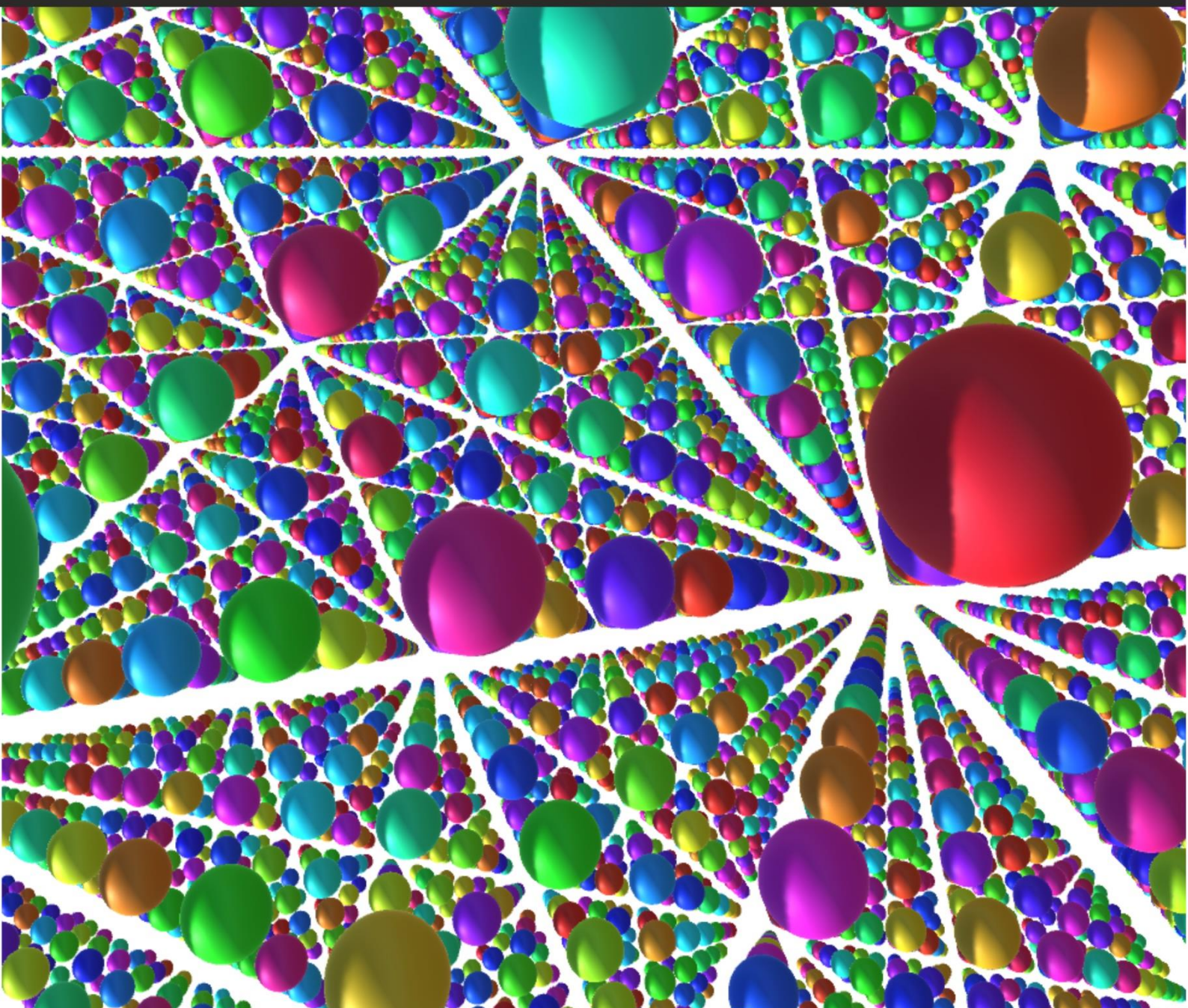
Kacper Błachut klasa II a
I Liceum Ogólnokształcące im. Seweryna Goszczyńskiego
Plac Krasińskiego 1, 34-400 Nowy Targ

Opiekun: mgr Joanna Trybuła

O pewnym problemie przeliczania unikalnych przekształceń na zbiorach skończonych



Dane kontaktowe

Szkoła:
I Liceum Ogólnokształcące w Nowym Targu, im. Seweryna Goszczyńskiego
Plac Krasińskiego 1 34-400 Nowy Targ
tel/fax: 18 266 29 55, 18 266 38 58
lo@goszczynski.nowytarg.pl

Opiekun:
mgr Joanna Trybuła
tel. 696 678 958 email: trybula.joanna@gmail.com

Autor:
Kacper Błachut tel. 601 22 32 31 email: kacper.blachut@gmail.com

*Serdeczne podziękowania dla Pani **mgr Joanny Trybuły***
za pomoc przy redagowaniu niniejszej pracy
oraz bezcenne uwagi przy korekcie

Zespół Szkół Ogólnokształcących Nr 1
w Nowym Targu
34-400 Nowy Targ, Pl.Krasińskiego 1
tel./fax (18) 2662955, 2663358
NIP 7351029205 Regon 000702848

Nowy Targ, 22 II 2022

INFORMACJA NAUCZYCIELA

Kacper Błachut jest uczniem klasy drugiej o poszerzonym programie nauczania matematyki, fizyki i języka angielskiego. W Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych startuje po raz szósty, tym razem pisząc pracę pt. „**O pewnym problemie przeliczania unikalnych przekształceń na zbiorach skończonych**". Praca jest w zupełności napisana przez Niego samodzielnie, dotyczy oryginalnych i ciekawych zagadnień związanych z teorią grup i analizą kombinatoryczną – dyscyplin matematycznych daleko odbiegających od treści zawartych w podstawie programowej nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Wychodząc od prostego przykładu dotyczącego unikalnego kolorowania układu krat 3x3 dwoma kolorami dochodzi do ciekawych i oryginalnych wyników, które dotyczą modyfikacji wzorów przeliczeniowych Burnside'a, a także Polya. Przytacza wiele przykładów, samodzielnie opracował do nich oprogramowanie komputerowe ułatwiające długie i żmudne obliczenia. Należy podkreślić, iż otrzymał nowy, nieznany dotychczas wzór na liczbę dwukolorowych układów kratek kostki trójwymiarowej n^3 unikalny pod odbiciami lustrzanymi, obrotami i zmianą barw.

Kacper nieustannie poszerza swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, czego dowodem jest niniejsza praca. Zagadnienia w niej zawarte okazały się dla mnie nowością, dlatego praca z Kacprem daje dużo satysfakcji.

Joanna Trybuła

Joanna Trybuła
telefon: 696678958
e-mail: trybula.joanna@gmail.com

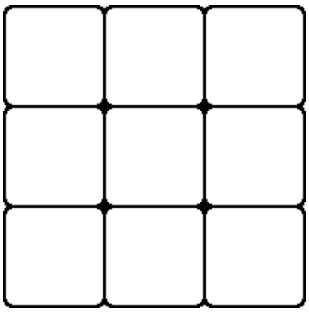
I. Wprowadzenie

I.1. Od czego się zaczęło?

Od pewnego czasu interesuję się problemami z teorii grup. Na początku nawet nie wiedziałem, że pochodzą one właśnie z tej dziedziny matematyki. Wszystko zaczęło się od zadania, którego treść brzmiała: Ile jest możliwych unikalnych kolorowań dwoma kolorami układu kratek $3x3$ pod symetriami kwadratu i symetrią kolorów? Już nawet nie pamiętam, czemu chciałem rozwiązać to zadanie, ale intrygowało mnie ono od dawna. Teraz wiem, że przede mną wiele osób próbowało rozwiązywać podobne zagadnienia, ale wtedy było to moje własne (wymyślone przeze mnie) zadanie.

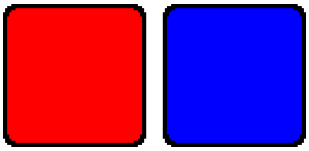
Aby rozwiązać to zadanie musimy zrozumieć wszystkie terminy z powyższego polecenia.

Przez układ kratek $3x3$ rozumiemy kwadrat, podzielony na trzy równe części poziomo i trzy równe części pionowo. Taki podział tworzy $3 * 3 = 9$ pól:



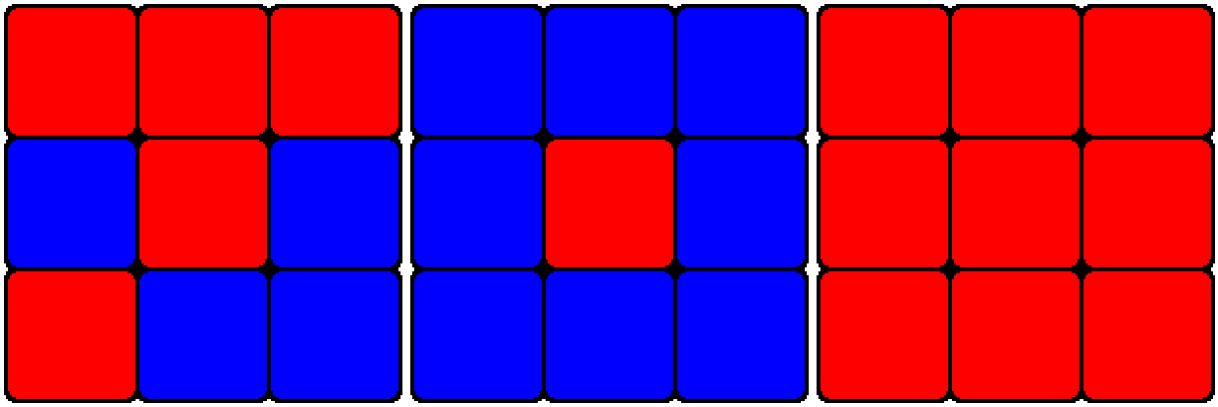
Rysunek 1 – Układ kratek 3x3

Kolorowanie danego układu możemy zdefiniować jako układ, w którym każde pole pokolorowane jest na jeden z możliwych kolorów. W treści zadania podane jest, że mamy do dyspozycji 2 kolory (będę wykorzystywał kolor czerwony i niebieski). To znaczy, że każde pole możemy pokolorować na jeden z tych dwóch kolorów:



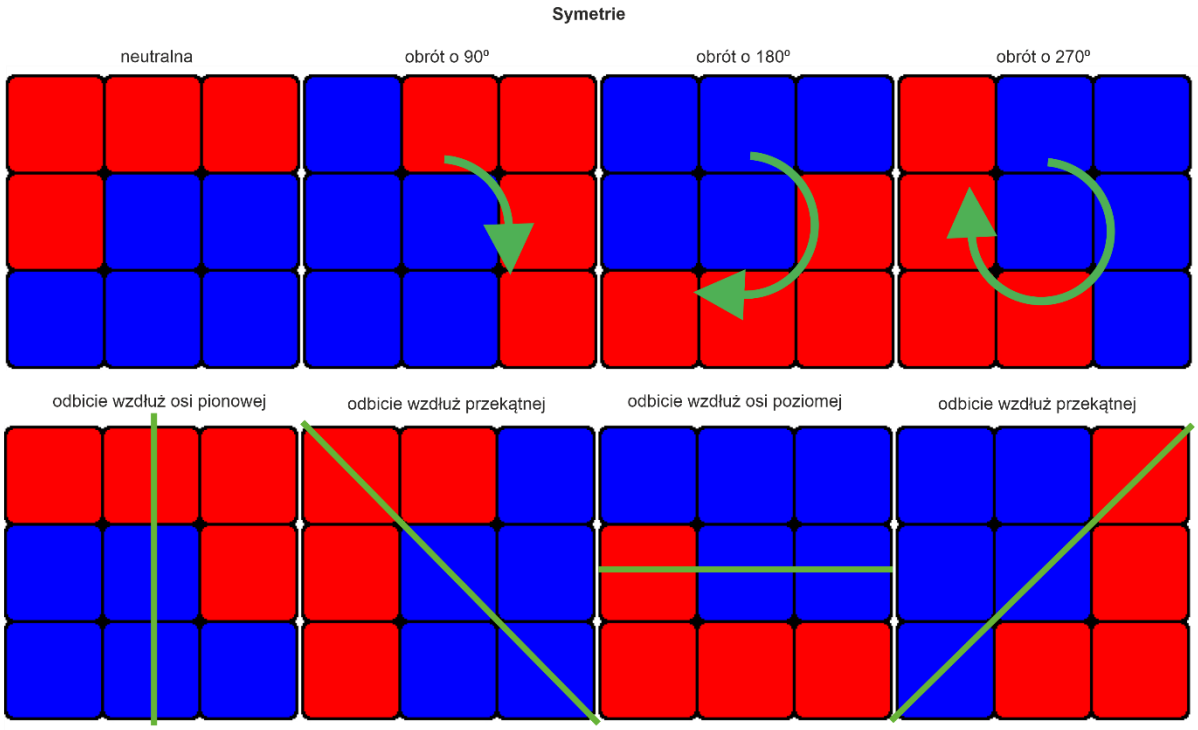
Rysunek 2 – Dwa kolory (czerwony i niebieski)

Przykładami kolorowań na naszym układzie są poniższe rysunki:



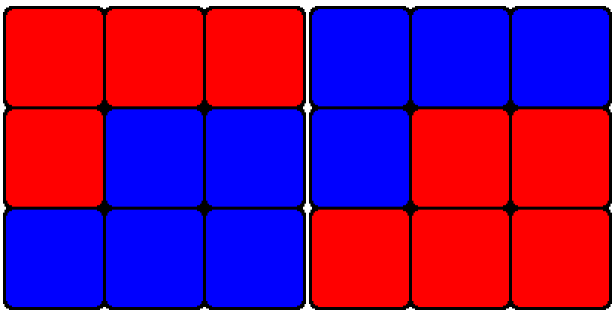
Rysunek 3 – Przykładowe kolorowania

Symetria kwadratu – odwzorowanie kwadratu w siebie zachowujące odległości jego wierzchołków względem siebie (zob. rozdział *II.1*). Zbiór symetrii kwadratu zdefiniowanych w ten sposób zawiera tylko 8 symetrii: pozostawienie kwadratu w spoczynku (symetria neutralna), obrót kwadratu o $90°$, $180°$ lub $270°$ oraz odbicie lustrzane kwadratu pionowo, poziomo lub wzdłuż obu przekątnych. Poniżej przedstawiam jak powyższe symetrie wyglądają na przykładowym kolorowaniu układu kratek:



Rysunek 4 - Symetrie kwadratu na przykładowym kolorowaniu

Symetria kolorów – permutacja zbioru kolorów. Czyli w przypadku zbioru mającego 2 kolory istnieją 2 symetrie: $\begin{pmatrix} R & B \\ R & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & B \\ B & R \end{pmatrix}$, gdzie R oznacza kolor czerwony, a B kolor niebieski. Na przykładowym kolorowaniu powyższe symetrie wyglądają następująco:



Rysunek 5 - Symetria kolorów w kwadracie

Unikalność oznacza tyle, że gdy mamy kolorowania a i b, takie że po zastosowaniu jednej z wymienionych powyżej symetrii (symetrie kwadratu bądź symetria kolorów) lub kilku z tych symetrii jedna po drugiej na kolorowaniu a otrzymamy kolorowanie b, to a i b są identyczne (jest to to samo kolorowanie). Zgodnie z tym stwierdzeniem wszystkie kolorowania na *Rysunku 4* i *Rysunku 5* są identyczne.

W zadaniu musimy odpowiedzieć na pytanie „ile”, co oznacza, że musimy podać liczbę. Jest to ilość wszystkich takich kolorowań, z których żadne dwa nie są identyczne.

I.2. Elementarne rozwiązanie kombinatoryczne zadania

Po wyjaśnieniu wszystkich terminów zadanie nadal wydaje się skomplikowane. Możemy go rozwiązać dwoma sposobami:

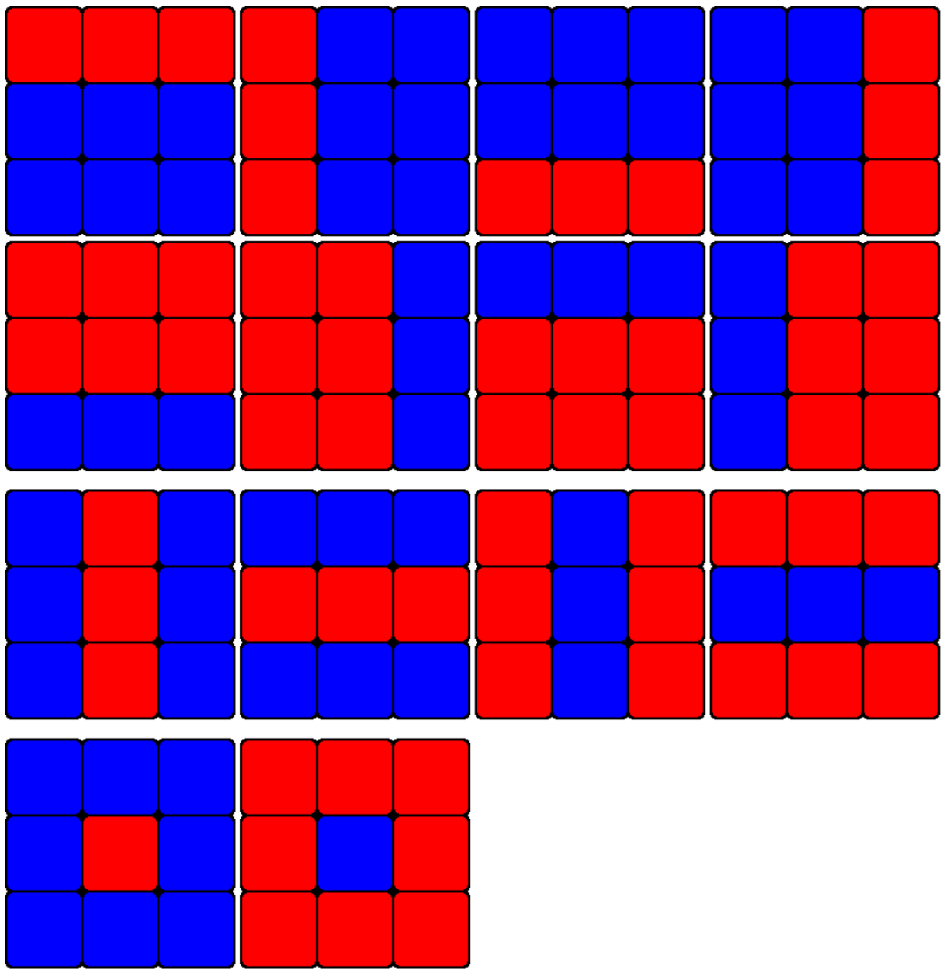
- Samemu przeanalizować wszystkie możliwe kombinacje kolorowania i sprawdzenie czy są unikalne
- Lub wykorzystać algorytmy czy też wzory matematyczne wymagające jednak znajomości pojęć z teorii grup i analizy kombinatorycznej.

Pierwszy sposób jest czasochłonny i niedokładny – wymaga sprawdzenia unikalności każdego kolorowania. Spróbujmy jednak podejść do tego problemu od strony matematyki (czyli drugim sposobem).

