie doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie karty są odwrócone na drugą stronę.

Odpowiedź: Damian wygra zakład.

Poznawszy już oba te twierdzenia, możemy rozwiązać pozostałe zadania.

Zadanie 2. Jedna strona karty jest czerwona, druga jest niebieska. Wszystkie 2021 kart są odwrócone czerwonym kolorem do góry. Czy po odwracaniu dwóch kart jednocześnie możemy doprowadzić do tego, aby wszystkie karty były odwrócone niebieskim kolorem do góry?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Czy liczbę kart można zapisać w postaci $2n + 1$?.

Zadanie 3. Liczba kart jest zapisana jako $2(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}_+$. Czy po jednoczesnych odwróceniach dwóch kart jest możliwość, aby wszystkie karty były odwrócone?

Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! Należy zwrócić uwagę na wzór zawarty w Twierdzeniu 5.

Zadanie 4. Mamy wyrażenie $2(a + 1) \leqslant 2$, przy czym $a \in \mathbb{R}$. Jeżeli liczba kart wynosiłaby tyle samo co wartość wyrażenia dla pewnego a, czy można po jednoczesnych odwróceniach dwóch kart odwrócić wszystkie karty?

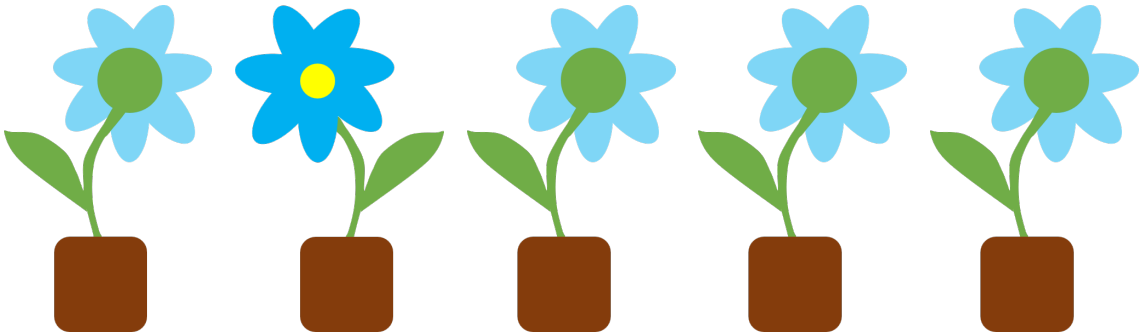
Rozwiązanie. Rozwiązanie zadania pozostawiam czytelnikowi (odpowiedź znajduje się w **Kluczu odpowiedzi**).

Wskazówka! W jakim zbiorze musiałaby się znajdować liczba a?

Poznaliśmy już sposób na to, czy uda nam się odwrócić wszystkie karty. Jak jednak wygląda rozwiązanie w przypadku, gdy jedna z tych kart jest już odwrócona na pożądaną przez nas stronę? Sprawdźmy to w zadaniu 5, w którym rolę kart przejęły rośliny.

Zadanie 5. Stanisław kładzie na parapecie 5 roślin. Jedna z nich jest odwrócona poprawnie, czyli kwiaty są w kierunku do wewnątrz, pozostałe są odwrócone niepoprawnie — kwiaty układają się w stronę okna. Czy po kilku odwróceniach dowolnych dwóch doniczek jednocześnie Stanisław może uzyskać 5 roślin odwróconych poprawnie?

