X Liceum Ogólnokształcące im. Komisji Edukacji Narodowej

Julia Stańczyk

Twierdzenie Cevy i Menelaosa oraz przykłady ich zastosowania

Praca matematyczna napisana pod opieką: mgr Daniela Danieluka

Kraków 2022

Spis treści

Wstęp **2**

1 Definicje i twierdzenia potrzebne do omówienia tematu **3**

2 Twierdzenie Menelaosa i przykłady jego zastosowania w zadaniach **6**

3 Twierdzenie Cevy i przykłady jego zastosowania w zadaniach **14**

Bibliografia **22**

Wstęp

Z geometrią płaską mamy styczność w szkole już od najmłodszych lat. Na początkowym etapie edukacji uczymy się rozróżniać figury, a w następnych latach dowiadujemy się jak można wykorzystać poznane własności w zadaniach. Geometria jest jednak obszerną dziedziną, przez co na poziomie podstawowym nie da się przedstawić wszystkich ciekawych zagadnień, które obejmuje. Właśnie dlatego praca ta jest poświęcona omówieniu dwóch niezwykłych twierdzeń: Menelaosa i Cevy.

Na początku, dla łatwiejszego zrozumienia omawianych zagadnień, autorka pracy przybliżyła parę twierdzeń oraz definicji, które będą wykorzystane w późniejszej części pracy.

Drugi rozdział dotyczy twierdzenia Menelaosa. Przedstawiona została wypowiedź twierdzenia, dowód oraz twierdzenie do niego odwrotne. Po omówieniu tego zagadnienia twórca pracy przeszedł do pokazania przykładów wykorzystania twierdzenia w zadaniach.

Ostatni rozdział poświęcony został twierdzeniu Cevy. Po przedstawieniu wypowiedzi twierdzenia, autorka zajęła się jego dowodem oraz twierdzeniem odwrotnym. W ostatniej części pracy zostały rozwiązane ciekawe zadania dotyczące omawianego tematu.

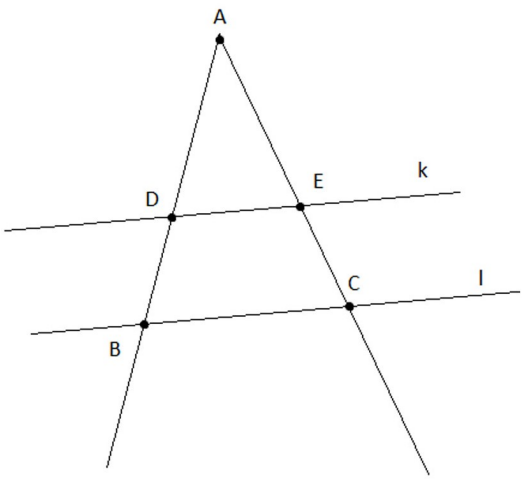
Rozdział 1

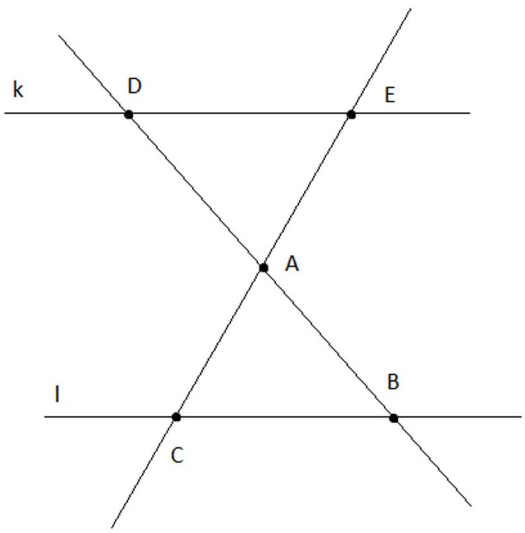
Definicje i twierdzenia potrzebne do omówienia tematu

Zanim zaczniemy szczegółowe omówienie tytułowych zagadnień zapoznamy się z niezbędnymi do zrozumienia dalszej części pracy definicjami oraz twierdzeniami. Będą to kolejno twierdzenie Talesa i wykorzystywane w przykładowych zadaniach pojęcie środkowej, pojęcie dwusiecznej, twierdzenie o dwusieczej oraz definicja czworokąta wypukłego.