Rozwiązując zadanie tym sposobem wykorzystywałem elementarne narzędzia kombinatoryczne do wyznaczenia maksymalnej i minimalnej wartości pokolorowań. Aby obliczyć maksimum zauważamy, że mamy 9 pól i 2 kolory, więc istnieje $2^9 = \mathbf{512}$ możliwych kolorowań (nie patrząc na symetrie). Natomiast przy wyznaczaniu minimum uznajemy, że dla każdego kolorowania istnieje $8 * 2 = 16$ (8 symetrii kwadratu i 2 symetrie kolorów)

kolorowań identycznych do niego. Oznaczałoby to wtedy, że istnieją tylko $\frac{512}{16} = \mathbf{32}$ kolorowania.

Próba przyjęcia założenia, że to minimum to tak naprawdę rzeczywista (poszukiwana) ilość kolorowań okazuje się niepoprawna. A to dlatego, że, wszystkie symetrie działające na jednym kolorowaniu stworzą inne kolorowanie. Istnieją jednak kolorowania, które po zastosowaniu tych symetrii tworzą mniej niż 16 identycznych kolorowań. Na przykład 8, 4 lub 2:



Rysunek 6 - Przykłady kolorowań mających odpowiednio
8, 4, 2 obrazów pod działaniem różnych symetrii

Rozpatrywany układ ma 9 pól. Jeżeli policzymy możliwe ilości kolorów w jednym kolorowaniu na tym układzie to możemy zauważyć, że mamy następujące możliwości: 9 pól czerwonych ($9R$), 8 pól czerwonych i 1 niebieskie ($8R, 1B$), 7 pól czerwonych i 2 niebieskie ($7R, 2B$), itd. Zauważmy, że jeżeli zastosujemy odpowiednią symetrię kolorów to wszystkie kolory zmieniają się na przeciwne, więc ilości tych kolorów zamienią się miejscami – np.: 3 czerwone i 6 niebieskich zmienia się na 6 czerwonych i 3 niebieskie ($3R, 6B \rightarrow 6R, 3B$). Oznacza to, że jeżeli policzymy, ile jest kolorowań mających 3 pola czerwone i 6 niebieskich, to nie musimy brać pod uwagę żadnych kolorowań mających 6 pól czerwonych i 3 niebieskie, gdyż wszystkie z nich byłyby identyczne do kolorowań mających 3 pola czerwone i 6 pól niebieskich (czyli

kolorowania $3R, 6B$ są identyczne do kolorowań $6R, 3B$, w skrócie $3R, 6B \equiv 6R, 3B$ – są równoważne). Więc jakie ilości kolorów musimy brać pod uwagę? Łatwo zauważyć, że:

$$9R \equiv 9B$$

$$8R, 1B \equiv 8B, 1R$$

$$7R, 2B \equiv 7B, 2R$$

$$6R, 3B \equiv 6B, 3R$$

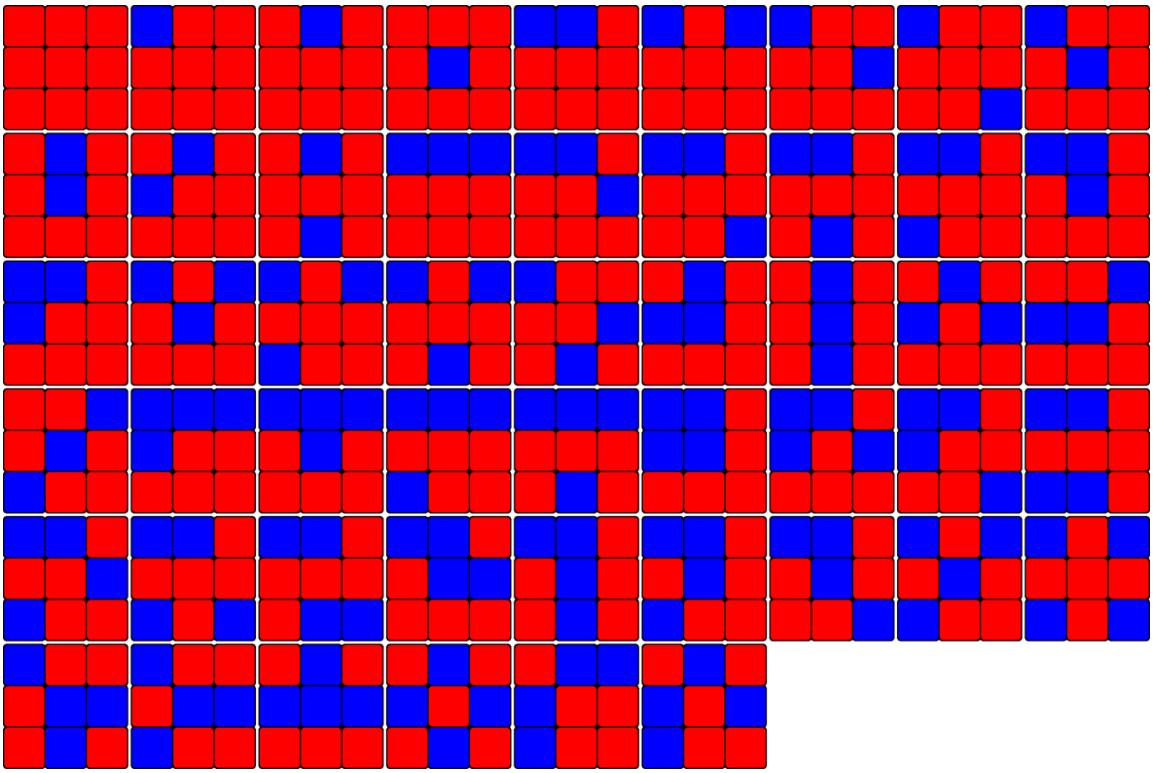
$$5R, 4B \equiv 5B, 4R$$

Powyższy rozkład pozwala nam na stworzenie nowych granic. Maksimum będzie sumą ilości kolorowań mających $9R$ i $8R, 1B$ i $7R, 2B$ i $6R, 3B$ i $5R, 4B$. Te wartości możemy policzyć wykorzystując symbol Newtona:

$$\binom{9}{9} + \binom{9}{8} + \binom{9}{7} + \binom{9}{6} + \binom{9}{5} = 256$$

Teraz stosując to samo rozumowanie co przy poprzednio wyznaczanym minimum możemy obliczyć, że nasze nowe minimum jest równe $\frac{256}{8} = 32$ … czyli tyle samo co poprzednio.

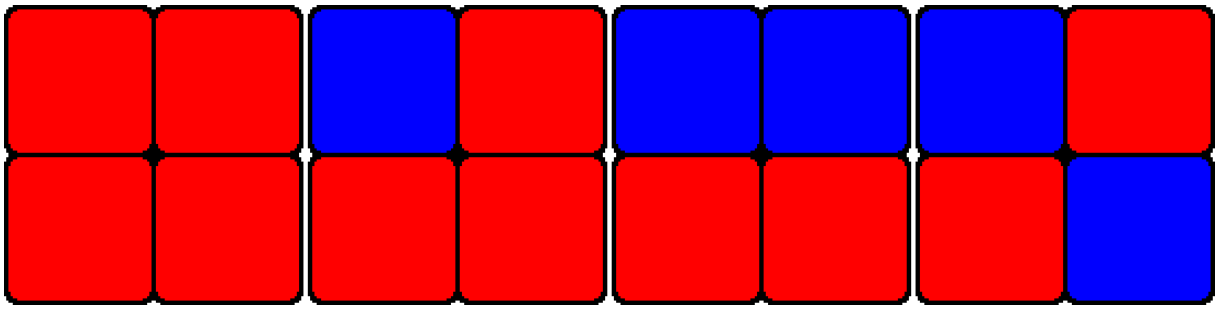
Właśnie do tego miejsca doszedłem gdy pierwszy raz próbowałem rozwiązać ten problem. Pomyślałem sobie, że 256 kolorowań to wcale nie jest tak dużo i zacząłem je realizować. Po kilkukrotnym sprawdzeniu, czy te kolorowania, które znalazłem są poprawne doszedłem do wniosku, że znalazłem odpowiedź na pytanie zawarte w zadaniu i jest ich 51. I dzięki temu, że policzyłem to ręcznie, mogę teraz przedstawić wszystkie otrzymane istotnie różne kolorowania:



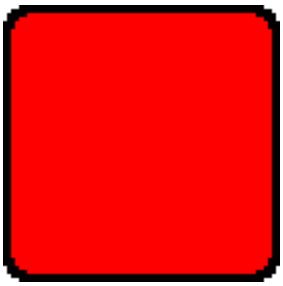
Rysunek 7 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 3x3 (opracowanie własne)

Rysunek 7 możemy wykorzystać do jeszcze lepszego zrozumienia unikalności (Rozdział *I.1.*). Wybierając dowolne dwa kolorowania przedstawione na *rysunku 7* niemożliwe jest znalezienie symetrii takiej, że po jej zastosowaniu na pierwszym kolorowaniu otrzymujemy drugie.

Rozwiązując to zadanie pierwszym sposobem zauważyłem, że problem ten można uogólnić poprzez zmianę wielkości układu kratek z 3x3 na n x n. Policzyłem więc ręcznie rozwiązania problemu $n < 3$, czyli dla $n = 2$ i $n = 1$:



Rysunek 8 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 2x2



Rysunek 9 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 1x1

Z przypadków, które rozwiązałem bezpośrednio dla $n \in \{1,2,3\}$ powstał ciąg liczb: $1, 4, 51$.

II. Uogólnienie, cele dalszego badania, pojęcia, definicje i używane oznaczenia

W przypadku $n > 3$, a szczególnie dla $n = 4$ po obliczeniu wartości minimalnych i maksymalnych (min: 4096, max: 65536) uznałem, że tego już bezpośrednio liczyć nie będę.

Tak się składa, że w Internecie istnieje narzędzie do szukania ciągów: OEIS (*Online Encyclopedia of Integer Sequences*)! Wpisując tylko te 3 pierwsze wyrazy ciągu pokazuje się 19 różnych ciągów i drugim z nich jest właśnie ten, który tutaj rozważaliśmy (w OEIS oznaczany jako A182044). Ciąg ten opisany jest jako: „The number of black and white n X n grids distinct under reflections, rotations, and flipping color.", czyli: „Ilość czarno-białych układów kratek nxn unikalnych pod odbiciami lustrzanymi, obrotami i symetrią kolorów.". Podany jest wzór dla tego ciągu:

```
FORMULA        a(2n) = (6*2^(2*n^2) + 4*2^(n^2) + 2*2^(n*(2*n+1)) + 2^(4*n^2)) / 16,
               a(2n+1) = (2^((2*n+1)^2) + 2*2^(1+n*(n+1)) + 2*2^((n+1)*(2*n+1)) + 2^(n*(2*n+2)+1)
                 + 2*2^((2*n+1)*(n+1))) / 16.
```

Który po odpowiednim sformatowaniu przyjął intrygującą mnie postać matematyczną:

$$a(2n) = \frac{1}{16}\left(6 * 2^{2n^2} + 4 * 2^{n^2} + 2 * 2^{n(2n+1)} + 2^{4n^2}\right)$$

$$a(2n+1) = \frac{1}{16}\left(2^{(2n+1)^2} + 2 * 2^{1+n(n+1)} + 2 * 2^{(n+1)(2n+1)} + 2^{n(2n+2)+1} + 2 * 2^{(2n+1)(n+1)}\right)$$

Stąd też nasunęły się pytania:

Skąd wzięły się te wzory, czemu jest inny wzór na liczby parzyste i nieparzyste, dlaczego jest tyle potęg dwójki? Częściową odpowiedź na te pytania znalazłem w OEIS:

```
Thanks to Benoit Jubin and Graeme McRae for applying Burnside's Lemma
  appropriately.
```

Z przytoczonego cytatu wynika, że w ich wyprowadzeniu został zastosowany Lemat Burnside'a.

Zainteresowałem się czym właściwie jest, i czego dotyczy ten lemat. Okazało się, że jest fundamentalnym narzędziem w drugim ogólnym sposobie rozwiązywania problemów kolorowania. Z dostępnych źródeł dowiedziałem się, że twierdzenie to pochodzi z teorii grup. Zacząłem się więc dokształcać z tego działu matematyki. Po przebrnięciu przez wiele definicji, twierdzeń z tego tematu postanowiłem spróbować spojrzeć szerzej na problem kolorowania.

Podstawowym celem mojego badania, którego rezultaty przedstawiam w następnych rozdziałach tej pracy było znalezienie narzędzia ułatwiającego rozwiązywanie problemów z kolorowaniem dowolna ilością kolorów na dowolnym układzie pod dowolnymi symetriami przestrzennymi i dowolnymi symetriami kolorów. Przedstawiam otrzymany rezultat – wzór, który jest równoważny z twierdzeniem de Brujin'a (w sensie, ze dla tych samych parametrów daje taki sam wynik). Przy okazji wykorzystałem ten wzór do wygenerowania ciągu liczb, który opublikowałem w OEIS pod nr A350891. W pracy załączam także linki do listingów programów,

które napisałem, aby uprościć niektóre obliczenia (Są to tylko procedury i funkcje obliczeniowe beż żadnego UI).

II.1. Pojęcia, definicje i używane oznaczenia

Zawartość tego rozdziału to efekt mojego zmagania się ze zrozumieniem języka matematycznego, którym posługuje się teoria grup i analiza kombinatoryczna. Jestem uczniem drugiej klasy Liceum Ogólnokształcącego, a program nauczania nie obejmuje tych zagadnień. Wykorzystałem więc, obok źródeł internetowych, monografię [1] i [2] (zob. bibliografia), a także konsultacje z moim nauczycielem matematyki. Przytaczam w nim te pojęcia, definicje, twierdzenia oraz oznaczenia, które były mi pomocne w pracy.

Aby zrozumieć teorię grup musimy zacząć od zbiorów. Większość definicji i oznaczeń przytaczam za [1].

W niniejszej pracy **zbiory** oznaczamy dużymi literami $A, B, C, \dots$. Zbiór, którego elementami są tylko i wyłącznie $x_1, x_2, \dots, x_n$ oznaczamy $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Oznaczenie $\{x \in X | P(x)\}$ (lub w skrócie $\{x | P(x)\}$ jeżeli jasne jest o jaki zbiór X chodzi) stosujemy dla oznaczenia zbioru elementów zbioru X, które mają własność P. Ilość elementów w zbiorze nazywamy mocą zbioru i oznaczamy jako $|X|$.

Uporządkowaną parę elementów a, b oznaczamy jako $\langle a, b \rangle$.

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle | a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Dowolny podzbiór $R \subseteq A \times A$ nazywamy **relacją binarną**. Zamiast zapisywać $\langle a, b \rangle \in R$ piszemy aRb.

Relację binarną R na zbiorze A nazywamy:

- **zwrotną** jeżeli $\forall_{a \in A}\ aRa$
- **symetryczną** jeżeli $\forall_{a,b \in A}\ aRb \Leftrightarrow bRa$
- **przechodnią** jeżeli $\forall_{a,b,c \in A}\ aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Relacją równoważności na zbiorze A nazywamy relację binarną $R \subseteq A \times A$, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Klasę abstrakcji elementu $a \in A$ względem relacji równoważności E oznaczamy jako $[a]_E$, albo w skrócie $[a]$, gdzie:

$$[a]_E = \{b \in A | aEb\}$$

Zbiór klas abstrakcji relacji E na zbiorze A (inaczej **podział zbioru A**) oznaczamy jako:

$$A/_E = \{[a]_E | a \in A\}$$

Suma mocy wszystkich klas abstrakcji w podziale zbioru A jest równa mocy zbioru A.

Funkcją $f: X \to Y$ nazywamy odwzorowanie zbioru X w zbiór Y, tak że każdemu elementowi X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y. W pracy wykorzystuję interpretację funkcji jako „**kolorowanie**". Y jest zbiorem kolorów, a $f(x)$ jest kolorem elementu $x \in X$. Wtedy każda funkcja $f: X \to Y$ odpowiada jednoznacznie pewnemu pokolorowaniu elementów zbioru X kolorami ze zbioru Y. Zbiór wszystkich funkcji $f: X \to Y$ oznaczamy jako Y^X. Więc jeżeli Y to zbiór kolorów, to Y^X to zbiór wszystkich kolorowań zbioru X.

Permutacja jest odwzorowaniem różnowartościowym skończonego zbioru w siebie ($f: X \to X$). Permutację oznaczamy:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix}, \text{ gdzie } x_i \in X$$

Weźmy (za [2]) element $p \in X$ i q – element stojący pod p w powyższej notacji. Dalej r – element w dolnej linii będący pod q (w górnej linii) i tak dalej. Ze względu na to, że X jest zbiorem skończonym musimy w końcu dojść do elementu s w górnej linii, pod którym stoi element p. Jeżeli w zbiorze X nadal występują elementy, przez które powyższy proces nas nie przeprowadził, to weźmy element p' z górnej linii, który jeszcze się nie pojawił. Następnie, jak $q, r, \dots$ podążały za p, tak $q', r', \dots$ podążają za p'. Jeżeli nadal występują elementy, które jeszcze się nie pojawiły to zaczynając nowym elementem p'' powtarzamy znowu proces. Ze względu na to, że X jest zbiorem skończonym wiemy, że po skończonej liczbie iteracji powyższego algorytmu wykorzystamy wszystkie elementy tego zbioru. Dzięki temu możemy podzielić X na podzbiory:

$$\begin{array}{l} p\ , q\ \ , r\ \ , \dots , s\ ; \\ p'\ , q'\ , r'\ , \dots , s'\ ; \\ p'', q'', r'', \dots , s''; \\ \vdots \end{array}$$

Tak, że permutacja f zamienia każdy element na element następujący po nim w podzbiorze, w którym się znajduje (a ostatni element podzbioru zamieniany jest na pierwszy element tego samego podzbioru). Każdy z tych podzbiorów nazywamy **cyklem** i oznaczamy $[pqr \dots s]$. Możemy zatem zapisać permutację f używając cykli w następujący sposób:

$$f = [pqr \dots s][p'q'r' \dots s'][p''q''r'' \dots s''] \dots$$

Taki zapis nazywamy **rozkładem kanonicznym** permutacji. Warto zauważyć, że kolejność cykli w takiej notacji permutacji nie jest ważna, gdyż elementy nie powtarzają się między cyklami. Nie jest również ważne od jakiego elementu zaczniemy dany cykl.

Na przykład permutację liczb od 1 do 9

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 4 & 5 & 3 & 8 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Możemy zapisać jako rozkład kanoniczny:

$$f = [197][2][345][68]$$

Mówimy (za [1]), że permutacja f jest typu $\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rangle$ jeśli w jej rozkładzie kanonicznym występuje λ_i cykli długości i dla $i \in \{1,2,, \dots, n\}$. Ilość elementów, które wchodzą w skład cykli o długości n to $n\lambda_n$, więc moc zbioru X na którym działa permutacja f to suma $n\lambda_n$ przez wszystkie długości cykli w tej permutacji:

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} i\lambda_i$$

W mojej pracy, aby uprościć zapisy stosuję $Ct(f) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rangle$ dla oznaczenia typu permutacji f, zbiór cykli permutacji f przez $C(f)$, a zbiór wszystkich permutacji zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ przez S_X, a gdy $x_1 \equiv 1, x_2 \equiv 2, \dots, x_n \equiv n$ przez S_n. Cykl $[ABC]$ czasami przedstawiam jako $ABC \to CAB$.