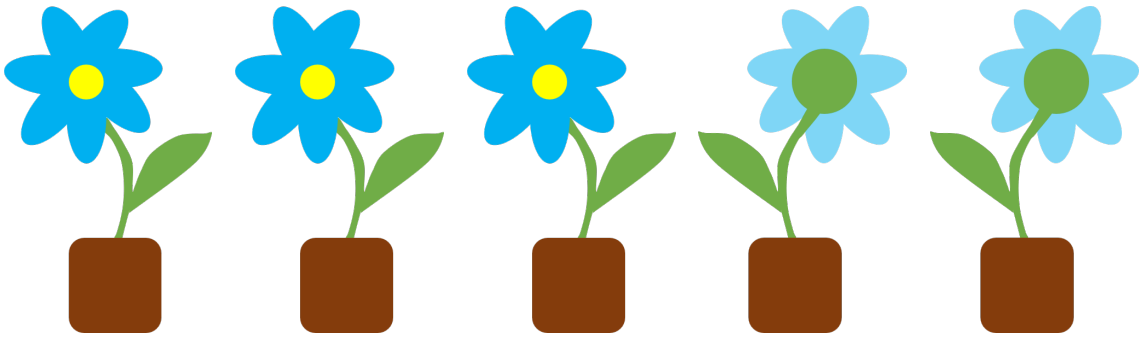
Rozwiązanie. Narysujmy schematycznie 5 roślin tak, jak zostało to przedstawione w zadaniu.



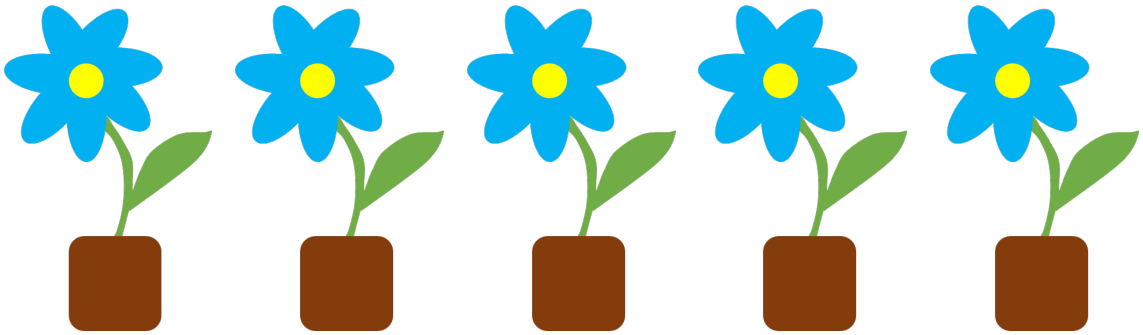
W tego typu zadaniach nie ma znaczenia, która z kolei rzecz jest odwrócona na początku. Odwróćmy więc roślinę drugą.

Sytuacja jest analogiczna do tej z zadania 1. Cztery rośliny odwrócone w złą stronę odpowiadają kartom białym, a roślina odwrócona w dobrą stronę odpowiada kartom z symbolami.

Możemy już z łatwością zauważyć, że jesteśmy w stanie odwrócić pozostałe kwiaty, ale przedstawmy to jeszcze w postaci graficznej. Na początku odwróćmy doniczkę pierwszą i trzecią.



Na koniec odwróćmy dwa ostatnie kwiatki.



Wszystkie rośliny są odwrócone do wewnątrz.

Twierdzenie 6.

Jeżeli mamy możliwość zapisania liczby kart w postaci $2n+1$, przy czym $n \in \mathbb{N}_+$, a liczba kart odwróconych na początku jest nieparzysta, to jesteśmy w stanie doprowadzić do sytuacji, w której po jednoczesnych odwróceniach dowolnych dwóch kart wszystkie pozostałe karty są odwrócone.

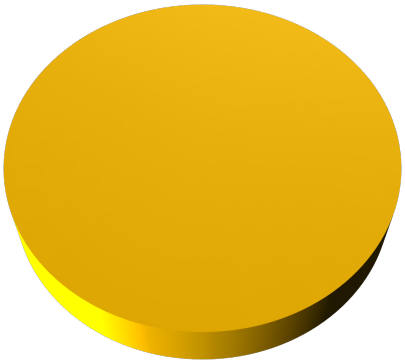
Odpowiedź: Stanisław może uzyskać 5 roślin odwróconych poprawnie.

Dzięki takim prostym przykładom, pojęcie niezmiennika, które wydawało się na początku nieco skomplikowane, staje się zrozumiałe.

Oprócz gier karcianych, w barach nierzadko możemy napotkać różne automaty do gier. Zapoznajmy się z treścią zadania 6.