Twierdzenie 1. *(**Talesa**) Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przetniemy dwiema prostymi równoległymi k i l, to*

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|DB|}, \ \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}, \ \frac{|AC|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BD|}.$$





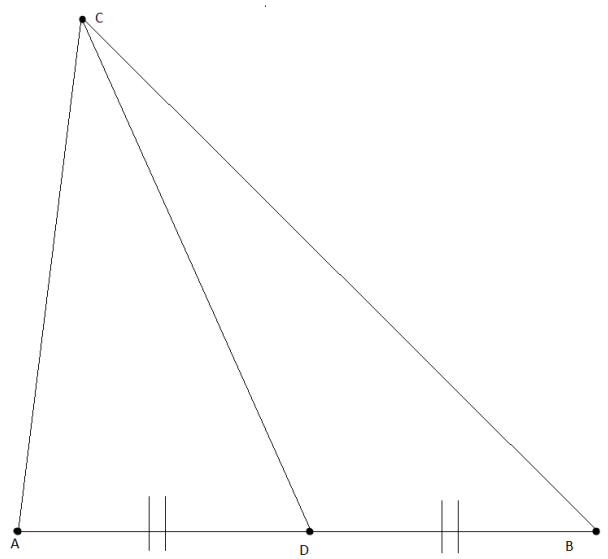
Wniosek 1. Przy założeniach z Twierdzenia Talesa prawdziwe są następujące równości

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$

Dowód. Zainteresowany czytelnik może znaleźć ciekawy dowód twierdzenia w jednej z pozycji bibliograficznych,([12]).

Kolejnym istotnym pojęciem do zrozumienia rozwiązania jednego z przykładowych zadań jest definicja środkowej w trójkącie.

Definicja 1. ***(środkowa trójkąta)*** Środkową w trójkącie nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

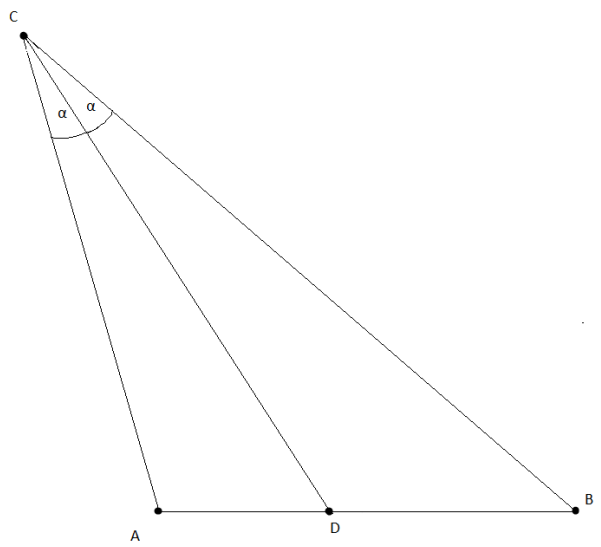


W pracy wykorzystamy również pojęcie dwusiecznej kąta oraz twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.

Definicja 2. ***(dwusieczna kąta)*** Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty równej miary.

Twierdzenie 2. ***(twierdzenie o dwusiecznej)*** *Niech AD będzie dwusieczną kąta przy wierzchołku C w trójkącie ABC. Wtedy*

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



Dowód. Zainteresowany czytelnik znajdzie dowód w jednej z pozycji bibliograficznych, ([2])

Warto wspomnieć, czym jest czworokąt wypukły. To pojęcie przyda się nam w prawidłowym rozważaniu jednego z przykładów.

Definicja 3. ***(czworokąt wypukły)*** Czworokątem wypukłym nazywamy czworokąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne są kątami wypukłymi, czyli mającymi miarę z przedziału $(0°; 180°)$.