W pracy często korzystam z **pojęcia symetrii**. Jaki jest związek symetrii z grupą? W teorii grup jest to pojęcie znacznie szersze niż w geometrii, gdzie symetrią jest odwzorowanie obiektu w siebie (np. symetrie lustrzane kwadratu, obrót kwadratu o $90°$). Należy pamiętać, że obrót zaliczamy do symetrii. W teorii grup symetrią możemy nazwać odwzorowanie obiektu w siebie, które zachowuje pewne cechy obiektu – zwane niezmiennikami (które sami możemy definiować). W teorii grup symetrie są często interpretowane jako permutacje elementów obiektu (np. obrót kwadratu o $90°$ to permutacja jego wierzchołków).

Grupa (G) to struktura algebraiczna definiowana jako zbiór (X) z określonym na nim działaniem $(\cdot)$, które musi spełniać następujące warunki $(a, b \in X)$:

- dwuargumentowość
  działanie przypisuje każdej parze dwóch elementów jeden element
  $$a \cdot b = c$$
- wewnętrzność
  wynik działania jest elementem zbioru
  $$a \cdot b \in X$$
- posiadanie elementu neutralnego
  istnieje taki element zbioru X (zazwyczaj oznaczany jako e), dla którego:
  $$a \cdot e = a$$
- łączność
  $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
- odwracalność
  dla każdego elementu $a \in X$ istnieje element odwrotny (oznaczany jako a^{-1}), taki że:
  $$a \cdot a^{-1} = e$$

czyli grupę G można traktować jako parę $G = (X, \cdot)$.

Weźmy $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych) oraz działanie $\cdot$ to dodawanie. Spełnia to oczywiście wszystkie powyższe warunki. Przykład (1)

Często tworzy się dla grupy tzw. Tablice Cayleya, które opisują wyniki działania. Dla powyższego przykładu część tablicy wygląda następująco:

$\boldsymbol{\cdot}$	…	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{-3}$	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	…
$\mathbf{-2}$	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
$\mathbf{-1}$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
$\mathbf{0}$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$\mathbf{1}$	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$\mathbf{2}$	…	-1	0	1	2	3	4	5	…
$\mathbf{3}$	…	0	1	2	3	4	5	6	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Burnside w swoim dziele [2] zaproponował inną definicję grupy, gdzie elementami zbioru X są „operacje". Działaniem jest natomiast wykonywanie jednej operacji bezpośrednio po drugiej. Ze względu na to, że przy takiej definicji działanie w każdej grupie jest takie samo (wykonanie jednej operacji po drugiej) to jest ono ukrywane. Zamiast zapisywać je w postaci operatora $a \cdot b$ piszemy ab (z ang. *juxtaposition*). Takie usunięcie działania z definicji grupy skutkuje tym, że zbiór X musi spełniać warunki ($a, b \in X$):

- wewnętrzność
  wynik wykonania dwóch operacji po sobie jest inną operacją należącą do X
  $$ab \in X$$
- posiadanie elementu neutralnego
  istnieje taka operacja (zazwyczaj oznaczana jako e), dla której:
  $$ae = a$$
- łączność
  $$(ab)c = a(bc)$$
- odwracalność
  dla każdej operacji $a \in X$ istnieje operacja odwrotna (oznaczana jako a^{-1}), taka że:
  $$aa^{-1} = e$$

Działanie grupy $\boldsymbol{G}$ na zbiorze $\boldsymbol{X}$ definiujemy (za [3]) jako dwuargumentową funkcję (z ang. *map*) $\alpha: G \times X \to X$, spełniającą następujące warunki $\forall_{x \in X}; \forall_{g,h \in G}$:

- Neutralność: $\alpha(e, x) = x$

- Zgodność: $\alpha\big(g, \alpha(h, x)\big) = \alpha(gh, x)$

Dla grupy z Przykładu (1) oraz zbioru liczb całkowitych jedną z możliwych funkcji spełniającej warunki działania grupy na zbiorze jest odwzorowanie zilustrowane poniższą tabelą:

	…	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**…**
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
+(-3)	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	…
+(-2)	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
+(-1)	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
+0	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
+1	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
+2	…	-1	0	1	2	3	4	5	…
+3	…	0	1	2	3	4	5	6	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Możemy zauważyć, że kolejne wiersze są permutacjami zbioru liczb całkowitych dlatego działanie grupy na zbiorze jest czasami nazywane **reprezentacją permutacyjną** danej grupy.

Możemy więc powiedzieć, że **funkcja $\boldsymbol{\alpha}$ odwzorowuje operację $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$ na zbiorze $\boldsymbol{X}$ w pewną permutację zbioru $\boldsymbol{X}$**. Taką permutację oznaczamy gX. Zbiór, który powstaje po zastosowaniu permutacji gX na podzbiorze $Y \subseteq X$ oznaczamy jako $gX(Y)$. Oznaczmy zbiór wszystkich permutacji w reprezentacji permutacyjnej grupy G na zbiorze X jako $GX = \{gX | g \in G\}$.

Zarówno w tej jak i kolejnych definicjach uznajemy, że stosowane działanie grupy na zbiorze wynika z kontekstu użycia pojęć, dlatego w symbolach nie pojawia się oznaczenie odwzorowania α.

Stosując definicję Burnside'a możemy na grupę spojrzeć jako zbiór operacji. Wtedy można zapisać pewne rodzaje grup, które wykorzystuję w niniejszej pracy w następujący sposób:

$$G = \langle S | R \rangle$$

Gdzie G jest grupą, S podzbiorem grupy G (nazywanym generatorem), a R jest zbiorem relacji pomiędzy elementami S a elementem neutralnym e.

Na przykład grupę cykliczną 4 (C_4) zapisujemy jako $C_4 = \langle \sigma | \sigma^4 = e \rangle$. Oznacza to, że wykonując operację σ czterokrotnie powracamy do punktu wyjścia (co jest równoznaczne z zastosowaniem operacji neutralnej e).

W ten sposób możemy zdefiniować kilka podstawowych grup, które wykorzystuję w pracy:

- Grupa trywialna

$$\{e\}$$

- Grupa cykliczna 2

$$C_2 = \langle \sigma | \sigma^2 = e \rangle$$

- Grupa cykliczna 3

$$C_3 = \langle \sigma | \sigma^3 = e \rangle$$

- Grupa cykliczna 4

$$C_4 = \langle \sigma | \sigma^4 = e \rangle$$

- Grupa diedralna 4

$$D_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_1^4 = \sigma_2^2 = e \rangle$$

- Grupa oktoedralna

$$O = \langle \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_1^2 = \sigma_2^3 = (\sigma_1 \sigma_2)^4 = e \rangle$$

- Grupa symetryczna n

$$S_n = \\ = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \middle| \sigma_i^2 = e; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i; i, j \in \{1, \dots, n-1\}; j \neq i \pm 1 \right\rangle$$

Jak zrozumieć te grupy?

Na przykład grupą C_2 może być grupa symetrii monety (obracanie jej między stanami „reszka" i „orzeł"). Jeżeli obrót z jednego stanu do drugiego nazwiemy σ, a pozostawienie monety w spoczynku: e, wtedy $\sigma^2 = e$.

Spójrzmy teraz na grupę C_4. Może to być grupa składająca się z symetrii kwadratu (a właściwie czterech punktów tworzących kwadrat). Symetrie zaś zdefiniujemy jako obrót wokół środka kwadratu o wielokrotności $90°$. Niech $\sigma =$ obrót o $90°$, a $e =$ obrót o $0°$. Wtedy $\sigma^4 = e$.

Dalej grupa D_4. Może to być grupa symetrii rotacyjnych i lustrzanych wierzchołków kwadratu. Wtedy jeżeli $\sigma_1 =$ obrót o $90°$ oraz $\sigma_2 =$ odbicie lustrzane względem osi pionowej to $\sigma_1^4 = \sigma_2^2 = e$. W pracy wykorzystuję również tę grupę jako grupę symetrii układu kratek n x n, gdzie σ_1 i σ_2 są takie same jak przy wierzchołkach kwadratu.

Grupa oktoedralna O to np. grupa symetrii rotacyjnych i lustrzanych sześcianu (albo jego wierzchołków). Wtedy jeżeli $\sigma_1 =$ odbicie lustrzane względem płaszczyzny równoległej do dowolnej ściany, a $\sigma_2 =$ obrót o $120°$ względem wierzchołka sześcianu. W pracy używam tej grupy również jako grupa symetrii układu kratek n x n x n.

Grupa S_n jest często definiowana jako grupa wszystkich symetrii (permutacji) n punktów. W definicji na podstawie prezentacji grupy σ_i można przedstawić jako:

$$\sigma_i = [1][2] \dots [i, i+1] \dots [n-1][n].$$

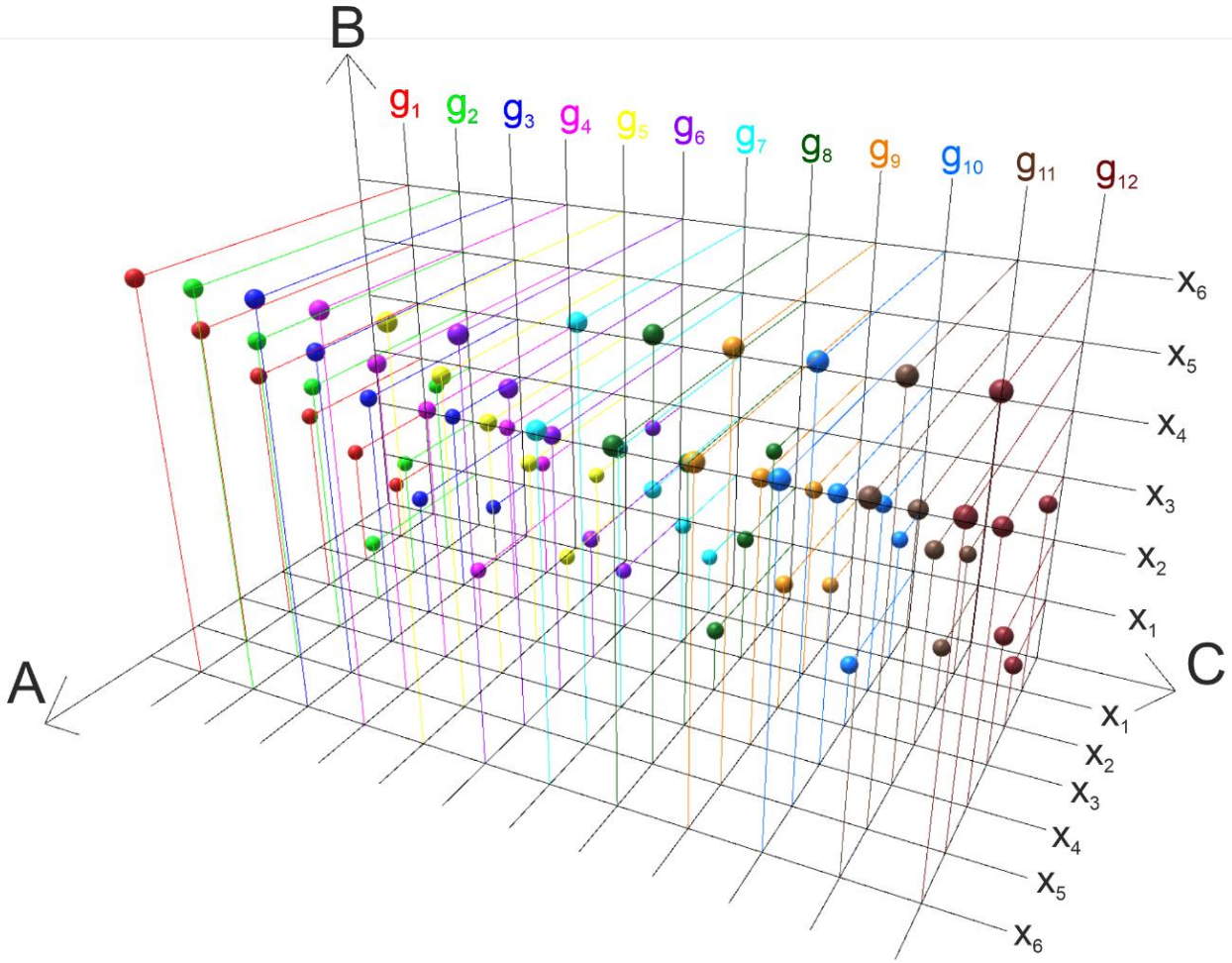
Mając definicję klasy abstrakcji, typu permutacji, oraz grupy możemy określić konkretną relację równoważności wykorzystywaną w tej pracy. Mówimy, że dwie permutacje $f, g \in S_n$ są równoważne jeżeli $Ct(f) = Ct(g)$, czyli gdy ich typy są jednakowe ($[f] = \{g | Ct(f) = Ct(g)\}$ – czyli klasa abstrakcji permutacji f jest równa zbiorowi wszystkich

permutacji mających jednakowy typ cykliczny). Korzystając z tej relacji możemy podzielić zbiór permutacji GX (czyli zbiór permutacji w reprezentacji permutacyjnej grupy G na zbiorze X):

$$GX/_E = \{[f] | f \in GX\}$$

Powyższy podział jest bardzo przydatny, ponieważ znacząco upraszcza korzystanie ze wzorów z teorii grup (np. Lemat Burnside'a). Jednak, aby ułatwić sobie pracę najpierw musimy podzielić każdą grupę, na którą później napotkamy w taki sposób (co zrobię w rozdziale *II.2*).

Rysunek 10 pomoże mi wytłumaczyć pojęcie orbity i punktu stałego. Na osi A i B umieszczone są elementy zbioru X, a na osi C są symetrie z grupy G (każda symetria ma inny kolor). Jeżeli pod symetrią g_i obraz elementu x_j to x_k wtedy na *rysunku 10* występuje kulka koloru g_i w miejscu, gdzie na osi A jest x_j, na osi B x_k oraz g_i na osi C.



Rysunek 10 - Przykładowe działanie grupy na zbiorze

Orbita (za [4]) elementu $x \in X$ to zbiór elementów X, do których x może być przeniesione przez elementy działania grupy G.

$$Gx = \{gx | g \in G\}$$

Na przykładzie grupy z *rysunku 10* możemy rozpatrzyć orbitę elementu x_1. Obraz każdego x_i pod g_1 to x_i, więc $x_1 \in Gx_1$. Obraz x_1 pod symetrią g_2 to x_3 oraz obraz x_1 pod symetrią g_5 to x_2. Żadne inne symetrie nie tworzą nowego obrazu tego elementu, więc orbita elementu x_1 w tej grupie to: $Gx_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Warto również zauważyć, że ze względu na to, że każda symetria musi mieć symetrię odwrotną to orbity wszystkich elementów zawartych w jednej orbicie są takie same, czyli: $Gx_1 = Gx_2 = Gx_3$.

Zbiór wszystkich orbit w zbiorze X oznaczamy X/G:

$$X/G = \{Gx | x \in X\}$$

W zbiorze przedstawionym na *rysunku 10* występują 3 orbity: $X/G = \{Gx_1, Gx_4, Gx_5\} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$.

W problemach z kolorowaniem zliczamy tak naprawdę ilość orbit zbioru wszystkich kolorowań Y^X, ponieważ jeżeli dwa kolorowania uznajemy za takie same (po zastosowaniu jakiejś symetrii pierwsze kolorowanie zamienia się w drugie), to znaczy, że należą one do tej samej orbity. Natomiast jeżeli dwa kolorowania są różne (czyli nie ma takiej symetrii pod którą obraz pierwszego kolorowania jest drugim kolorowaniem) to nie mogą one należeć do tej samej orbity. Więc <u>ilość istotnie różnych kolorowań jest równa ilości orbit zbioru wszystkich kolorowań pod daną grupą</u>.

Punktem stałym zbioru X pod reprezentacją permutacyjną symetrii g nazywamy element $x \in X$, taki że:

$$gx = x$$

Czyli po zastosowaniu symetrii g element x pozostaje taki sam. Wracając znowu do przykładu z *rysunku 10*: punktem stałym pod symetrią g_8 jest na przykład x_2, ponieważ obraz x_2 pod tą symetrią to x_2.

Zbiór wszystkich punktów stałych zbioru X pod symetrią g oznaczamy jako X^g:

$$X^g = \{x \in X | gx = x\}$$

Na przykład na *rysunku 10* $X^{g_8} = \{x_2, x_4\}$. Moc zbioru wszystkich punktów stałych jest przydatna w Lemacie Burnside'a, za pomocą którego możemy z mocy zbiorów punktów stałych dla każdej symetrii $g \in G$ obliczyć ilość orbit zbioru X. Czyli <u>jeżeli potrafimy policzyć ilość punktów stałych zbioru wszystkich kolorowań Y^X pod każdą symetrią, to możemy również powiedzieć ile w tym zbiorze jest istotnie różnych kolorowań</u>.

Aby kolorowanie ($z \in Y^X$) było punktem stałym pod daną symetrią (g), to obraz tego kolorowania musi być równy samemu kolorowaniu. Weźmy dla przykładu x_1 oraz g_4 z *rysunku 10*. Jeżeli w kolorowaniu z element x_1 był pokolorowany na kolor $y_1 \in Y$ to znaczy, że element jaki się znajdzie na miejscu x_1 po zastosowaniu symetrii g_4 (w tym przypadku jest to x_3) również musi być pokolorowany na kolor y_1. I podążając tą samą logiką: kolor elementu, którego obrazem jest x_3 (czyli x_2) musi również być koloru y_1, itd. Inaczej mówiąc wszystkie elementu cyklu permutacji g_4X, w którym znajduje się element x_1 muszą być tego samego koloru. Podobnie jest dla wszystkich innych cykli w tej permutacji, czyli elementy danego cyklu

muszą być tego samego koloru. Jednak kolory różnych cykli nie muszą być takie same (co nie znaczy, że nie mogą). Oznacza to, że na pokolorowanie danego cyklu mamy $|Y|$ możliwości, więc mając $|C(gX)|$ cykli istnieje $|Y|^{|C(gX)|}$ punktów stałych. Czyli <u>znając ilość cykli permutacji gX możemy policzyć ilość punktów stałych zbioru Y^X pod symetrią g</u>.