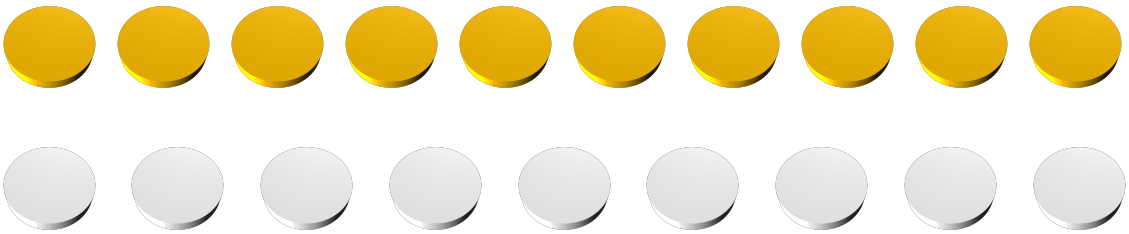
Zadanie 6. W lokalu „Mroczna krypta" zorganizowano pewną akcję. Polega ona na tym, że każdy odwiedzający dostaje przy wejściu 1 złoty żeton, który może wydać na korzystanie z automatów do gier oznaczonych kolorem żółtym. Może również wymienić go na 10 srebrnych żetonów, dzięki którym jest w stanie grać na automatach oznaczonych kolorem białym. Za dodatkową opłatą ma możliwość wymiany jednego srebrnego żetonu na 10 złotych. Czy jest szansa na to, aby odwiedzający mógł zagrać na takiej samej liczbie automatów żółtych, jak i białych?

Rozwiązanie. Aby gość mógł zagrać na identycznej liczbie automatów oznaczonych kolorem żółtym, co białym, liczba obu rodzajów żetonów musi być taka sama. Przedstawmy początkową sytuację.

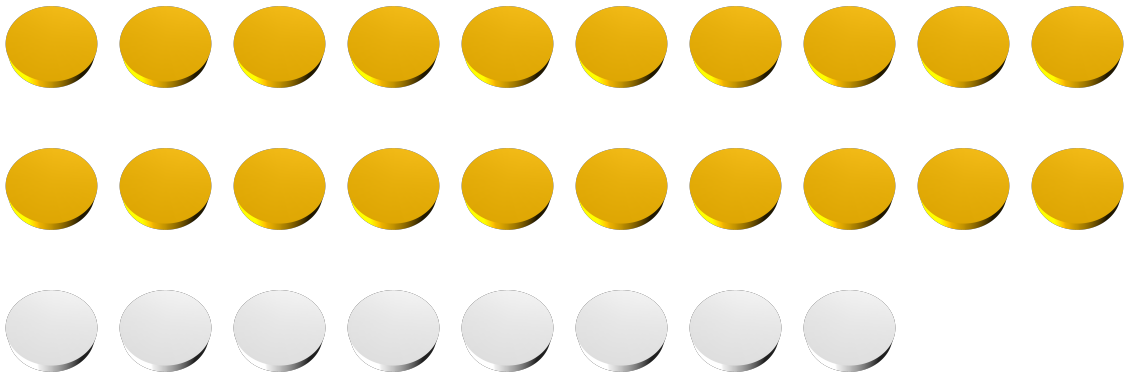


Na początku mamy jeden złoty żeton. Wymieńmy go na dziesięć srebrnych żetonów.