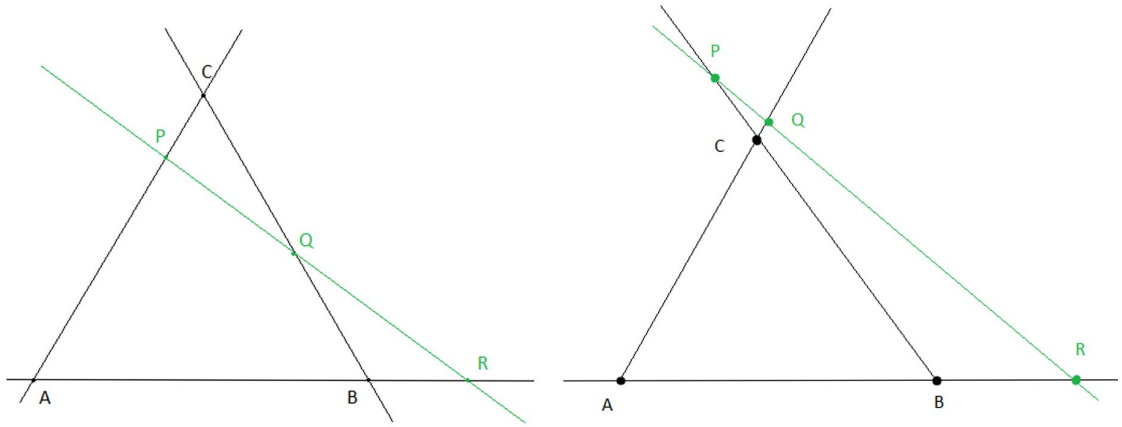
Rozdział 2

Twierdzenie Menelaosa i przykłady jego zastosowania w zadaniach

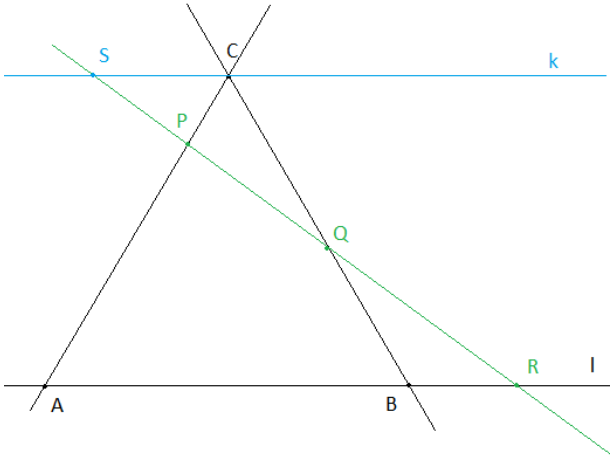
Po zapoznaniu się z przydatnymi definicjami i twierdzeniami możemy przystąpić do omówienia właściwego tematu pracy. Pierwszym zagadnieniem jest twierdzenie Menelaosa. W pierwszej kolejności skupimy się na treści twierdzenia i jego dowodzie.

Twierdzenie 3. *(**Menelaosa**) Dany jest trójkąt ABC i prosta PQR , przy czym punkty P, Q, R leżą na prostych zawierających boki tego trójkąta, ale nie są jego wierzchołkami. Wówczas*

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1.$$



Dowód. Prowadzimy prostą k, która zawiera wierzchołek C i jest równoległa do prostej l, zawierającej bok AB.



Z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BQ|}{|BR|} = \frac{|QC|}{|CS|}.$$

Przekształcając powyższe równanie wyznaczamy $|CS|$

$$|CS| = \frac{|QC| \cdot |BR|}{|BQ|}.$$

Z drugiej strony, korzystając również z twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$\frac{|CS|}{|CP|} = \frac{|AR|}{|AP|}.$$