Przykłady powyższych definicji podaję w poniższej tabeli (grupa G i zbiór X takie same jak na rysunku 10):

Działanie grupy na zbiorze							**Typ cykliczny**						**Punkty stałe**	
$g_i(x_j)$	x_j						$Ct(g_i)$			$[g_i]$	$\|C(g_iX)\|$	$\|Y\|^{\|C(g_iX)\|}$ $\|Y\| = 2$	X^{g_i}	$\|X^{g_i}\|$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_1	λ_2	λ_3					
$g_1(x_j)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	6	0	0	$[g1]$	6	64	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$	6
$g_2(x_j)$	x_3	x_2	x_1	x_4	x_5	x_6	4	1	0	$[g2]$	5	32	x_2, x_4, x_5, x_6	4
$g_3(x_j)$	x_1	x_3	x_2	x_4	x_5	x_6	4	1	0	$[g2]$	5	32	x_1, x_4, x_5, x_6	4
$g_4(x_j)$	x_2	x_3	x_1	x_4	x_5	x_6	3	0	1	$[g4]$	4	16	x_4, x_5, x_6	3
$g_5(x_j)$	x_2	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	4	1	0	$[g2]$	5	32	x_3, x_4, x_5, x_6	4
$g_6(x_j)$	x_3	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6	3	0	1	$[g4]$	4	16	x_4, x_5, x_6	3
$g_7(x_j)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_5	4	1	0	$[g2]$	5	32	x_1, x_2, x_3, x_4	4
$g_8(x_j)$	x_3	x_2	x_1	x_4	x_6	x_5	2	2	0	$[g8]$	4	16	x_2, x_4	2
$g_9(x_j)$	x_1	x_3	x_2	x_4	x_6	x_5	2	2	0	$[g8]$	4	16	x_1, x_4	2
$g_{10}(x_j)$	x_2	x_3	x_1	x_4	x_6	x_5	1	1	1	$[g10]$	3	8	x_4	1
$g_{11}(x_j)$	x_2	x_1	x_3	x_4	x_6	x_5	2	2	0	$[g8]$	4	16	x_3, x_4	2
$g_{12}(x_j)$	x_3	x_1	x_2	x_4	x_6	x_5	1	1	1	$[g10]$	3	8	x_4	1

W pracy wykorzystuję także poniższe twierdzenie:

Lemat Burnside'a

Ilość orbit w zbiorze X pod symetrią G jest równa średniej arytmetycznej ilości punktów stałych pod $g \in G$ dla wszystkich g:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

Aby w pracy łatwiej wykorzystywać lemat Burnside'a zauważyłem, że jeżeli jako X weźmiemy Y^Z (wszystkie kolorowania zbioru Z zbiorem kolorów Y), czyli:

$$|Y^Z/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|(Y^Z)^g|$$

To stosując przekształcenia opisane wyżej (podkreślenia we wcześniejszych akapitach) uzyskujemy:

$$|Y^Z/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in \mathrm{G}}|Y|^{|C(gZ)|}$$

Okazuje się, że wynik moich powyższych rozważań jest uproszczoną wersją **Twierdzenia Enumeracyjnego Polya**, jednak tego twierdzenia nie wykorzystuję w pracy.

Analizując dane z powyższej tabeli możemy rozpatrzyć przykład Lematu Burnside'a i Twierdzenia Enumeracyjnego Polya:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| \ = \frac{36}{12} = 3$$

$$|Y^X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} 2^{|Ct(g)|} = \frac{288}{12} = 24$$

II.2. Przykłady grup działających na zbiorach i ich podział na klasy abstrakcji

Do dalszych obliczeń w pracy nie potrzebujemy wiedzieć jakie dokładnie elementy znajdują się w danej klasie. Musimy tylko znać jej moc oraz typ cykliczny.

Najprostszym przykładem grupy jest grupa trywialna $\{e\}$. Ma ona jedną symetrię, więc istnieje tylko jedna klasa abstrakcji w podziale tej grupy na klasy abstrakcji. Jeżeli uznamy, że X to zbiór składający się z jednego elementu (punktu) to typ cykliczny permutacji w tej klasie to $\langle 1 \rangle$, czyli:

$G = \{e\}$ $\quad$ $X = 1$ punkt
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 1 \rangle$

Następną prostą do rozpisania grupą jest grupa cykliczna 2 - C_2. Tutaj X to zbiór dwóch punktów. Grupa ta ma dwa elementy: element neutralny (który zawsze tworzy swoją własną klasę o mocy 1) oraz element zamieniający te dwa punkty miejscami, więc:

$G = C_2$ $\quad$ $X = 2$ punkty
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 2 \rangle$
$|[g_2]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_2 X) = \langle 0,1 \rangle$

W podobny sposób możemy rozpisać kilka kolejnych grup:

$G = C_3$ $\quad$ $X = 3$ punkty
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 3 \rangle$
$|[g_2]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_3 X) = \langle 0,0,1 \rangle$

$G = C_4$ $\quad$ $X =$ wierzchołki kwadratu
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 4 \rangle$
$|[g_2]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_2 X) = \langle 0,2 \rangle$
$|[g_3]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_3 X) = \langle 0,0,0,1 \rangle$

$G = S_3$ $\quad$ $X = 3$ punkty
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 3 \rangle$
$|[g_2]| = 3$ $\quad$ $Ct(g_2 X) = \langle 1,1 \rangle$
$|[g_3]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_3 X) = \langle 0,0,1 \rangle$

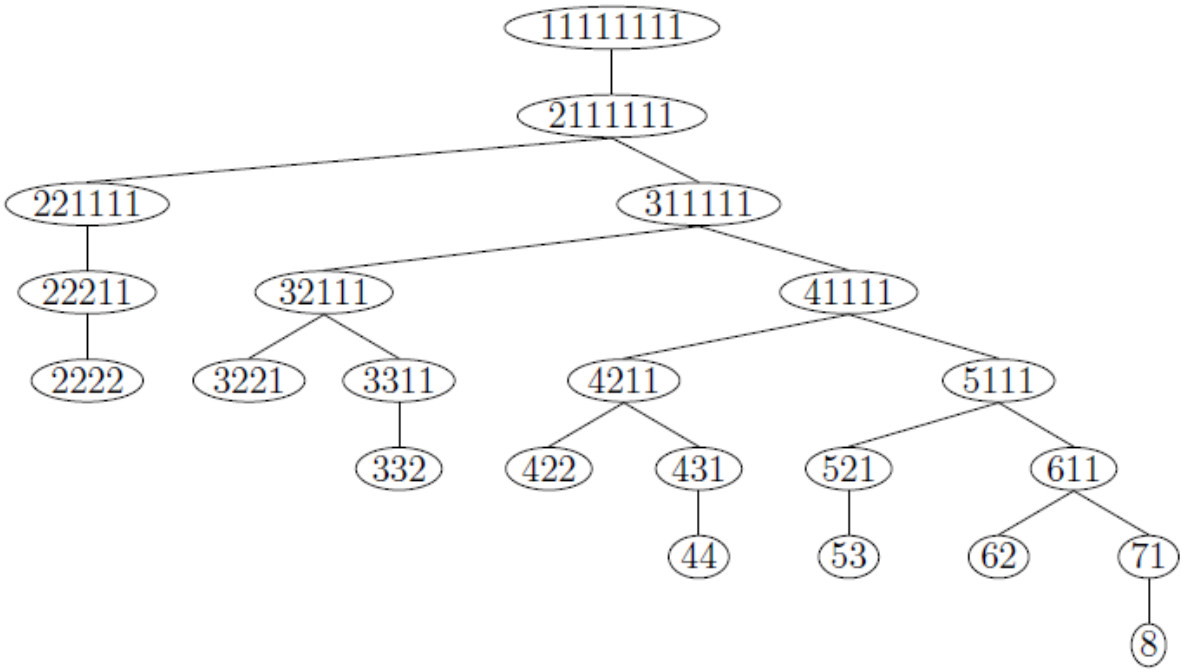
$G = S_4$ $\quad$ $X = 4$ punkty
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1 X) = \langle 4 \rangle$
$|[g_2]| = 6$ $\quad$ $Ct(g_2 X) = \langle 2,1 \rangle$
$|[g_3]| = 8$ $\quad$ $Ct(g_3 X) = \langle 1,0,1 \rangle$
$|[g_4]| = 3$ $\quad$ $Ct(g_4 X) = \langle 0,2 \rangle$
$|[g_5]| = 6$ $\quad$ $Ct(g_5 X) = \langle 0,0,0,1 \rangle$

$G = D_4$ $\quad$ $X =$ wierzchołki kwadratu
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1X) = \langle 4 \rangle$
$|[g_2]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_2X) = \langle 2,1 \rangle$
$|[g_3]| = 3$ $\quad$ $Ct(g_3X) = \langle 0,2 \rangle$
$|[g_4]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_4X) = \langle 0,0,0,1 \rangle$

$G = D_4$ $\quad$ $X =$ kratki w układzie kratek 3x3
$|[g_1]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_1X) = \langle 9 \rangle$
$|[g_2]| = 4$ $\quad$ $Ct(g_2X) = \langle 3,3 \rangle$
$|[g_3]| = 1$ $\quad$ $Ct(g_3X) = \langle 1,4 \rangle$
$|[g_4]| = 2$ $\quad$ $Ct(g_4X) = \langle 1,0,0,2 \rangle$

Wszystkie z powyższych rozkładów łatwo znaleźć chociażby przez rozpisanie wszystkich symetrii na kartce. Są jednak symetrie, które już trudniej w ten sposób rozłożyć (a ze względu na to, że później korzystam z nich w pracy to muszę je teraz rozłożyć). Na szczęście istnieje wiele sztuczek matematycznych, które w tym pomagają.

Weźmy na przykład grupę symetryczną S_8, gdzie X to zbiór 8 punktów. Ze względu na to, że jest to grupa symetryczna (czyli grupa wszystkich permutacji danego zbioru), wiemy, że będą w niej występować wszystkie typy cykliczne, w których suma cykli wynosi 8. Jest to równoważne ze sposobami na podział 8 na sumę liczb naturalnych (ang. *Partitions*), które łatwo znaleźć ręcznie (lub poprzez wyszukanie w Internecie). Okazuje się, że jest ich tylko 22.



Rysunek 11 – Podział liczby 8 na sumę liczb naturalnych

Trochę trudniejsze okazuje się jednak znalezienie mocy każdej z tych klas. Jednak tutaj można wykorzystać elementarne metody kombinatoryczne. Weźmy na przykład klasę o cyklach długości $3, 3, 2$, czyli typie cyklicznym $\langle 0,1,2 \rangle$. Zacznijmy od cyklu o długości 2. Istnieje $\frac{8*7}{2}$ sposobów na dobór takiego cyklu w 8 punktach. Następnie cykle o długości 3. Zostało nam

teraz 6 punktów, więc istnieje $\frac{6*5*4}{3}$ sposobów na dobór jednego cyklu o długości 3 oraz $\frac{3*2*1}{3}$ sposoby na dobranie drugiego. Dzielimy tutaj przez 3 a nie przez 6, ponieważ o ile punkt początkowy cyklu nie ma znaczenia – o tyle drugi i każdy kolejny już znaczenie ma (podobnie przy cyklu o długości 4 podzielilibyśmy przez 4 zamiast 24). Dodatkowo należy zauważyć, że cykle o takich samych długościach możemy zamienić nie zmieniając permutacji. W tym przypadku oznacza to, że wynik dzielimy przez 2 (mamy 2 cykle o długości 3). Mnożąc wyniki dla każdego cyklu otrzymujemy nam: $\frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{2*3*3*2}$. W ogólnym przypadku w liczniku będzie silnia łącznej ilości elementów, a w mianowniku iloczyn długości cykli razy iloczyn silni ilości powtórzeń każdej długości cykli w danym typie cyklicznym[1]. Następnie wystarczy policzyć te wartości dla wszystkich 22 klas równoważności. Tutaj przydaje się własność o sumie mocy klas. Dzięki niej możemy sprawdzić, czy wykonaliśmy wszystkie obliczenia kombinatoryczne poprawnie. Kolejność klas w poniższym podziale nie jest zgodna z powszechnie uznawaną kolejnością podziału liczb naturalnych, jednak nie ma to żadnego wpływu na wyniki w dalszych częściach pracy.

$G = S_8$	$X = 8$ punktów
$\|[g_1]\| = 1$	$Ct(g_1X) = \langle 8 \rangle$
$\|[g_2]\| = 28$	$Ct(g_2X) = \langle 6,1 \rangle$
$\|[g_3]\| = 210$	$Ct(g_3X) = \langle 4,2 \rangle$
$\|[g_4]\| = 420$	$Ct(g_4X) = \langle 2,3 \rangle$
$\|[g_5]\| = 105$	$Ct(g_5X) = \langle 4 \rangle$
$\|[g_6]\| = 112$	$Ct(g_6X) = \langle 5,0,1 \rangle$
$\|[g_7]\| = 1120$	$Ct(g_7X) = \langle 3,1,1 \rangle$
$\|[g_8]\| = 1680$	$Ct(g_8X) = \langle 1,2,1 \rangle$
$\|[g_9]\| = 1120$	$Ct(g_9X) = \langle 2,0,2 \rangle$
$\|[g_{10}]\| = 1120$	$Ct(g_{10}X) = \langle 0,1,2 \rangle$
$\|[g_{11}]\| = 420$	$Ct(g_{11}X) = \langle 4,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{12}]\| = 2520$	$Ct(g_{12}X) = \langle 2,1,0,1 \rangle$
$\|[g_{13}]\| = 1260$	$Ct(g_{13}X) = \langle 0,2,0,1 \rangle$
$\|[g_{14}]\| = 3360$	$Ct(g_{14}X) = \langle 1,0,1,1 \rangle$
$\|[g_{15}]\| = 1260$	$Ct(g_{15}X) = \langle 0,0,0,2 \rangle$
$\|[g_{16}]\| = 1344$	$Ct(g_{16}X) = \langle 3,0,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{17}]\| = 4032$	$Ct(g_{17}X) = \langle 1,1,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{18}]\| = 2688$	$Ct(g_{18}X) = \langle 0,0,1,0,1 \rangle$
$\|[g_{19}]\| = 3360$	$Ct(g_{19}X) = \langle 2,0,0,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{20}]\| = 3360$	$Ct(g_{20}X) = \langle 0,1,0,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{21}]\| = 5760$	$Ct(g_{21}X) = \langle 1,0,0,0,0,0,1 \rangle$
$\|[g_{22}]\| = 5040$	$Ct(g_{22}X) = \langle 0,0,0,0,0,0,0,1 \rangle$

Ostatnią grupą jakiej rozkład jeszcze rozpatrzymy jest $G = O$ oraz X to wierzchołki sześcianu. I tutaj już nie ma takiego ładnego rozwiązania metodami kombinatoryki. Musimy wszystkie 48

[1] Wzór ten w ogólnej postaci jest równoważny ze wzorem Cauchy'ego na liczbę permutacji o danym typie cyklicznym. Jednak, gdy pisałem ten fragment nie znałem tego wzoru kombinatorycznego.

symetrii rozważyć indywidualnie… albo znaleźć je w innych źródłach literatury lub w zmienionej formie w Internecie.

$G = O$	$X =$ wierzchołki sześcianu
$\lvert[g_1]\rvert = 1$	$Ct(g_1X) = \langle 8 \rangle$
$\lvert[g_2]\rvert = 6$	$Ct(g_2X) = \langle 4,2 \rangle$
$\lvert[g_3]\rvert = 13$	$Ct(g_3X) = \langle 0,4 \rangle$
$\lvert[g_4]\rvert = 8$	$Ct(g_4X) = \langle 2,0,2 \rangle$
$\lvert[g_5]\rvert = 12$	$Ct(g_5X) = \langle 0,0,0,2 \rangle$
$\lvert[g_6]\rvert = 8$	$Ct(g_6X) = \langle 0,1,0,0,0,1 \rangle$

III. Mój wzór

III.1. Wyprowadzenie wzoru

Po dłuższych zmaganiach z teorią grup poznałem już dokładnie Lemat Burnside'a, więc postanowiłem spróbować rozwiązać problem z symetrią kolorów. Zajęło mi to wiele czasu i wymagało wielu prób, ale w końcu udało mi się dojść do poprawnego wzoru. Na początku rozważałem tylko konkretne przypadki i przekształcanie wzoru z Lematu Burnside'a (zawarte w rozdziale *II.1*):

$$|Y^X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in \mathrm{G}} |Y|^{|Ct(gX)|}$$

Teraz zostały kolory. Uznajmy, że grupę symetrii kolorów oznaczamy jako H. Na przykład: w problemie z układem kratek 3x3 i 2 kolorami mieliśmy do czynienia z $H = C_2$. Geometryczną wizualizacją grupy symetrii kolorów mogą być punkty, każdy reprezentujący jeden z kolorów, pod symetriami wybranego układu punktów. Biorąc pod uwagę symetrię kolorów nie możemy już powiedzieć, że $|Y|^{|X^g|}$ jest ilością punktów stałych zbioru Y^X pod symetrią g (działającą na X) i symetrią h (działającą na Y), ponieważ ten wzór działa tylko, gdy nie występuje symetria działająca na zbiorze Y. Punktów stałych jest teraz mniej niż $|Y|^{|X^g|}$. Przykładem może być $hY = \begin{pmatrix} R & B \\ B & R \end{pmatrix}$ (gdzie $h \in H$ oraz $Y = \{R, B\}$) na cyklu w gX o długości 2 (symetrię kolorów przedstawiam poprzez zamianę symboli kolorów zgodnie z h). Zgodnie z rozumowaniem z rozdziału *II.1* aby elementy cyklu miały stałe kolorowanie wszystkie elementy muszą być tego samego koloru, jednak takie kolorowanie cyklu nie powoduje, że jest on stały:

$$RR \to BB$$
$$BB \to RR$$

Możemy jednak zauważyć, że nadal istnieją stałe kolorowania powyższego cyklu:

$$RB \to RB$$
$$BR \to BR$$

Spróbujmy na trudniejszym przykładzie – $hY = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & A & D & E & C \end{pmatrix}$ na cyklu permutacji gX długości 5. Rozkład kanoniczny hY to: $hY = [AB][CDE]$ – jeden cykl o długości 2 i jeden o długości 3 ($Ct(hX) = \langle 0,1,1 \rangle$). Jeżeli chcemy, aby kolorowanie cyklu $a \in C(gX)$ było prawidłowe, to wszystkie kolory w nim zawarte muszą pochodzić z tego samego cyklu $b \in C(hY)$. Gdybyśmy pomieszali kolory z różnych cykli (np. cykle $b_1, b_2 \in C(hY); b_1 \neq b_2$), to gX przeniesie kolor pochodzący z b_1 w miejsce, w którym znajdował się kolor z b_2. Ze względu na to, że kolory nie mogą się powtarzać między cyklami, to kolor przeniesiony przez gX nie może być równy kolorowi, który się tam znajdował wcześniej. Więc wszystkie kolorowania powstałe z więcej niż jednego cyklu odpadają. Na przykład:

$$ABCDE \to CBADE$$

Co więcej długość cyklu b musi dzielić długość cyklu a. Każdy kolor cyklu musi być wykorzystany jednakową liczbę razy, ponieważ po zastosowaniu hY wszystkie kolory zamieniają się na inne. Gdyby ilość jednego koloru nie była równa reszcie, to po zastosowaniu hY ilość innego koloru była by różna, przez co takie kolorowanie punktu stałego nie byłoby już stałe.

$$ABABA \rightarrow BABAB$$

Powstały nam w ten sposób dwa wymagania na prawidłowe kolorowanie pod symetriami g i h:

1. Wszystkie kolory w kolorowaniu muszą pochodzić z tego samego cyklu w hY.
2. Długość cyklu, z którego pochodzą kolory musi dzielić moc kolorowanego cyklu.

Patrząc na drugie wymaganie możemy już zobaczyć że nasz poprzedni przykład nie ma prawidłowych kolorowań, ponieważ $2 \nmid 5$ oraz $3 \nmid 5$.