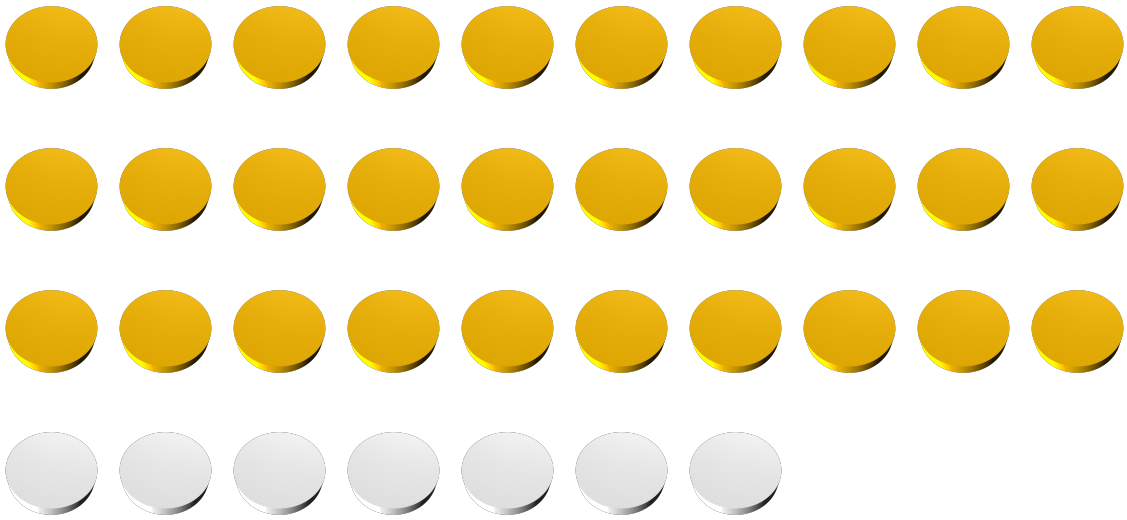
Jeden srebrny żeton wymieńmy na 10 złotych żetonów.



Zauważmy, że różnica liczby złotych i srebrnych żetonów wynosi 1. Ponówmy krok 2.



Teraz różnica wynosi 12, czyli wzrosła o 11. Jeszcze raz wykonajmy krok 2.



Różnica wynosi 23, czyli ponownie wzrosła o 11 względem poprzedniej. Jeśli spróbujemy wymienić w tym momencie 1 złoty żeton na 10 srebrnych, to różnica również zmienia się o 11. Możemy więc zauważyć pewną zależność. W początkowych wymianach różnica wynosi 1, a w trakcie kolejnych zwiększa się ona lub zmniejsza o 11. W związku z tym, nie jest możliwe, aby $1 + 11k = 0$, przy czym $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: Odwiedzający nie może zagrać na takiej samej liczbie automatów oznaczonych kolorem żółtym, co białym.

Rozdział 3

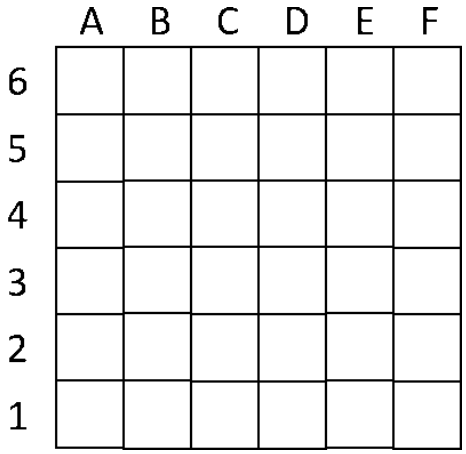
Zadania olimpijskie

Wszystkie dotychczasowe zadania bazowały na łatwych przykładach z życia wziętych. Pora przejść do rozwiązywania czegoś trudniejszego, mianowicie zadań olimpijskich. W związku ze zwiększonym poziomem trudności, obydwa zadania rozwiążemy wspólnie.

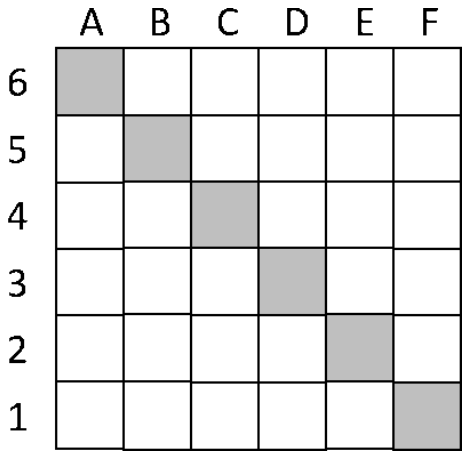
Zadanie 1. W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Zadanie pochodzi z **LIX Olimpiady Matematycznej**.