Ponownie wznaczamy długość odcinka $|CS|$

$$|CS| = \frac{|AR| \cdot |CP|}{|AP|}.$$

Przyrównując otrzymane wyżej równości, mamy

$$\frac{|AR| \cdot |CP|}{|AP|} = \frac{|QC| \cdot |BR|}{|BQ|}.$$

Dzieląc stronami równanie przez $|QC| \cdot |BR|$ dostajemy

$$\frac{|AR| \cdot |CP|}{|AP| \cdot |BR| \cdot |QC|} = \frac{1}{|BQ|}.$$

Ostatecznie po wymnożeniu przez $|BQ|$ otrzymujemy tezę

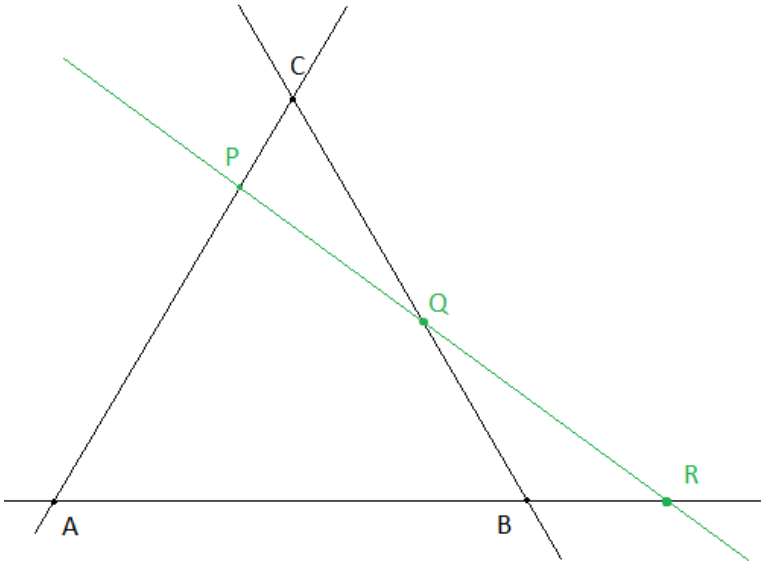
$$\frac{|AR| \cdot |CP| \cdot |BQ|}{|AP| \cdot |BR| \cdot |QC|} = 1.$$

W przypadku gdy punkty P, Q, R leżą na przedłużeniach boków trójkąta dowód przebiega analogicznie.

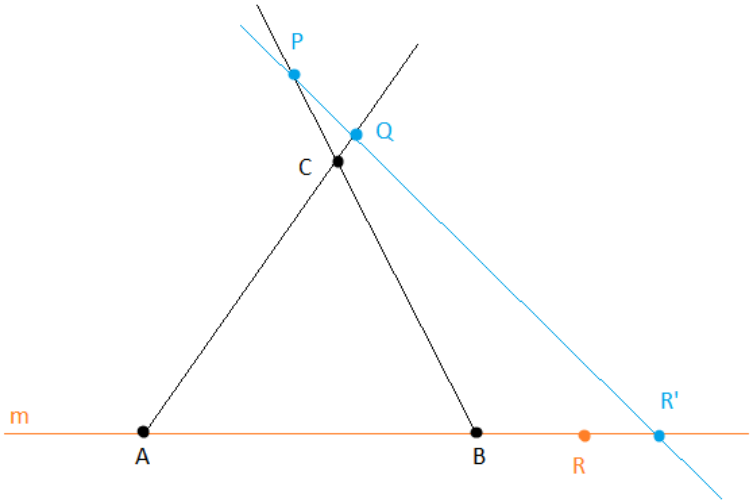
$\square$

Pokażemy, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa również jest prawdziwe.

Twierdzenie 4. *(**odwrotne do twierdzenia Menelaosa**) Jeśli punkty P, Q, R leżą na różnych prostych zawierających boki trójkąta ABC oraz zachodzi równość $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$, to punkty te są współliniowe.*



Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy że punkty P, Q, R nie są współliniowe. Wiemy, że przez dwa dowolne punkty można poprowadzić prostą.



Prosta m przecina prostą PQ w punkcie R'. Z twierdzenia Menelaosa w trójkącie

ABC wynika

$$\frac{|AR'|}{|BR'|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$$

Z założeń twierdzenia wiemy, że $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$. Prawdziwa jest, więc też poniższa równość

$$\frac{|AR'|}{|BR'|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|},$$

Po uproszczeniu mamy

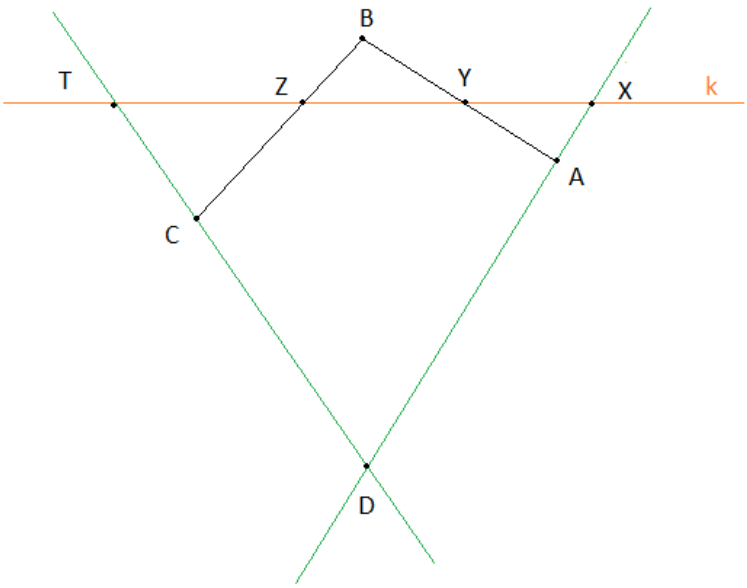
$$\frac{|AR'|}{|BR'|} = \frac{|AR|}{|BR|}.$$