Rozwiążmy kolejny przykład (tym razem taki, który ma prawidłowe kolorowania). Niech symetria hY będzie taka sama jak poprzednio, ale moc kolorowanego cyklu (a) wynosi 6. Zarówno 2 (moc cyklu b_1) jak i 3 (moc cyklu b_2) dzieli 6, więc wiemy, że będą istniały już jakieś rozwiązania. Tylko ile ich będzie? Zacznijmy od cyklu b_1. Widzimy, że pierwszy element cyklu a możemy pokolorować na jakikolwiek kolor z b_1 (czyli albo A albo B). Drugi element możemy teraz pokolorować tylko na ten kolor, który jest następny w cyklu b_1 (jeżeli pierwszy element był pokolorowany na A to drugi musi być pokolorowany na B i vice versa). Na trzecim i każdym kolejnym elemencie tak samo. Oznacza to, że jedynym wyborem jaki mamy jest początkowy kolor. Kolorów w b_1 jest 2, więc istnieją 2 poprawne kolorowania tym cyklem. Podobnie jest z cyklem b_2 o długości 3. Mamy 3 początkowe kolory do wyboru, więc istnieją 3 prawidłowe kolorowania. Łącznie więc mamy $|b_1| + |b_2| = 5$ prawidłowych kolorowań. Oto wszystkie z nich:

$$\begin{gathered} ABABAB \\ BABABA \\ CDECDE \\ DECDEC \\ ECDECD \end{gathered}$$

Możemy więc powiedzieć, że ilość prawidłowych kolorowań cyklu $a \subseteq gX$ jest równa sumie długości cykli w h dzielących moc a. Ilość prawidłowych kolorowań całego X^g to iloczyn ilości prawidłowych kolorowań każdego cyklu w gX. Więc wzór na ilość prawidłowych kolorowań Y^X pod symetriami g i h (czyli ilość punktów stałych Y^X pod symetriami g i h) możemy przedstawić jako:

$$\prod_{x \in C(gX)} \sum_{y \in C(hY)} \begin{cases} |y| \mid |x| \rightarrow |y| \\ |y| \nmid |x| \rightarrow 0 \end{cases}$$

W Lemacie Burnside'a ilość punktów stałych wynosiła $|X^g|$. Możemy więc podstawić nasz nowy wzór na ilość punktów stałych pod wzór z Lematu Burnside'a.

$$(Y^X)^h/G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{x\in C(gX)}\sum_{y\in C(hY)}\begin{cases}|y| \mid |x| \to |y| \\ |y| \nmid |x| \to 0\end{cases}$$

Nie możemy jednak zapomnieć o tym, że wynik ten to ilość poprawnych kolorowań pod jedną symetrią $h \in H$ gdzie grupa H działa na zbiorze barw Y. Więc jeżeli chcemy policzyć ilość poprawnych kolorowań pod wszystkimi symetriami w H (czyli ilość orbit) wystarczy, że znowu zastosujemy Lemat Burnside'a (tym razem dla grupy H):

$$|Y^X/G/H| = \frac{1}{|G||H|}\sum_{h\in H}\sum_{g\in G}\prod_{x\in C(gX)}\sum_{y\in X(hY)}\begin{cases}|y| \mid |x| \to |y| \\ |y| \nmid |x| \to 0\end{cases}$$

Dla czytelniejszego zapisu w późniejszych przykładach przyjmijmy, że:

$$z_k^n = \begin{cases}k \mid n \to 1 \\ k \nmid n \to 0\end{cases}$$

Ten ostatni krok pozwala nam również na upewnienie się, że powyższy wzór jest poprawny. Wykorzystując Twierdzenia Enumeracyjnego Polya (PET) – nie wchodząc już w szczegóły tego twierdzenia – możemy uznać, że przy oznaczeniu z_k^n mówimy o z_k podniesionym do potęgi n. Wtedy z_k jest równoważne z wagą w PET. Twierdzenie jest natomiast poprawne tylko wtedy, gdy wagi są elementami pierścienia z przemiennymi operatorami. Więc ze względu, że z_k spełnia te wymagania wagi, to nasz wzór jest poprawny. Możemy więc ostatecznie zapisać wzór na ilość orbit w zbiorze X na kolorach Y pod symetrią zbioru G oraz symetrią kolorów H:

$$\boldsymbol{|Y^X/G/H| = \frac{1}{|G||H|}\sum_{h\in H}\sum_{g\in G}\prod_{x\in C(gX)}\sum_{y\in C(hY)}|y|z_{|y|}^{|x|}}$$

III.2. Proste przykłady użycia wzoru

Mając już wzór na ilość orbit pod symetrią kolorów możemy w końcu rozwiązywać takie problemy nad jakimi głowiłem się na początku mojej przygody z teorią grup. Spróbujmy przetestować ten wzór na kilku przykładach.

Zacznijmy od prostego przykładu, gdzie $G = D_4$, $H = C_2$, $X =$ wierzchołki kwadratu oraz $Y = \{R, B\}$. Zwykłe wstawianie wartości do wzoru spowoduje, że będzie on bardzo długi i nieczytelny. Zauważmy, że do naszego wzoru potrzebujemy znać tylko długości cykli w danej symetrii na zbiorze, czyli musimy znać typ cykliczny tej permutacji. Oznacza to, że dla wszystkich symetrii posiadających taki sam typ cykliczny wynik sumy będzie jednakowy – i właśnie tutaj przydaje się podział wprowadzony w rozdziale *II.1.* Ze względu na to, że długości cykli wykorzystywane są w sumie to możemy po prostu pomnożyć wynik dla danego typu cyklicznego z ilością symetrii, które taki typ mają – czyli mnożymy wynik dla danej klasy z mocą tej klasy. Matematycznie wygląda to następująco:

$$\frac{1}{|G||H|}\sum_{h\in H}\sum_{g\in G}\prod_{x\in C(gX)}\sum_{y\in C(hY)}|y|z_{|y|}^{|x|} = \frac{1}{|G||H|}\sum_{[h]\in HY/_E}\sum_{[g]\in GX/_E}|[h]||[g]|\prod_{x\in C(gX)}\sum_{y\in C(hY)}|y|z_{|y|}^{|x|}$$

Zważając na fakt, że C_2 ma dwie klasy abstrakcji w podziale oraz D_4 ma 4 (czyli we wzorze wystąpi tylko $2 * 4 = 8$ składników dwóch zewnętrznych sum) możemy już zacząć podstawiać wartości. Jednak pisanie tego w jednej ciągłej linii nadal jest nieczytelne – nie wiemy z jakich klas powstał dany składnik sumy oraz czasami trudno zauważyć, gdzie jeden składnik się kończy a drugi zaczyna. Aby rozwiązać te dwa problemy możemy przedstawić te dwie zewnętrzne sumy w formie tabelki. W pierwszej kolumnie numery klas abstrakcji z $HY/_E$, w drugiej numery klas z $GX/_E$ (zgodnie z numerowaniem w rozdziale *II.2.*). W trzeciej znajduje się rozpisany składnik sumy, natomiast w czwartej wartość liczbowa tego składnika (dla uproszczenia nazwijmy ją N). W piątej i szóstej są moce klas przez które musimy pomnożyć, a w siódmej wynik mnożenia poprzednich trzech kolumn. Dzięki takiemu rozpisaniu wszystko staje się czytelne oraz przy ewentualnej pomyłce łatwiej sprawdzić wyniki cząstkowe niż sam końcowy. Dalej suma wszystkich wartości z ostatniej kolumny podzielona przez $|G||H|$ to wynik końcowy tego wzoru. W praktyce wygląda to następująco:

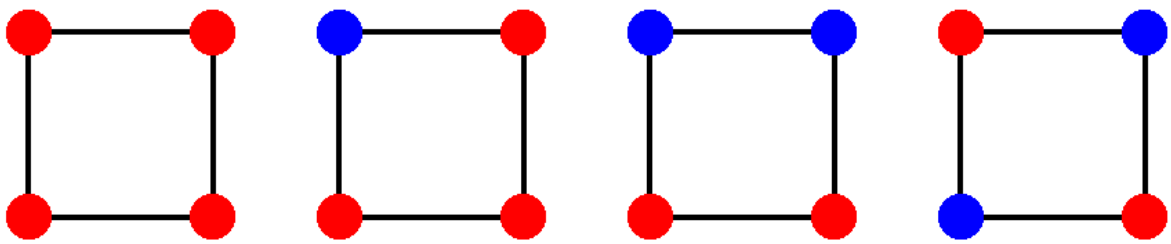
$G = D_4$ $\quad$ $X =$ wierzchołki kwadratu

$H = C_2$ $\quad$ $Y = 2$ kolory (czerwony i niebieski)

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$\|[h]\|$	$\|[g]\|$	$N\|[h]\|\|[g]\|$
1	1	$(z_1^1 + z_1^1)^4$	16	1	1	16
1	2	$(z_1^1 + z_1^1)^2(z_1^2 + z_1^2)^1$	8	1	2	16
1	3	$(z_1^2 + z_1^2)^2$	4	1	3	12
1	4	$(z_1^4 + z_1^4)^1$	2	1	2	4
2	1	$(2z_2^1)^4$	0	1	1	0
2	2	$(2z_2^1)^2(2z_2^2)^1$	0	1	2	0
2	3	$(2z_2^2)^2$	4	1	3	12
2	4	$(2z_2^4)^1$	2	1	2	4

$$\frac{16 + 16 + 12 + 4 + 0 + 0 + 12 + 4}{2 * 8} = \frac{64}{16} = \mathbf{4}$$

Oznacza to, że ilość kolorowań wierzchołków kwadratu dwoma kolorami pod grupą symetrii przestrzennych D_4 oraz grupą symetrii kolorów C_2 jest równa 4. Do każdego z takich przykładów będę umieszczał również wszystkie te kolorowania w formie graficznej (znalezione już ręcznie). W powyższym przykładzie wyglądają one następująco:



Rysunek 12 - Przykłady użycia mojego wzoru (1)

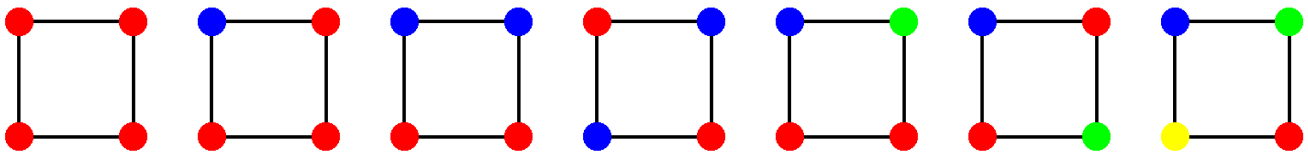
Wiedząc już jak takie rzeczy się liczy popatrzmy na kilka kolejnych przykładów:

$G = D_4$ $\quad$ $X =$ wierzchołki kwadratu

$H = S_4$ $\quad$ $Y = 4$ kolory (czerwony, niebieski, zielony, żółty)

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$\lvert[h]\rvert$	$\lvert[g]\rvert$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(z_1^1+z_1^1+z_1^1+z_1^1)^4$	256	1	1	256
1	2	$(z_1^1+z_1^1+z_1^1+z_1^1)^2(z_1^2+z_1^2+z_1^2+z_1^2)^1$	64	1	2	128
1	3	$(z_1^2+z_1^2+z_1^2+z_1^2)^2$	16	1	3	48
1	4	$(z_1^4+z_1^4+z_1^4+z_1^4)^1$	4	1	2	8
2	1	$(2z_2^1+z_1^1+z_1^1)^4$	16	6	1	96
2	2	$(2z_2^1+z_1^1+z_1^1)^2(2z_2^2+z_1^2+z_1^2)^1$	16	6	2	192
2	3	$(2z_2^2+z_1^2+z_1^2)^2$	16	6	3	288
2	4	$(2z_2^4+z_1^4+z_1^4)^1$	4	6	2	48
3	1	$(2z_2^1+2z_2^1)^4$	0	3	1	0
3	2	$(2z_2^1+2z_2^1)^2(2z_2^2+2z_2^2)^1$	0	3	2	0
3	3	$(2z_2^2+2z_2^2)^2$	16	3	3	144
3	4	$(2z_2^4+2z_2^4)$	4	3	2	24
4	1	$(3z_3^1+z_1^1)^4$	1	8	1	8
4	2	$(3z_3^1+z_1^1)^2(3z_3^2+z_1^2)^1$	1	8	2	16
4	3	$(3z_3^2+z_1^2)^2$	1	8	3	24
4	4	$(3z_3^4+z_1^4)^1$	1	8	2	16
5	1	$(4z_4^1)^4$	0	6	1	0
5	2	$(4z_4^1)^2(4z_4^2)^1$	0	6	2	0
5	3	$(4z_4^2)^2$	0	6	3	0
5	4	$(4z_4^4)^1$	4	6	2	48

$$\frac{1344}{24 * 8} = \mathbf{7}$$



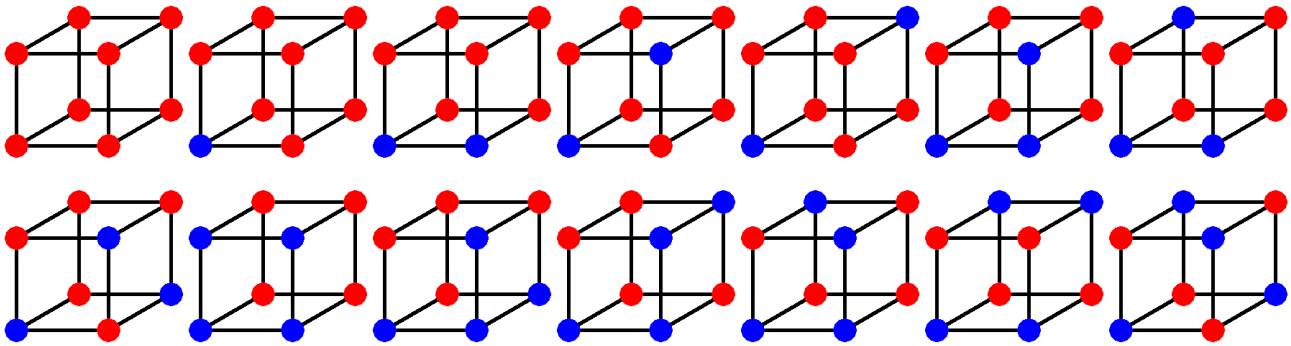
Rysunek 13 - Przykłady użycia mojego wzoru (2)

$G = O$ $\qquad$ $X =$ wierzchołki sześcianu

$H = S_2$ $\qquad$ $Y =$ 2 kolory (czerwony i niebieski)

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$\lvert[h]\rvert$	$\lvert[g]\rvert$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(z_1^1 + z_1^1)^8$	256	1	1	256
1	2	$(z_1^1 + z_1^1)^4(z_1^2 + z_1^2)^2$	64	1	6	384
1	3	$(z_1^2 + z_1^2)^4$	16	1	13	208
1	4	$(z_1^1 + z_1^1)^2(z_1^3 + z_1^3)^2$	16	1	8	128
1	5	$(z_1^4 + z_1^4)^2$	4	1	12	48
1	6	$(z_1^2 + z_1^2)^1(z_1^6 + z_1^6)^1$	4	1	8	32
2	1	$(2z_2^1)^8$	0	1	1	0
2	2	$(2z_2^1)^4(2z_2^2)^2$	0	1	6	0
2	3	$(2z_2^2)^4$	16	1	13	208
2	4	$(2z_2^1)^2(2z_2^3)^2$	0	1	8	0
2	5	$(2z_2^4)^2$	4	1	12	48
2	6	$(2z_2^2)^1(2z_2^6)^1$	4	1	8	32

$$\frac{1344}{48 * 2} = \mathbf{14}$$



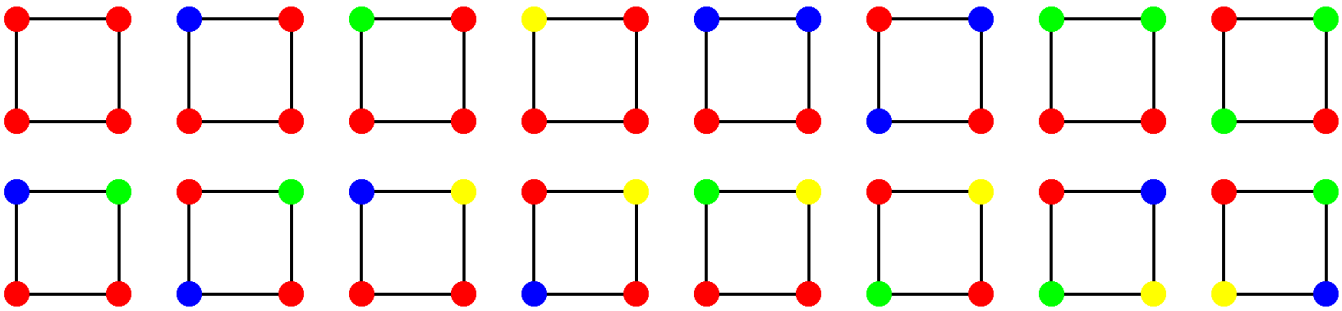
Rysunek 14 - Przykłady użycia mojego wzoru (3)

$G = D_4$ $X =$ wierzchołki kwadratu

$H = C_4$ $Y = 4$ kolory (czerwony, niebieski, zielony, żółty)

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$\lvert[h]\rvert$	$\lvert[g]\rvert$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(z_1^1 + z_1^1 + z_1^1 + z_1^1)^4$	256	1	1	256
1	2	$(z_1^1 + z_1^1 + z_1^1 + z_1^1)^2(z_1^2 + z_1^2 + z_1^2 + z_1^2)^1$	64	1	2	128
1	3	$(z_1^2 + z_1^2 + z_1^2 + z_1^2)^2$	16	1	3	48
1	4	$(z_1^4 + z_1^4 + z_1^4 + z_1^4)^1$	4	1	2	8
2	1	$(2z_2^1 + 2z_2^1)^4$	0	1	1	0
2	2	$(2z_2^1 + 2z_2^1)^2(2z_2^2 + 2z_2^2)^1$	0	1	2	0
2	3	$(2z_2^2 + 2z_2^2)^2$	16	1	3	48
2	4	$(2z_2^4 + 2z_2^4)^1$	4	1	2	8
3	1	$(4z_4^1)^4$	0	2	1	0
3	2	$(4z_4^1)^2(4z_4^2)^1$	0	2	2	0
3	3	$(4z_4^2)^2$	0	2	3	0
3	4	$(4z_4^4)^1$	4	2	2	16

$$\frac{512}{8 * 4} = \mathbf{16}$$



Rysunek 15 - Przykłady użycia mojego wzoru (4)

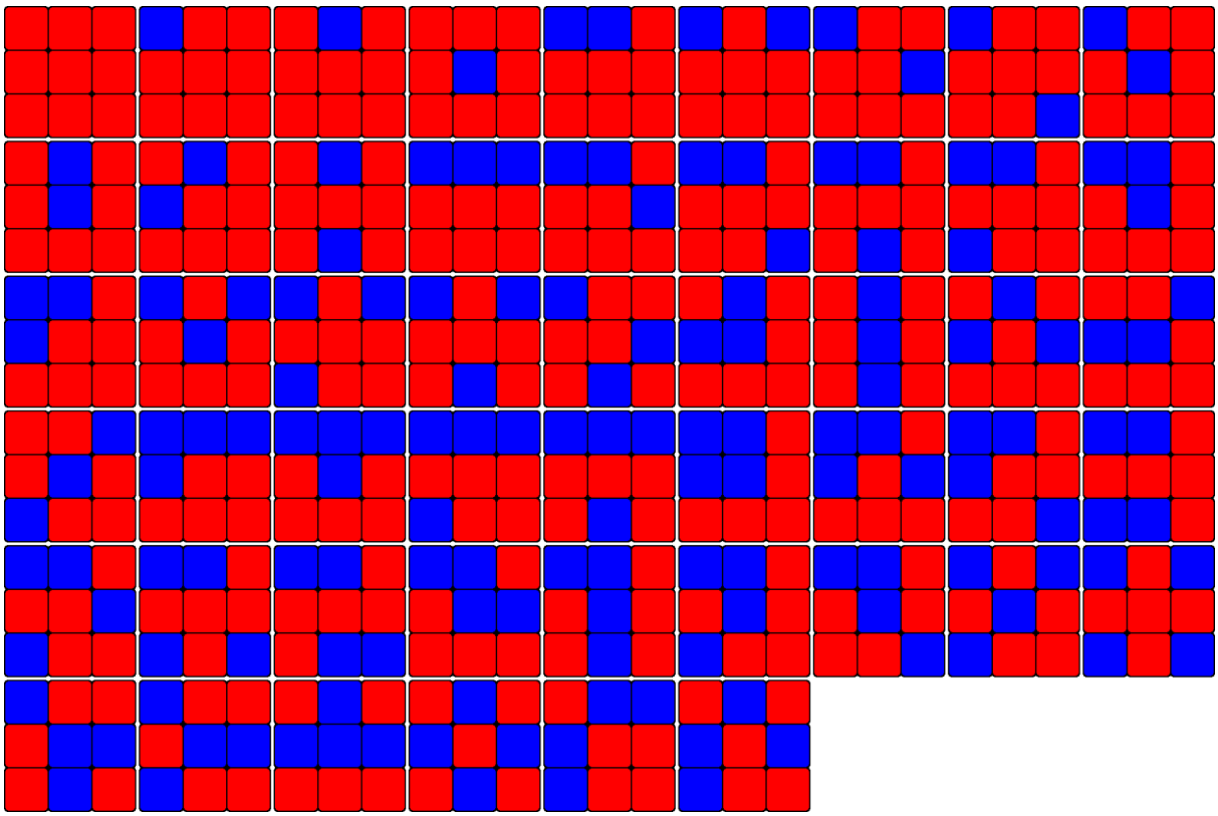
Możemy w ten sposób rozwiązać również problem z pierwszego rozdziału.