Rozwiązanie. Zacznijmy od narysowania przykładowej tabeli.



Zaznaczmy ciemniejszym kolorem przekątną łączącą lewy górny róg z prawym dolnym rogiem.



Spróbujmy wpisać w polu A6 liczbę 1, a pozostałe pola przekątnej oznaczyć zerem. Suma liczb w pozostałych polach tabeli musi wynosić -1, aby nasza tabela spełniała warunki zadania.

	A	B	C	D	E	F
6	1					
5		0				
4			0			
3				0		
2					0	
1						0

Możemy zauważyć, że suma liczb na polach przekątnej jest nieparzysta. Rozpatrzmy więc, czy da się zmienić tę sumę w liczbę parzystą.

- Jeżeli wybierzemy pole A6 lub F1, suma zmaleje o 2.
- Jeżeli wybierzemy pole B5, C4, D3 lub E2, suma zmaleje o 4.
- Jeżeli wybierzemy pole B6, C5, D4, E3, F2 lub A5, B4, C3, D2, E1, suma wzrośnie o 2.
- Jeżeli wybierzemy dowolne pole z pozostałych, suma się nie zmieni.

Po sprawdzeniu wszystkich czterech możliwości możemy wywnioskować, że suma cyfr na polach przekątnej zawsze będzie nieparzysta. Z liczby nieparzystej nie jesteśmy w stanie uzyskać liczby parzystej, jaką jest 0.

Odpowiedź: Rozważona przez nas tablica udowadnia, że w wyniku opisanych w zadaniu przekształceń nie zawsze można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Zadanie 2. Dane są trzy stosy kamieni. Syzyf przenosi po jednym kamieniu między stosami. Po każdym transporcie otrzymuje od Zeusa liczbę monet równą różnicy liczby kamieni w stosie, do którego dokłada kamień i stosie, z którego wziął kamień (liczymy bez przenoszonego kamienia). Jeśli różnica jest ujemna, musi odpowiednią liczbę monet zapłacić Zeusowi. W pewnym momencie okazało się, że wszystkie kamienie znalazły się z powrotem na tych samych stosach, na których leżały na początku. Jaka jest największa możliwa liczba monet, którą w tym momencie łącznie zarobił Syzyf swoją pracą?
Zadanie pochodzi z **Ogólnorosyjskiej Olimpiady Matematycznej 1995**.

Rozwiązanie. Dla ułatwienia przyjmijmy pewne oznaczenia.

- Liczba kamieni na trzech stosach po n-tym ruchu jest oznaczona kolejno literami a_n,b_n,c_n.
- Liczba monet posiadanych po n-tym ruchu przez Syzyfa jest oznaczona literą S_n.

Jeżeli Syzyf przenosi w $n+1$ ruchu jeden kamień ze stosu a i dokłada go do stosu b to liczba kamieni wynosi $a_n - 1$ i $b_n + 1$.
Rozważmy liczbę

$$N_n = \underline{a_n \cdot b_n + b_n \cdot c_n + c_n \cdot a_n + S_n}$$

Po wyżej wspomnianym przekształceniu będzie wyglądać tak

$$N_{n+1} = (a_n - 1) \cdot (b_n + 1) + (b_n + 1) \cdot c_n + c_n \cdot (a_n - 1) + S_{n+1} =$$

$$= a_n b_n + a_n - b_n - 1 + b_n c_n + c_n + a_n c_n - c_n + S_{n+1}$$

Syzyf otrzymuje od Zeusa liczbę monet równą różnicy liczby kamieni w stosach. Oznacza to, że $S_{n+1} = S_n + (b_n - (a_n - 1))$

$$N_{n+1} = a_n b_n + a_n - b_n - 1 + b_n c_n \cancel{+c_n} + a_n c_n \cancel{-c_n} + S_n + (b_n - (a_n - 1)) =$$

$$= a_n b_n \cancel{+a_n} \cancel{-b_n} \cancel{-1} + b_n c_n + a_n c_n + S_n \cancel{+b_n} \cancel{-a_n} \cancel{+1} =$$

$$= a_n b_n + b_n c_n + a_n c_n + S_n = \underline{a_n \cdot b_n + b_n \cdot c_n + c_n \cdot a_n + S_n} = N_n$$

Rozważana liczba N_n jest niezmiennikiem przekładania kamieni w stosach. Liczba monet na początku jest taka sama jak liczba monet po przekształceniu.
Odpowiedź: Syzyf za swoją pracę otrzymuje maksymalnie 0 monet.