Stąd wynika, że $R' = R$. □

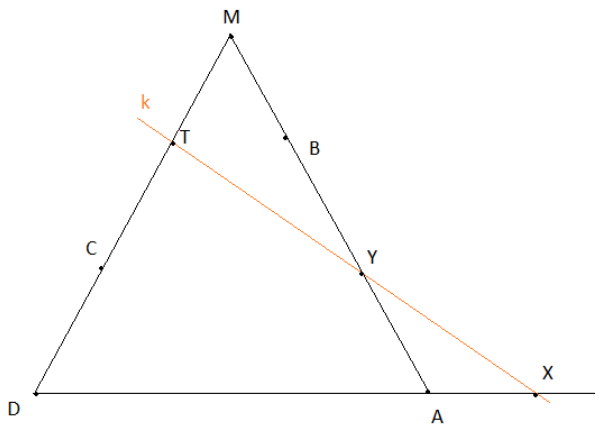
Przyjrzyjmy się teraz przykładowym zadaniom, które z łatwością rozwiążemy korzystając z twierdzenia Menelaosa.

Zadanie 1. ([7]) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Prosta k przecina odcinki AB i BC odpowiednio w punktach Y, Z oraz proste DA i CD odpowiednio w punktach X i T. Wykazać, że

$$\frac{|DX| \cdot |AY| \cdot |BZ| \cdot |CT|}{|XA| \cdot |YB| \cdot |ZC| \cdot |TD|} = 1.$$



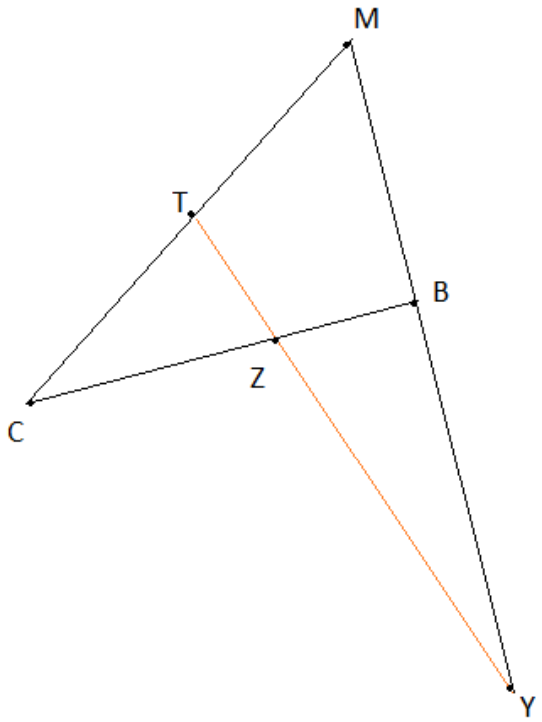
Dowód. Na początku przedłużymy odcinki CD i AB tak, aby otrzymać trójkąt MAD.



Z twierdzenia Menelaosa wiemy, że

$$\frac{|DX| \cdot |AY| \cdot |MT|}{|AX| \cdot |YM| \cdot |TD|} = 1.$$

Następnie patrzymy w podobny sposób na powstały trójkąt MCB.



Podobnie jak wcześniej na mocy twierdzenia Menelaosa zachodzi równość

$$\frac{|BZ| \cdot |CT| \cdot |MY|}{|ZC| \cdot |TM| \cdot |YB|} = 1.$$

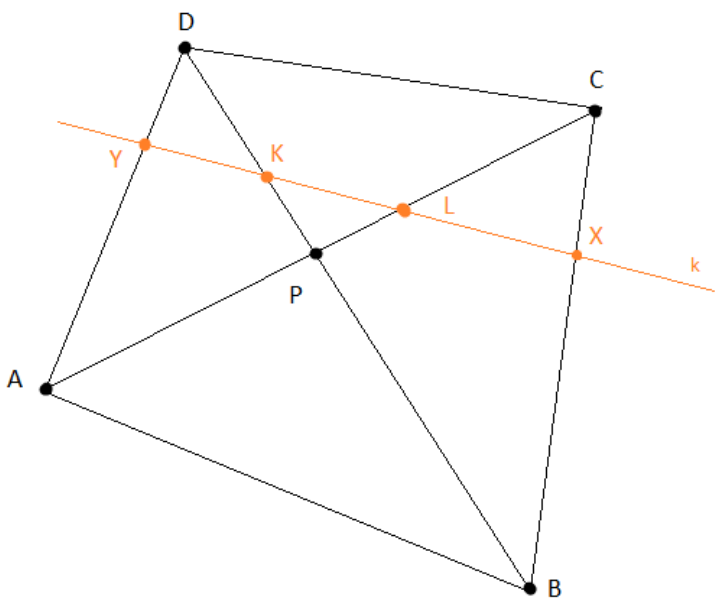
Teraz wystarczy wymnożyć przez siebie obie równości i skrócić ułamki