$G = D_4$ $\quad$ $X =$ kratki w układzie kratek 3x3

$H = C_2$ $\quad$ $Y = 2$ kolory (czerwony i niebieski)

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$\lvert[h]\rvert$	$\lvert[g]\rvert$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(z_1^1 + z_1^1)^9$	512	1	1	512
1	2	$(z_1^1 + z_1^1)^3(z_1^2 + z_1^2)^3$	64	1	4	256
1	3	$(z_1^1 + z_1^1)^1(z_1^2 + z_1^2)^4$	32	1	1	32
1	4	$(z_1^1 + z_1^1)^1(z_1^4 + z_1^4)^2$	8	1	2	16
2	1	$(2z_2^1)^9$	0	1	1	0
2	2	$(2z_2^1)^3(2z_2^2)^3$	0	1	4	0
2	3	$(2z_2^1)^1(2z_2^2)^4$	0	1	1	0
2	4	$(2z_2^1)^1(2z_2^4)^2$	0	1	2	0

$$\frac{816}{8} = \mathbf{51}$$



Rysunek 16 - Przykłady użycia mojego wzoru (5)

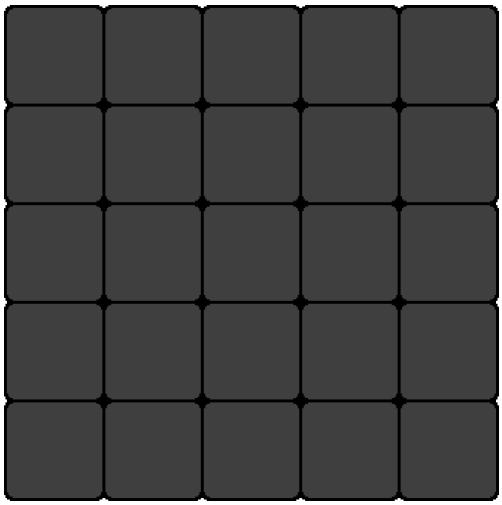
Liczenie za pomocą tabelki z klasami abstrakcji bardzo pomaga przy małych grupach. Natomiast jeżeli chcemy obliczyć wynik z grupami o większych mocach używając tabelki to zajęłoby to bardzo dużo czasu. Na przykład przy $G = O$, $H = S_8$, $X =$ wierzchołki sześcianu i $Y = 8$ kolorów tabelka miałaby 133 wiersze. Aby móc poradzić sobie z tym przykładem napisałem krótki (tylko 576 linii w C#) program komputerowy, który na podstawie informacji o rozkładzie G i H na klasy równoważne potrafi obliczać wyniki ze wzoru. W ten sposób udało mi się policzyć, że powyższy przykład z wierzchołkami sześcianu i ośmioma kolorami ma 186 unikalnych kolorowań. Za pomocą tego programu policzyłem jeszcze kilka innych przykładów, ale żaden z nich nie jest zbyt interesujący. Oprócz tego napisałem dwa kolejne programy: jeden do liczenia tych samych wartości ale poprzez zliczanie kolorowań jedno po drugim (był on potrzebny do sprawdzenia poprawności pierwszego programu; 1582 linii) oraz drugi, który oblicza wartości dla D-wymiarowego układu kratek o boku N (interpretowany jako D-wymiarowy sześcian) z C kolorami (ale bez brania pod uwagę symetrii kolorów). Ostatni program (408 linii) jest o wiele szybszy od dwóch poprzednich, więc był bardzo przydatny przy wyprowadzaniu wzoru przedstawionego w rozdziale *IV.2*. Wszystkie te programy zamieszczam w chmurze. Linki do nich zamieszczam w bibliografii.

IV. Użycie wzoru na problemach z parametrami

IV.1. Układ kratek n x n

Mając już działające narzędzie do rozwiązywania problemów z kolorowaniem możemy spróbować wyprowadzić wzór na ciąg A182044 (wymieniony na początku drugiego rozdziału: $1, 4, 51, \ldots$). Długość boku układu kratek będziemy oznaczać jako n. Zauważmy, że G, H oraz Y są stałe przy każdym n ($G = D_4$, $H = C_2$, $Y = 2$ kolory (czerwony i niebieski)), natomiast X jest zmienne ($X =$ układ kratek nxn). Aby skorzystać ze wzoru musimy znać typ cykliczny każdej klasy abstrakcji w gX oraz jej moc. Spróbujmy więc wyprowadzić wzór na typy cykliczne tych klas. Dla uproszczenia w rysunkach wykorzystuję układ, dla którego $n = 5$.

g_1 – symetria neutralna

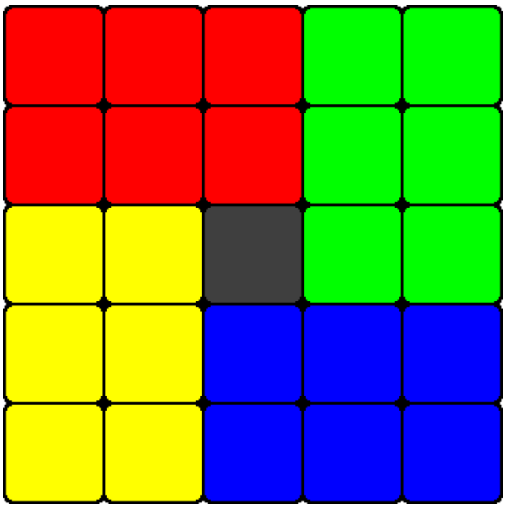


Rysunek 17 - symetria neutralna - model (2D)

Symetria ta pozostawia cały układ w takiej samej pozycji, czyli żadna kratka się nie rusza. Oznacza to, że występują tylko cykle długości 1 (każda czarna kratka wraca od razu na swoje miejsce), a ilość takich cykli to ilość kratek czyli n^2.

$$Ct(g_1X) = \langle n^2 \rangle$$

g_2 – obrót o $90°$ w prawo

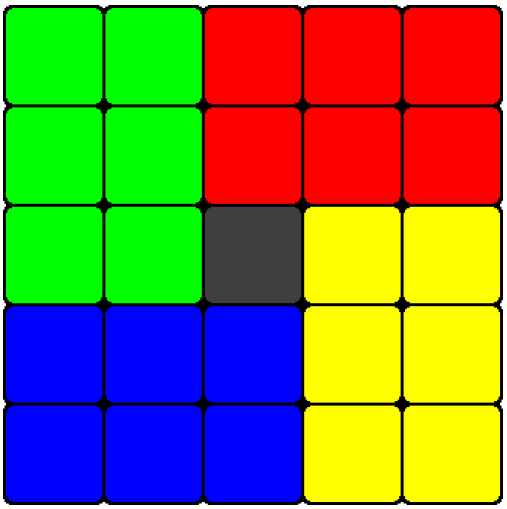


Rysunek 18 - obrót o $90°$ w prawo - model (2D)

Wszystkie kratki obracane są o $90°$, więc po 4 obrotach wracają do punktu wyjścia. Symetria ta tworzy więc $\frac{n^2}{4}$ cykli długości 4 (kratki pokolorowane na czerwono zmieniają swoje położenia na kratki pokolorowane na zielono, kratki zielona przechodzą na niebieskie, niebieskie na żółte i żółte z powrotem na czerwone). Istnieje jednak jeden wyjątek. Jeżeli n jest nieparzyste to istnieje kratka na samym środku układu, która pod każdą symetrią zostaje w tym samym miejscu (tworzy cykl o długości 1 – czarny).

$$Ct(g_2X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, 0, 0, \frac{n^2}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1, 0, 0, \frac{n^2 - 1}{4} \rangle \end{cases}$$

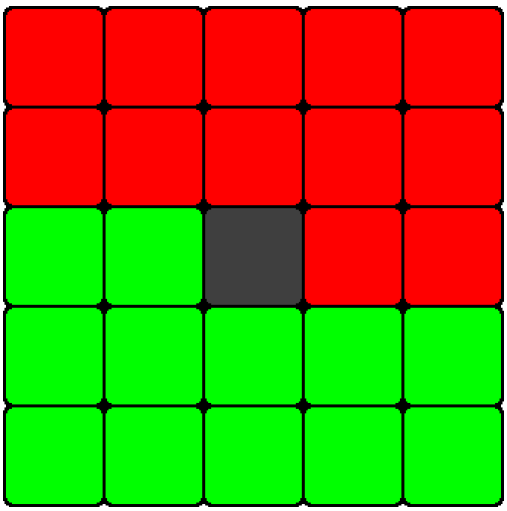
g_3 – obrót o $90°$ w lewo



Rysunek 19 - obrót o $90°$ w lewo - model (2D)

Wynik dokładnie taki sam jak przy g_2.

g_4 – obrót o $180°$

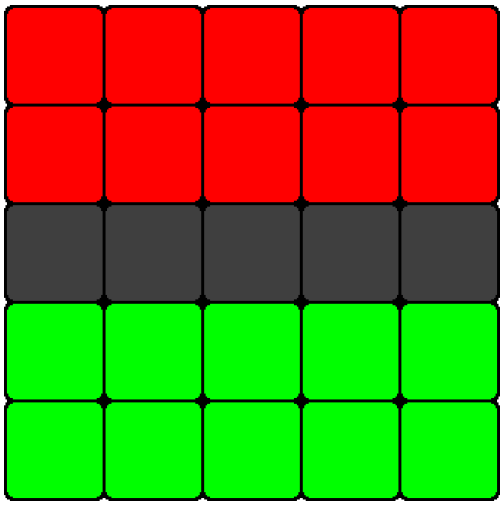


Rysunek 20 - obrót o 180° - model (2D)

Po dwóch obrotach kratki wracają na swoje miejsce (czerwony na zieloni i zielony na czerwony), oczywiście poza kratką w środku przy n nieparzystym, która jak zwykle zostaje na swoim miejscu (czarny). Więc:

$$Ct(g_4X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0, \frac{n^2}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle 1, \frac{n^2-1}{2} \rangle \end{cases}$$

g_5 – odbicie poziome

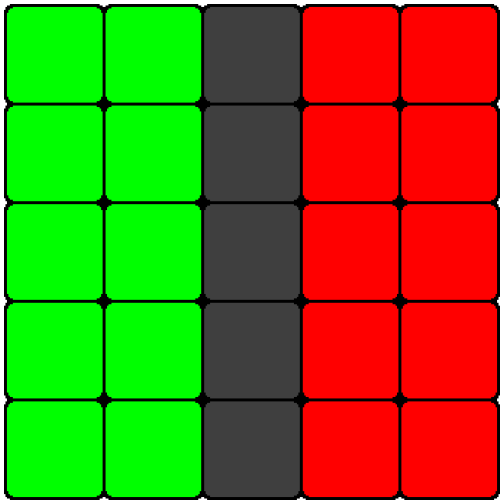


Rysunek 21 - odbicie poziome - model (2D)

Gdy n jest parzyste wszystkie kratki po dwóch odbiciach wracają na swoje miejsce, czyli tworzą cykle o mocy 2 (czerwony na zielony i zielony na czerwony). Natomiast przy n nieparzystym wszystkie kratki na osi symetrii tworzą cykle o długości 1 (czarny).

$$Ct(g_5X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^2}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle n, \frac{n^2 - n}{2} \rangle \end{cases}$$

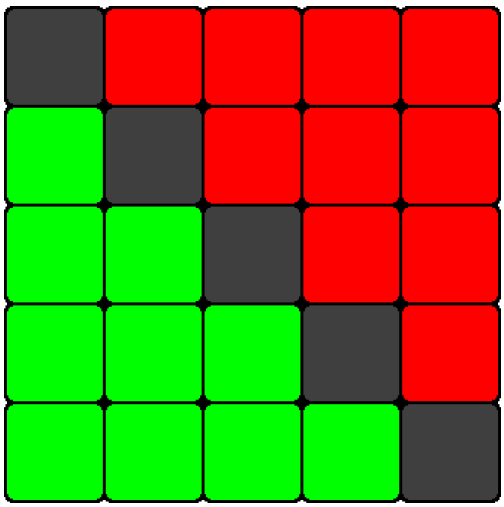
g_6 – odbicie pionowe



Rysunek 22 - odbicie pionowe - model (2D)

Wynik taki sam jak przy g_5.

g_7 – odbicie po przekątnej

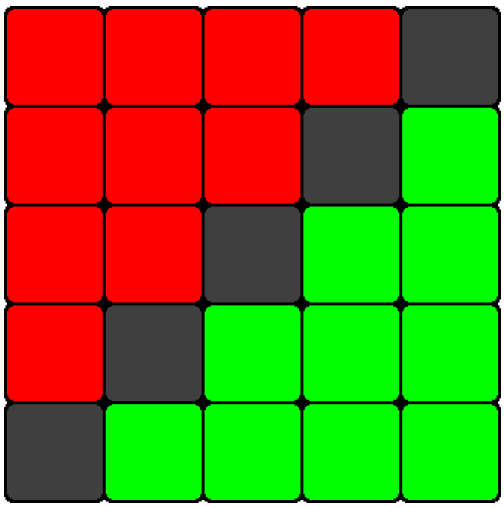


Rysunek 23 - odbicie po przekątnej - model (2D)

Wszystkie kratki po dwóch odbiciach wracają na swoje miejsce (czerwony na zielony i zielony na czerwony), poza kratkami znajdującymi się na przekątnej, które pozostają nienaruszone (czarny).

$$Ct(g_7) = \langle n, \frac{n^2 - n}{2} \rangle$$

g_8 – odbicie po drugiej przekątnej



Rysunek 24 - odbicie po drugiej przekątnej - model (2D)

Wynik taki sam jak przy g_7.

Znając już typy cykliczne każdej symetrii możemy skonstruować klasy równoważne dla tego G i X:

$G = D_4$ $\qquad$ $X =$ układ kratek nxn

$|[g_1]| = 1$ $\qquad$ $Ct(g_1X) = (n^2)$

$|[g_2]| = 2$ $\qquad$ $Ct(g_2X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, 0, 0, \frac{n^2}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1, 0, 0, \frac{n^2-1}{4} \rangle \end{cases}$

$|[g_4]| = 1$ $\qquad$ $Ct(g_4X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^2}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1, \frac{n^2-1}{2} \rangle \end{cases}$

$|[g_5]| = 2$ $\qquad$ $Ct(g_5X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^2}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle n, \frac{n^2-n}{2} \rangle \end{cases}$

$|[g_7]| = 2$ $\qquad$ $Ct(g_7X) = \langle n, \frac{n^2-n}{2} \rangle$

Następnie podstawiamy je do tabelki. Ze względu na fakt, że posługujemy się tu już parametrem (n) – a nie tylko liczbami – kolumna N oraz $N|[h]||[g]|$ są szersze, więc muszę usunąć kolumny $|[h]|$ i $|[g]|$, aby zrobić na nie miejsce.

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	N	$N\|[h]\|\|[g]\|$
1	1	$(z_1^1+z_1^1)^{n^2}$	2^{n^2}	2^{n^2}
1	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (z_1^4+z_1^4)^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to (z_1^1+z_1^1)^1(z_1^4+z_1^4)^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 2^{\frac{n^2+3}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2*2^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 2*2^{\frac{n^2+3}{4}} \end{cases}$
1	4	$\begin{cases} 2 \mid n \to (z_1^2+z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (z_1^1+z_1^1)^1(z_1^2+z_1^2)^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2^{\frac{n^2+1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2^{\frac{n^2+1}{2}} \end{cases}$
1	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (z_1^2+z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (z_1^1+z_1^1)^n(z_1^2+z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2^{\frac{n^2+n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2*2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2*2^{\frac{n^2+n}{2}} \end{cases}$
1	7	$(z_1^1+z_1^1)^n(z_1^2+z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}}$	$2^{\frac{n^2+n}{2}}$	$2*2^{\frac{n^2+n}{2}}$
2	1	$(2z_2^1)^{n^2}$	0	0
2	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^4)^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^1(2z_2^4)^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2*2^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	4	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^1(2z_2^2)^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^n(2z_2^2)^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2*2^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	7	$(2z_2^1)^n(2z_2^2)^{\frac{n^2-n}{2}}$	0	0

Możemy teraz dodać ostatnią kolumnę i podzielić wszystko przez $|G||H| = 8*2 = 16$, dzięki czemu uzyskujemy wzór:

$$f(n) = \begin{cases} 2|n \to \frac{1}{16}\left(2^{n^2} + 2*2^{\frac{n^2}{4}} + 2^{\frac{n^2}{2}} + 2*2^{\frac{n^2}{2}} + 2*2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2*2^{\frac{n^2}{4}} + 2^{\frac{n^2}{2}} + 2*2^{\frac{n^2}{2}}\right) \\ 2 \nmid n \to \frac{1}{16}\left(2^{n^2} + 2*2^{\frac{n^2+3}{4}} + 2^{\frac{n^2+1}{2}} + 2*2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2*2^{\frac{n^2+n}{2}}\right) \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} 2 \mid n \to \frac{1}{16}\left(2^{n^2} + 4*2^{\frac{n^2}{4}} + 6*2^{\frac{n^2}{2}} + 2*2^{\frac{n^2+n}{2}}\right) \\ 2 \nmid n \to \frac{1}{16}\left(2^{n^2} + 4*2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2^{\frac{n^2+1}{2}} + 2*2^{\frac{n^2+3}{4}}\right) \end{cases}$$

Zamiast zapisywać wzór na przypadki możemy zdefiniować go na dwa sposoby – raz na liczbach parzystych i raz na liczbach nieparzystych. Czyli zamiast n używamy $2k$ lub $2k+1$. Po wszystkich koniecznych przekształceniach wygląda to następująco:

$$f(2k) = \frac{1}{16}\left(2^{4k^2} + 2^{k^2+2} + 3*2^{2k^2+1} + 2^{2k^2+k+1}\right)$$

$$f(2k+1) = \frac{1}{16}\left(2^{4k^2+4k+1} + 2^{2k^2+3k+3} + 2^{2k^2+2k+1} + 2^{2k^2+2k+3}\right)$$

Wzory te są równoważne ze wzorami na ten ciąg zawartymi w OEIS. Tylko teraz pozostaje pytanie: skąd na OEIS wzór, którego wyprowadzenie wymaga użycia narzędzia, które dopiero odkryłem. Otóż okazuje się, że istnieją dwie grupy symetrii kolorów, do których moje narzędzie nie jest potrzebne. Są to: grupa trywialna (równoważna z brakiem symetrii kolorów) oraz C_2 (można przekształcić symetrię kolorów na symetrię przestrzenną i zastosować Lemat Burnside'a). Spróbujmy więc zrobić to samo, tyle że już na grupie, której nie da się tak uprościć. Na przykład S_3 (czyli zwiększamy ilość kolorów o jeden (np. zielony)). Klasy równoważne mamy już wyliczone, więc wystarczy podstawić do tabelki (usuwam również kolumnę N oraz upraszczam najbardziej wewnętrzne wielomiany) i wyliczyć wzór.