Klucz odpowiedzi

str. 7

Zadanie 2. $8 \cdot 8 = 64,\ 64 \div 2 = 32$

Na szachownicy znajdują się 32 pola białe i 32 pola czarne. Jest ich tyle samo, więc można wypełnić całą szachownicę.

Zadanie 3. $5 \cdot 5 = 25,\ 25 \div 2 = 12\ r.1$

Na szachownicy znajduje się o jedno pole jednego koloru więcej niż drugiego. Nie jest więc ich tyle samo, nie można wypełnić szachownicy.

Zadanie 4. Przy standardowym kolorowaniu szachownicy, pól białych jest o 1 więcej niż czarnych. Po odjęciu białego pola, liczba obu pól jest równa. Można wypełnić szachownicę.

Zadanie 5. $6 \cdot 6 = 36,\ 36 \div 2 = 18$

Przy standardowym kolorowaniu szachownicy, pole A6 jest takiego samego koloru jak przeciwległe pole (F1). Na początku liczba pól białych i czarnych jest taka sama. Gdy usuniemy dwa pola o tym samym kolorze, liczba ta już nie będzie identyczna. Nie można wypełnić szachownicy.

str. 14

Zadanie 9. 8 jest liczbą niepodzielną przez 3, czyli nie spełnia warunków Twierdzenia 2. Nie można zapełnić całej szachownicy.

Zadanie 10. 750 jest podzielne przez 3, spełnia to warunki Twierdzenia 2. Można zapełnić szachownicę.

Zadanie 11. Liczbę 4 można zapisać w postaci $3n+1$. Skorzystajmy więc z Twierdzenia 3. Zgodnie z nim, pionek może stać na polach: A1, A4, D1, D4.

Zadanie 12. Liczbę 11 można zapisać w postaci $3n + 2$. Skorzystajmy z Twierdzenia 4. Wycięte pole musiałoby być na pozycji $(3a, 3b)$. Litera „E" jest piąta w alfabecie, a 5 nie jest podzielne przez 3. Nie można zapełnić całej szachownicy.

str. 17

Zadanie 2. Liczba kart wynosi 2021. Tę liczbę można zapisać w postaci $2 \cdot 1010 + 1$, co spełnia warunki Twierdzenia 5. W związku z tym, nie jesteśmy w stanie doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie karty są odwrócone niebieskim kolorem do góry.

Zadanie 3. $2(n + \frac{1}{2}) = 2n + 1$

W Twierdzeniu 5. mamy informację, że jeśli liczba kart jest wyrażona w postaci $2n + 1$, nie możemy doprowadzić do tego, by wszystkie karty były odwrócone.

Zadanie 4. $2(a + 1) \leqslant 2$

$2a + 2 \leqslant 2 / -2$

$2a \leqslant 0 / \div 2$

$a \leqslant 0$

Zgodnie z Twierdzeniem 5, a musiałoby być liczbą dodatnią, a w tym przypadku tak nie jest.

Bibliografia

[1] Praca zbiorowa pod redakcją Joachima Jelisiejewa, *Matematyczne seminarium olimpijskie*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 2014

[2] *Gdy zadaniu nie podołasz, to rozwiąże je niezmiennik*, deltami.edu.pl (dostęp 28.02.2022r.)

[3] *Kamila Łyczek, "Szachownice i niezmienniki"*, youtu.be/CyqHldlI7SM (dostęp 28.02.2022r.)

[4] Michał Niedźwiedź, *Zbiór zadań z kółka matematycznego*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2018