$$\frac{|BZ| \cdot |CT| \cdot |MY|}{|ZC| \cdot |TM| \cdot |YB|} \cdot \frac{|DX| \cdot |AY| \cdot |MT|}{|AX| \cdot |YM| \cdot |TD|} = \frac{|DX| \cdot |CT| \cdot |AY| \cdot |BZ|}{|DT| \cdot |AX| \cdot |YB| \cdot |ZC|} = 1 \cdot 1 = 1.$$

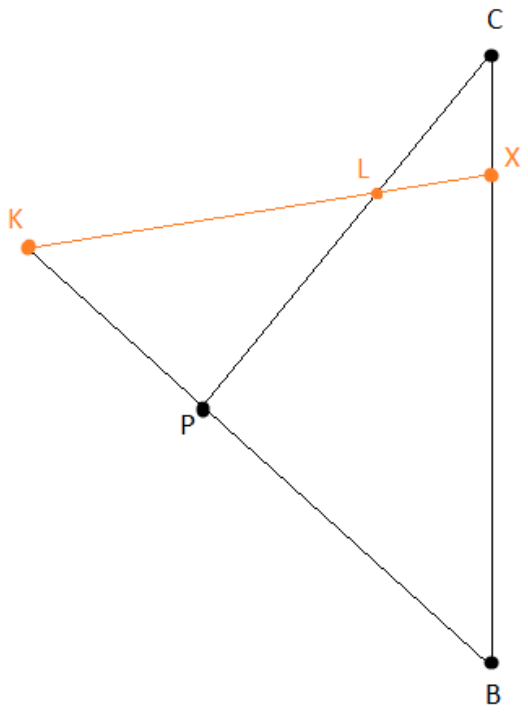
□

Po przedstawieniu pierwszego przykładu zastosowania twierdzenia Menelaosa, przyjrzyjmy się kolejnemu.

Zadanie 2. ([7]) Punkty X i Y należą odpowiednio do boków BC i DA czworokąta ABCD, przy czym $\frac{|AY|}{|YD|} = \frac{|CX|}{|XB|}$. Prosta XY przecina odcinki BD i AC odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $\frac{|AL|}{|LC|} = \frac{|DK|}{|KB|}$.



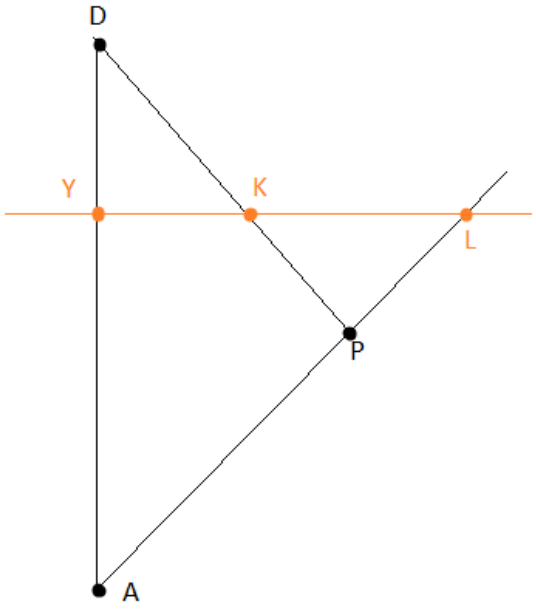
Dowód. Spójrzmy nieco inaczej na rysunek z zadania. Rozważmy trójkąt BCP



Z twierdzenia Menelaosa wiemy, że

$$\frac{|CX| \cdot |BK| \cdot |PL|}{|XB| \cdot |PK| \cdot |LC|} = 1.$$

Teraz rozważmy trójkąt ADP.