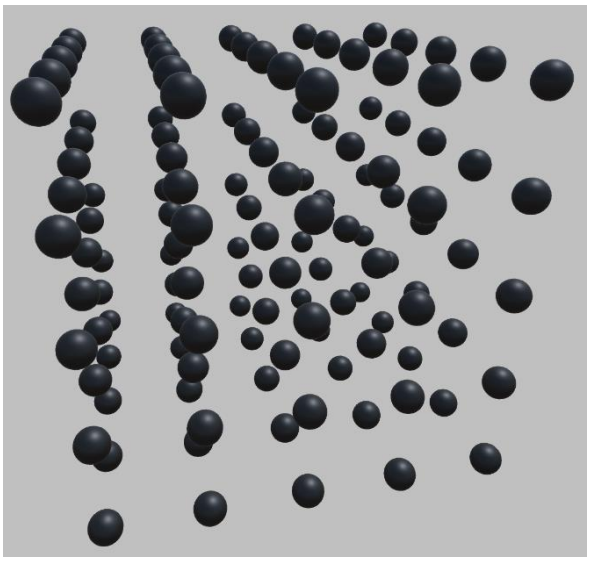
$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(3z_1^1)^{n^2}$	3^{n^2}
1	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_1^4)^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to (3z_1^1)^1(3z_1^4)^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2 * 3^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 2 * 3^{\frac{n^2+3}{4}} \end{cases}$
1	4	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (3z_1^1)^1(3z_1^2)^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 3^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 3^{\frac{n^2+1}{2}} \end{cases}$
1	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (3z_1^1)^n(3z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2 * 3^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2 * 3^{\frac{n^2+n}{2}} \end{cases}$
1	7	$(3z_1^1)^n(3z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}}$	$2 * 3^{\frac{n^2+n}{2}}$
2	1	$(2z_2^1 + z_1^1)^{n^2}$	3
2	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^4 + z_1^4)^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1 + z_1^1)^1(2z_2^4 + z_1^4)^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 3^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to 6 * 3^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$
2	4	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2 + z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1 + z_1^1)^1(2z_2^2 + z_1^2)^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 3 * 3^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 3 * 3^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$
2	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2 + z_1^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1 + z_1^1)^n(2z_2^2 + z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 3^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to 6 * 3^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$
2	7	$(2z_2^1 + z_1^1)^n(2z_2^2 + z_1^2)^{\frac{n^2-n}{2}}$	$6 * 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
3	1	$(3z_3^1)^{n^2}$	0
3	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_3^4)^{\frac{n^2}{4}} \\ 2 \nmid n \to (3z_3^1)^1(3z_3^4)^{\frac{n^2-1}{4}} \end{cases}$	0
3	4	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_3^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (3z_3^1)^1(3z_3^2)^{\frac{n^2-1}{2}} \end{cases}$	0
3	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (3z_3^2)^{\frac{n^2}{2}} \\ 2 \nmid n \to (3z_3^1)^n(3z_3^2)^{\frac{n^2-n}{2}} \end{cases}$	0
3	7	$(3z_3^1)^n(3z_3^2)^{\frac{n^2-n}{2}}$	0

$$f(n) = \begin{cases} 2|n \to \frac{1}{48}\left(3^{n^2} + 8 * 3^{\frac{n^2}{4}} + 4 * 3^{\frac{n^2+2}{2}} + 2 * 3^{\frac{n^2+n}{2}} + 2 * 3^{\frac{n^2-n+2}{2}} + 3\right) \\ 2 \nmid n \to \frac{1}{48}\left(3^{n^2} + 4 * 3^{\frac{n^2+3}{4}} + 2 * 3^{\frac{n^2+1}{2}} + 4 * 3^{\frac{n^2+n}{2}} + 4 * 3^{\frac{n^2-n+2}{2}} + 3\right) \end{cases}$$

IV.2. Układ kratek n x n x n

Potrafiąc już tworzyć tego typu wzory postanowiłem zmierzyć się z trochę trudniejszym wyzwaniem. X – układ kratek $nxnxn$ oraz $G = O$ dla dwóch lub trzech kolorów pod symetryczną grupą symetrii. Ponownie jak poprzednio musimy zacząć od klasyfikacji klas abstrakcji grupy G. Poniżej przedstawiam sposób w jaki za pierwszym razem klasyfikowałem te klasy oraz do każdej z nich opis gdzie punkty (kratki) w tym układzie (przedstawione jako kule, aby wszystkie były widoczne) są ukazane po zastosowaniu symetrii. Nie należy interpretować poniższych modeli jako kolorowania układu kratek n x n x n.

$[g_1]$ – symetria neutralna $|[g_1]| = 1$

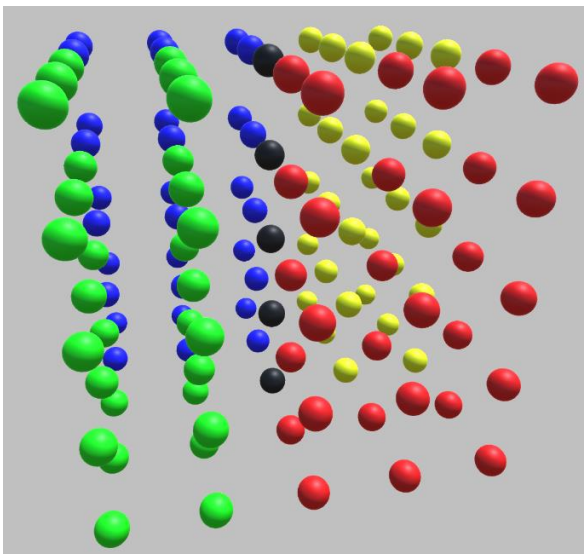


Rysunek 25 - symetria neutralna - model (3D)

Wszystkie punkty pozostają w tej samej pozycji.

$$Ct(g_1X) = \langle n^3 \rangle$$

$[g_2]$ – obrót o $90°$ względem ściany[2] $|[g_2]| = 6$



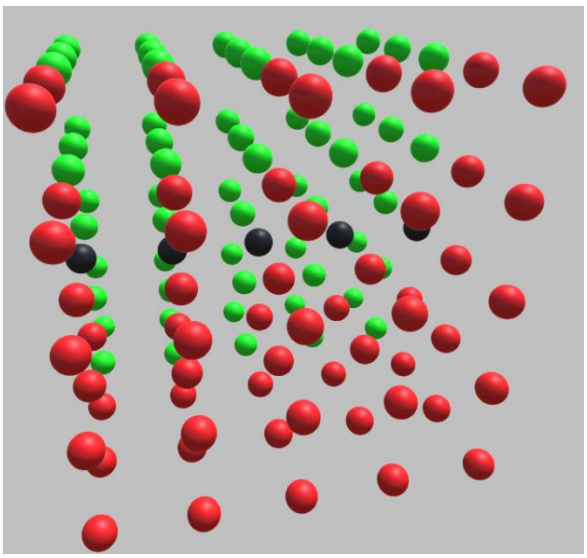
Rysunek 26 - obrót o $90°$ względem ściany - model (3D)

Przy n parzystym wszystkie punkty wracają na swoje miejsce po czterech iteracjach. To znaczy punkty pokolorowane na czerwono zmieniają swoje położenie na punkty zielone, zielone na niebieskie, niebieskie na żółte i żółte z powrotem na czerwone. Natomiast przy n nieparzystym na środku ściany względem której sześcian jest obracany istnieje kolumna punktów tworzących cykle o długości 1 (czarne).

$$Ct(g_2X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0,0,0,\frac{n^3}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle n,0,0,\frac{n^3-n}{4} \rangle \end{cases}$$

[2] Przez obrót względem ściany rozumiem obrót względem osi przechodzącej przez środek ściany i będącej do niej prostopadłej

$[g_3]$ – obrót o 180° względem ściany $|[g_3]| = 3$

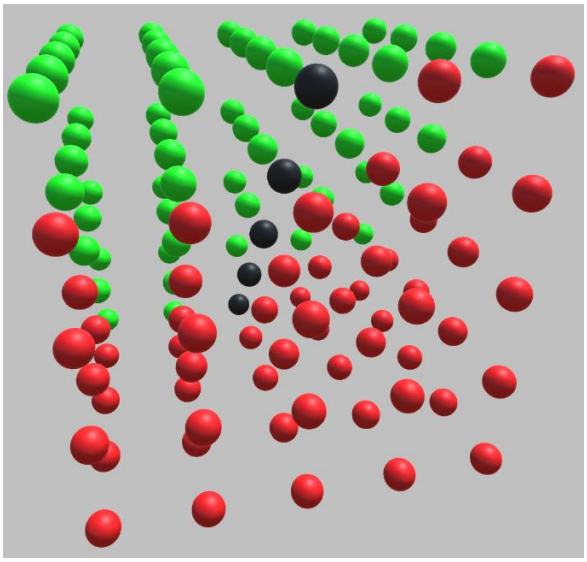


Rysunek 27 - obrót o 180° względem ściany - model (3D)

Podobnie jak przy g_2, tyle że zamiast czterech iteracji wszystko wraca na swoje miejsce po dwóch. Czerwona na zielone i zielone z powrotem na czerwone.

$$Ct(g_3X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle n, \frac{n^3 - n}{2} \rangle \end{cases}$$

$[g_4]$ – obrót o 180° względem krawędzi[3] $|[g_4]| = 6$



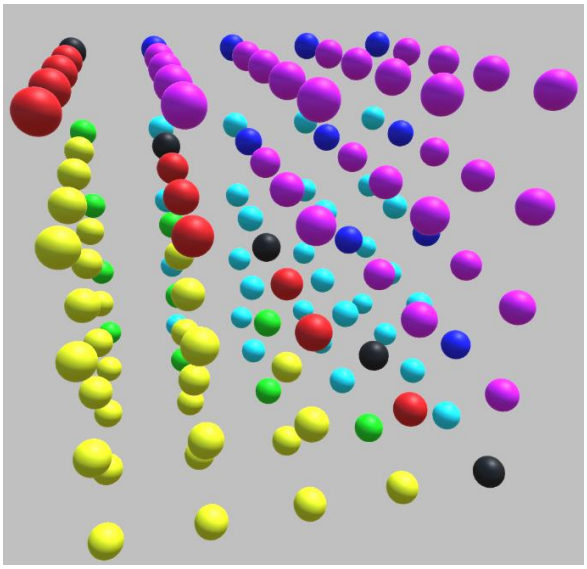
Rysunek 28 - obrót o 180° względem krawędzi - model (3D)

[3] Przez obrót względem krawędzi rozumiem obrót względem osi przecinającej daną krawędź w połowie pod kątem 135° do ściany przylegającej do tej krawędzi.

Przy n parzystym wszystkie punkty tworzą cykle o długości 2. Czerwone są przemieszczane na zielone i zielone na czerwone. A gdy n jest nieparzyste punkty na osi symetrii tworzą cykle długości 1 (czarne). Czyli typ cykliczny wygląda tak samo jak przy g_3.

$$Ct(g_4X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0, \frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle n, \frac{n^3 - n}{2} \rangle \end{cases}$$

$[g_5]$ – obrót o $120°$ względem narożnika[4] $|[g_5]| = 8$



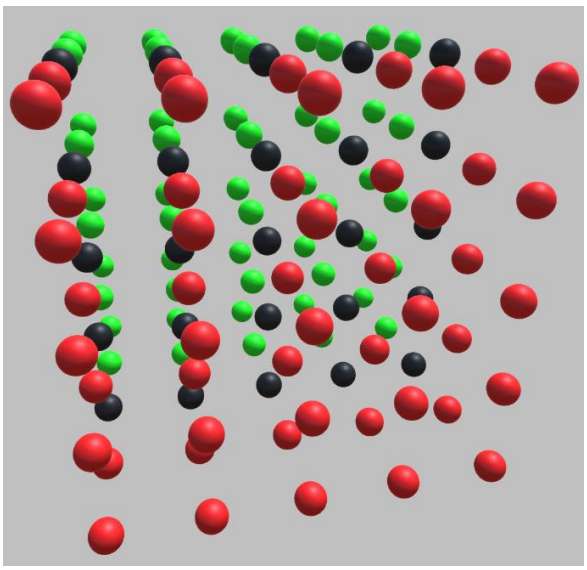
Rysunek 29 - obrót o $120°$ względem narożnika - model (3D)

Niezależnie od tego czy n jest parzyste czy nieparzyste, wszystkie punkty (poza punktami na osi obrotu) wracają na swoje miejsce po trzech iteracjach. Żółty na różowy, różowy na błękitny, błękitny na żółty oraz czerwony na niebieski, niebieski na zielony i zielony na czerwony. Natomiast punkty na osi obrotu tworzą cykle długości 1 (czarne).

$$Ct(g_5X) = \langle n, 0, \frac{n^3 - n}{3} \rangle$$

[4] Obrót względem narożnika (wierzchołka) rozumiem obrót względem osi zawierającej długą przekątną sześcianu

$[g_6]$ – odbicie lustrzane[5] $|[g_6]| = 1$



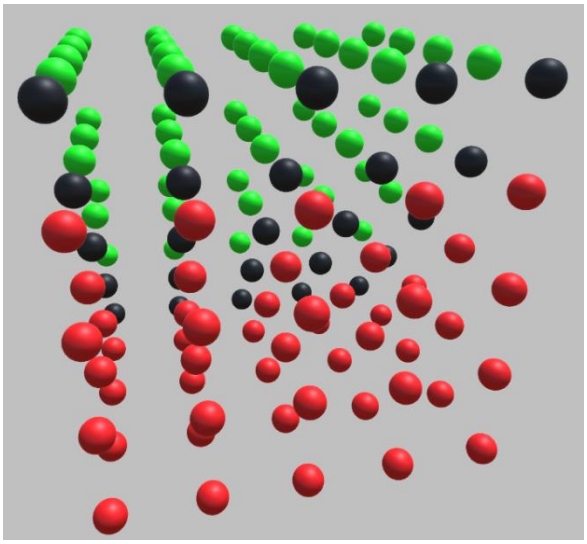
Rysunek 30 - odbicie lustrzane - model (3D)

Przy n parzystym wszystkie punkty tworzą cykle długości 2 (zielony na czerwony i czerwony na zielony). Natomiast przy n nieparzystym punkty na płaszczyźnie odbicia tworzą cykle długości 1 (czarne).

$$Ct(g_6X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle n^2, \frac{n^3 - n^2}{2} \rangle \end{cases}$$

[5] Przez odbicie lustrzane rozumiem odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do czterech ścian i zarazem równoległej do dwóch pozostałych.

$[g_7]$ – odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia $|[g_7]| = 4$

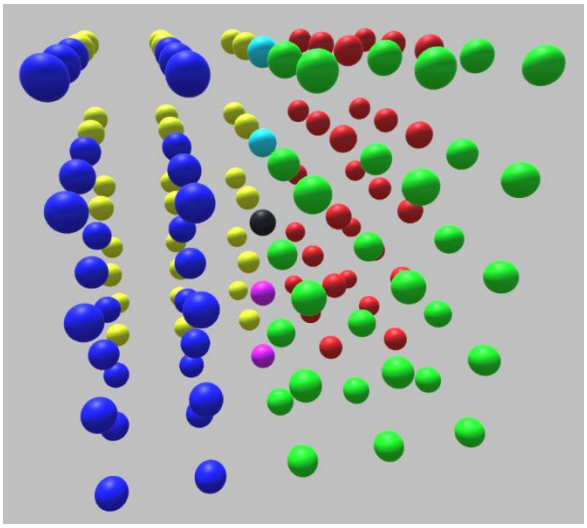


Rysunek 31 - odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D)

Wszystkie punkty poza jedną płaszczyzną tworzą cykle długości 2 (czerwony na zielony i zielony na czerwony), a punkty na płaszczyźnie tworzą cykle długości 1 (czarne).

$$Ct(g_7X) = \langle n^2, \frac{n^3 - n^2}{2} \rangle$$

$[g_8]$ – odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia $|[g_8]| = 2$

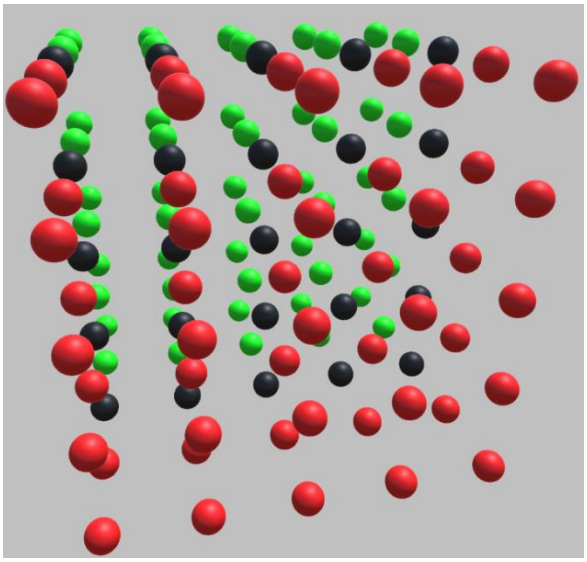


Rysunek 32 - odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia - model (3D)

Wszystkie punkty poza prostą przechodzącą przez środek tworzą cykle długości 4. Czyli czerwone na niebieskie, niebieskie na żółte, żółte na zielone i zielone na czerwone. Jeżeli n jest nieparzyste to punkty na prostej przechodzącej przez środek tworzą cykle o mocy 2 (błękitny na różowy i różowy na błękitny) oraz 1 punkt stały o mocy 1 (czarny).

$$Ct(g_8X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,0,0,\frac{n^3}{4}\rangle \\ 2 \nmid n \to \langle 1,\frac{n-1}{2},0,\frac{n^3-n}{4}\rangle \end{cases}$$

$[g_9]$ – odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia $|[g_9]| = 2$

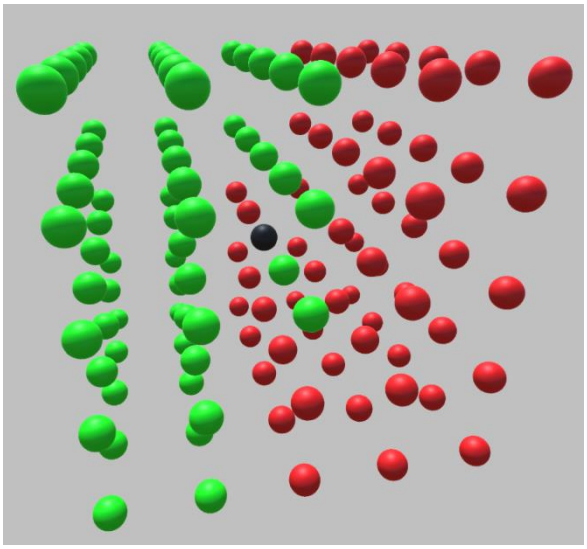


Rysunek 33 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D)

Sytuacja równoważna do g_6.

$$Ct(g_9X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,\frac{n^3}{2}\rangle \\ 2 \nmid n \to \langle n^2,\frac{n^3-n^2}{2}\rangle \end{cases}$$

$[g_{10}]$ – odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia $|[g_{10}]| = 1$

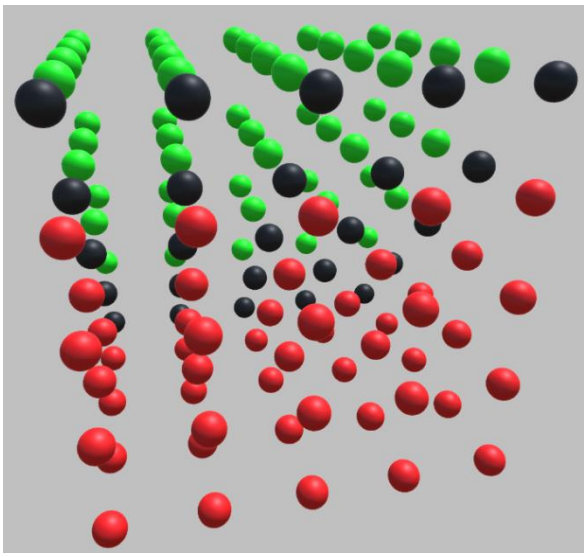


Rysunek 34 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia - model (3D)

Przy n parzystym wszystkie punkty tworzą cykle długości 2 (zielony na czerwony i czerwony na zielony). Natomiast przy n nieparzystym punkt w samym środku sześcianu tworzy cykl długości 1 (czarny).

$$Ct(g_{10}X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0, \frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1, \frac{n^3 - 1}{2} \rangle \end{cases}$$

$[g_{11}]$ – odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi prostopadłej do płaszczyzny odbicia $|[g_{11}]| = 2$

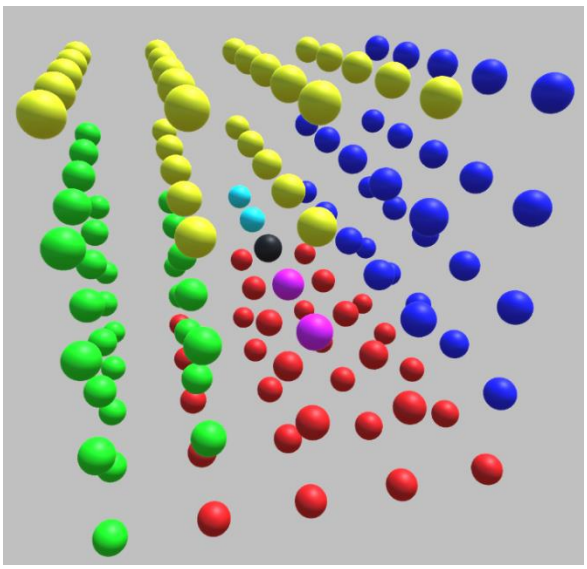


Rysunek 35 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D)

Sytuacja równoważna do g_7.

$$Ct(g_{11}X) = \langle n^2, \frac{n^3 - n^2}{2} \rangle$$

$[g_{12}]$ – odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi równoległej do płaszczyzny odbicia $|[g_{12}]| = 4$

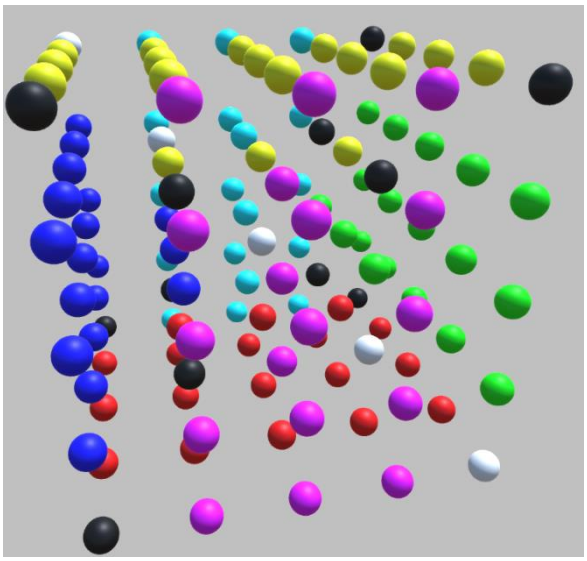


Rysunek 36 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi równoległej do płaszczyzny odbicia (3D)

Sytuacja równoważna do g_8.

$$Ct(g_{12}) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0,0,0,\frac{n^3}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1,\frac{n-1}{2},0,\frac{n^3-n}{4} \rangle \end{cases}$$

$[g_{13}]$ – odbicie lustrzane i obrót o 120° względem narożnika $|[g_{13}]| = 8$



Rysunek 37 - odbicie lustrzane i obrót o 120° względem narożnika - model (3D)

Gdy n jest parzyste punkty z trzech długich przekątnych sześcianu tworzą cykle długości 6 (czarne), a punkty z pozostałej przekątnej tworzą cykle długości 2 (białe). Pozostałe punkty tworzą cykle długości 6 (żółty na zielony, zielony na błękitny, błękitny na czerwony, czerwony na niebieski, niebieski na różowy, różowy na żółty). Natomiast gdy n jest nieparzyste punkt w środku tworzy cykl długości 1, a reszta jest niezmieniona.

$$Ct(g_{12}X) = \begin{cases} 2 \mid n \rightarrow \langle 0,\frac{n}{2},0,0,0,\frac{n^3-n}{6} \rangle \\ 2 \nmid n \rightarrow \langle 1,\frac{n-1}{2},0,0,0,\frac{n^3-n}{6} \rangle \end{cases}$$

Po przeprowadzeniu takiego podziału zauważyłem, że niektóre klasy nie są pełne i przez przypadek podzieliłem je na kilka mniejszych zbiorów. Na szczęście naprawienie tej pomyłki jest bardzo łatwe – wystarczy zdefiniować nowe klasy (mające takie same typy cykliczne jak powyżej), których moce są sumą mocy tych klas, które miały ten sam typ cykliczny. Oczywiście stosując taką metodę zmienia się numeracja klas. Dzięki temu powstają nam następujące klasy równoważne:

$$Ct(g_1X) = \langle n^3 \rangle \qquad |[g_1]| = 1$$

$$Ct(g_2X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,0,0,\frac{n^3}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle n, 0,0,\frac{n^3-n}{4} \rangle \end{cases} \qquad |[g_2]| = 6$$

$$Ct(g_3X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,\frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle n,\frac{n^3-n}{2} \rangle \end{cases} \qquad |[g_3]| = 9$$

$$Ct(g_4X) = \langle n, 0,\frac{n^3-n}{3} \rangle \qquad |[g_4]| = 8$$

$$Ct(g_5X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,\frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle n^2,\frac{n^3-n^2}{2} \rangle \end{cases} \qquad |[g_5]| = 3$$

$$Ct(g_6X) = \langle n^2,\frac{n^3-n^2}{2} \rangle \qquad |[g_6]| = 6$$

$$Ct(g_7X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,0,0,\frac{n^3}{4} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle 1,\frac{n-1}{2}, 0,\frac{n^3-n}{4} \rangle \end{cases} \qquad |[g_7]| = 6$$

$$Ct(g_8X) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,\frac{n^3}{2} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle 1,\frac{n^3-1}{2} \rangle \end{cases} \qquad |[g_8]| = 1$$

$$Ct(g_9) = \begin{cases} 2 \mid n \to \langle 0,\frac{n}{2}, 0,0,0,\frac{n^3-n}{6} \rangle \\ 2 \nmid n \to \langle 1,\frac{n-1}{2} ,0,0,0,\frac{n^3-n}{6} \rangle \end{cases} \qquad |[g_8]| = 8$$

$[h_n]$	$[g_n]$	Składnik dla klas $[h]$ i $[g]$	$N\lvert[h]\rvert\lvert[g]\rvert$
1	1	$(2z_1^1)^{n^3}$	2^{n^3}
1	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^4)^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)^n(2z_1^4)^{\frac{n^3-n}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to 6 * 2^{\frac{n^3+3n}{4}} \end{cases}$
1	3	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)^n(2z_1^2)^{\frac{n^3-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 9 * 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 9 * 2^{\frac{n^3+n}{2}} \end{cases}$
1	4	$(2z_1^1)^n(2z_1^3)^{\frac{n^3-n}{3}}$	$8 * 2^{\frac{n^3+2n}{3}}$
1	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)^{n^2}(2z_1^1)^{\frac{n^3-n^2}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 3 * 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 3 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} \end{cases}$
1	6	$(2z_1^1)^{n^2}(2z_1^2)^{\frac{n^3-n^2}{2}}$	$6 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}}$
1	7	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^4)^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)(2z_1^2)^{\frac{n-1}{2}}(2z_1^4)^{\frac{n^3-n}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to 6 * 2^{\frac{n^3+n+2}{4}} \end{cases}$
1	8	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)^1(2z_1^1)^{\frac{n^3-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 2^{\frac{n^3+1}{2}} \end{cases}$
1	9	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^2)^{\frac{n}{2}}(2z_1^6)^{\frac{n^3-n}{6}} \\ 2 \nmid n \to (2z_1^1)(2z_1^2)^{\frac{n-1}{2}}(2z_1^6)^{\frac{n^3-n}{6}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{6}} \\ 2 \nmid n \to 8 * 2^{\frac{n^3+2n+3}{6}} \end{cases}$
2	1	$(2z_2^1)^{n^3}$	0
2	2	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^4)^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^n(2z_2^4)^{\frac{n^3-n}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	3	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^n(2z_2^2)^{\frac{n^3-n}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 9 * 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	4	$(2z_2^1)^n(2z_2^3)^{\frac{n^3-n}{3}}$	0
2	5	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^{n^2}(2z_2^1)^{\frac{n^3-n^2}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 3 * 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	6	$(2z_2^1)^{n^2}(2z_2^2)^{\frac{n^3-n^2}{2}}$	0
2	7	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^4)^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)(2z_2^2)^{\frac{n-1}{2}}(2z_2^4)^{\frac{n^3-n}{4}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	8	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_1^2)^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)^1(2z_2^1)^{\frac{n^3-1}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 2^{\frac{n^3}{2}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$
2	9	$\begin{cases} 2 \mid n \to (2z_2^2)^{\frac{n}{2}}(2z_2^6)^{\frac{n^3-n}{6}} \\ 2 \nmid n \to (2z_2^1)(2z_2^2)^{\frac{n-1}{2}}(2z_2^6)^{\frac{n^3-n}{6}} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \mid n \to 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{6}} \\ 2 \nmid n \to 0 \end{cases}$

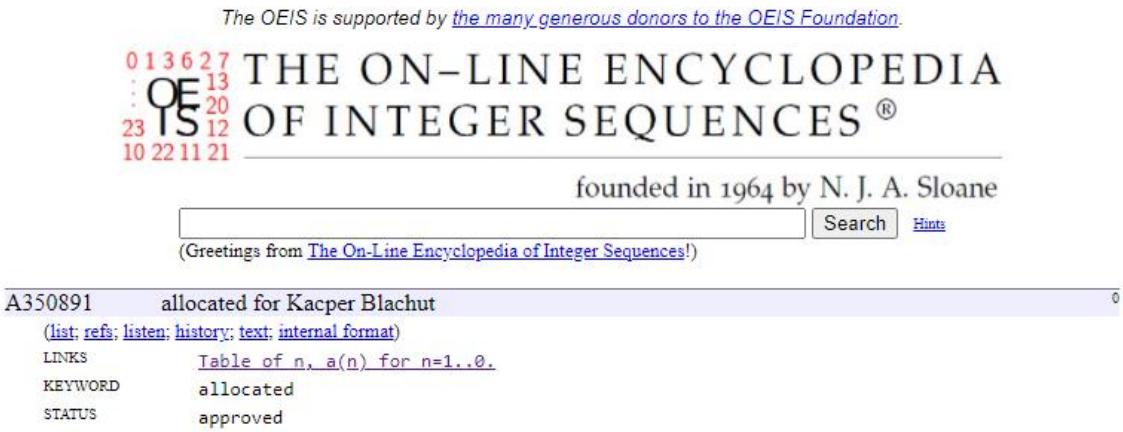
Następnie podstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$f(n) = \frac{1}{96}\begin{cases} 2 \mid n \rightarrow 2^{n^3} + 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} + 9 * 2^{\frac{n^3}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{3}} + 3 * 2^{\frac{n^3}{2}} + 6 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} + 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} + \\ 2^{\frac{n^3}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{6}} + 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} + 9 * 2^{\frac{n^3}{2}} + 3 * 2^{\frac{n^3}{2}} + 6 * 2^{\frac{n^3}{4}} + 2^{\frac{n^3}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{6}} \\ 2 \nmid n \rightarrow 2^{n^3} + 6 * 2^{\frac{n^3+3n}{4}} + 9 * 2^{\frac{n^3+n}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{3}} + 3 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} + 6 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} + \\ 6 * 2^{\frac{n^3+n+2}{4}} + 2^{\frac{n^3+1}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n+3}{6}} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{96}\begin{cases} 2 \mid n \rightarrow 2^{n^3} + 24 * 2^{\frac{n^3}{4}} + 26 * 2^{\frac{n^3}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{3}} + 6 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} + 16 * 2^{\frac{n^3+2n}{6}} \\ 2 \nmid n \rightarrow 2^{n^3} + 6 * 2^{\frac{n^3+3n}{4}} + 9 * 2^{\frac{n^3+n}{2}} + 8 * 2^{\frac{n^3+2n}{3}} + 9 * 2^{\frac{n^3+n^2}{2}} + 6 * 2^{\frac{n^3+n+2}{4}} + 2^{\frac{n^3+1}{2}} + \\ 8 * 2^{\frac{n^3+2n+3}{6}} \end{cases}$$

V. Zakończenie

Po wyprowadzeniu powyższego wzoru dla układu kratek n x n x n postanowiłem sprawdzić, czy ciąg powstały z powyższego wzoru (1,14,1426144, ...) jest na OEIS. Okazało się, że nikt go jeszcze tam nie opublikował, więc założyłem konto i dodałem ciąg na tę stronę. Jeżeli ciąg zostanie zatwierdzony to będzie on miał numer A350891.



Rysunek 38 - Mój ciąg na OEIS

Wszystkie przemyślenia zawarte w tej pracy są moja autorską koncepcją. Często wyniki moich rozważań były zbieżne z wynikami innych matematyków. Na przykład de Bruijn w swojej pracy ([5]) doszedł do podobnych wniosków co ja. Jednak jego wzór jest zupełnie nie podobny do mojego, ale liczy to samo.

$$\sum_{F \in \mathfrak{F}} W(F) = |G|^{-1} |H|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \sum_{f}^{*} W(f).$$

Rysunek 39 - Wzór De Bruijn'a

VI. Spis rysunków

Rysunek 1 – Układ kratek 3x3 5
Rysunek 2 – Dwa kolory (czerwony i niebieski) 5
Rysunek 3 – Przykładowe kolorowania 6
Rysunek 4 - Symetrie kwadratu na przykładowym kolorowaniu 6
Rysunek 5 - Symetria kolorów w kwadracie 7
Rysunek 6 - Przykłady kolorowań mających odpowiednio 8, 4, 2 obrazów pod działaniem różnych symetrii 8
Rysunek 7 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 3x3 (opracowanie własne) 9
Rysunek 8 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 2x2 10
Rysunek 9 - Wszystkie unikalne kolorowania układu kratek 1x1 10
Rysunek 10 - Przykładowe działanie grupy na zbiorze 18
Rysunek 11 – Podział liczby 8 na sumę liczb naturalnych 23
Rysunek 12 - Przykłady użycia mojego wzoru (1) 29
Rysunek 13 - Przykłady użycia mojego wzoru (2) 30
Rysunek 14 - Przykłady użycia mojego wzoru (3) 31
Rysunek 15 - Przykłady użycia mojego wzoru (4) 32
Rysunek 16 - Przykłady użycia mojego wzoru (5) 33
Rysunek 17 - symetria neutralna - model (2D) 35
Rysunek 18 - obrót o $90°$ w prawo - model (2D) 36
Rysunek 19 - obrót o $90°$ w lewo - model (2D) 36
Rysunek 20 - obrót o 180° - model (2D) 37
Rysunek 21 - odbicie poziome - model (2D) 37
Rysunek 22 - odbicie pionowe - model (2D) 38
Rysunek 23 - odbicie po przekątnej - model (2D) 38
Rysunek 24 - odbicie po drugiej przekątnej - model (2D) 39
Rysunek 25 - symetria neutralna - model (3D) 43
Rysunek 26 - obrót o $90°$ względem ściany - model (3D) 44
Rysunek 27 - obrót o $180°$ względem ściany - model (3D) 45
Rysunek 28 - obrót o $180°$ względem krawędzi - model (3D) 45
Rysunek 29 - obrót o $120°$ względem narożnika - model (3D) 46
Rysunek 30 - odbicie lustrzane - model (3D) 47
Rysunek 31 - odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D) 48
Rysunek 32 - odbicie lustrzane i obrót o $90°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia - model (3D) 48
Rysunek 33 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D) 49
Rysunek 34 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem ściany równoległej do płaszczyzny odbicia - model (3D) 50
Rysunek 35 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi prostopadłej do płaszczyzny odbicia - model (3D) 51

Rysunek 36 - odbicie lustrzane i obrót o $180°$ względem krawędzi równoległej do płaszczyzny odbicia (3D) 51
Rysunek 37 - odbicie lustrzane i obrót o $120°$ względem narożnika - model (3D) 52
Rysunek 38 - Mój ciąg na OEIS 56
Rysunek 39 - Wzór De Bruijn'a 56

VII. Bibliografia

[1] Analiza kombinatoryczna W. Lipski, W. Marek, PWN 1986

[2] Theory of groups of finite order (2nd ed.). William Burnside, Cambridge University Press. 1911

[3] https://groupprops.subwiki.org/

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/

[5] Generalization Of Polya's Fundamental Theorem In Enumerative Combinatorial Analysis, N. G. De Bruijn

Linki do własnych programów:

https://pastebin.com/mWHYXTtZ

https://pastebin.com/mrisyGC4

https://pastebin.com/dApfU9eB

VIII. Spis treści

I. Wprowadzenie 5

I.1. Od czego się zaczęło? 5

I.2. Elementarne rozwiązanie kombinatoryczne zadania 7

II. Uogólnienie, cele dalszego badania, pojęcia, definicje i używane oznaczenia 11

II.1. Pojęcia, definicje i używane oznaczenia 12

II.2. Przykłady grup działających na zbiorach i ich podział na klasy abstrakcji 22

III. Mój wzór 26

III.1. Wyprowadzenie wzoru 26

III.2. Proste przykłady użycia wzoru 28

IV. Użycie wzoru na problemach z parametrami 35

IV.1. Układ kratek n x n 35

IV.2. Układ kratek n x n x n 43

V. Zakończenie 56

VI. Spis rysunków 57

VII. Bibliografia 59

VIII. Spis treści 60