Stosując w nim twierdzenie Menelaosa mamy

$$\frac{|DY| \cdot |AL| \cdot |PK|}{|YA| \cdot |PL| \cdot |KD|} = 1.$$

Zatem

$$\frac{|CX| \cdot |BK| \cdot |PL|}{|XB| \cdot |PK| \cdot |LC|} = \frac{|DY| \cdot |AL| \cdot |PK|}{|YA| \cdot |PL| \cdot |KD|} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Przemnażając przez siebie otrzymane wyrażenia otrzymujemy

$$\frac{|DY| \cdot |AL| \cdot |CX| \cdot |BK|}{|YA| \cdot |KD| \cdot |XB| \cdot |LC|} = 1.$$

Korzystamy z założenia $\frac{|AY|}{|YD|} = \frac{|CX|}{|XB|}$ i dostajemy

$$\frac{|XB| \cdot |AL| \cdot |CX| \cdot |BK|}{|CX| \cdot |KD| \cdot |XB| \cdot |LC|} = 1.$$

Po skróceniu otrzymujemy

$$\frac{|AL| \cdot |BK|}{|KD| \cdot |LC|} = 1.$$

Po przekształceniu dostajemy tezę

$$\frac{|AL|}{|KD|} = \frac{|KD|}{|BK|}.$$

□

Jak widać, dzięki zastosowaniu głównie twierdzenia Menelaosa udało nam się w sposób szybki i przejrzysty przeprowadzić powyższe rozważania. Równie przydatne okaże się twierdzenie omawiane w kolejnym rozdziale.

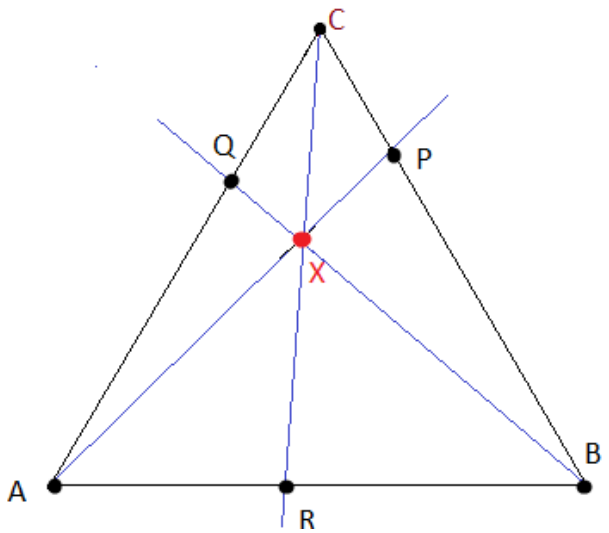
Rozdział 3

Twierdzenie Cevy i przykłady jego zastosowania w zadaniach

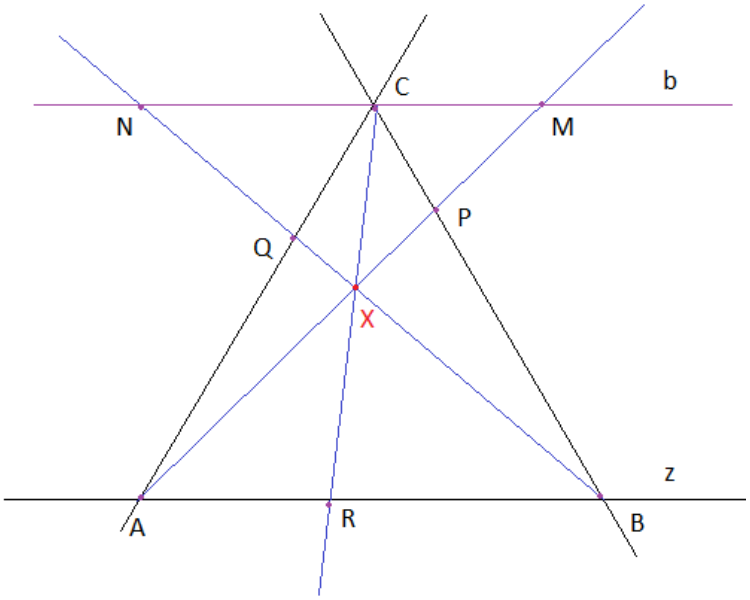
Kolejnym zagadnieniem jakie omówimy będzie twierdzenie Cevy. Podobnie jak poprzednie dotyczyć ono będzie geometrii płaskiej, jednak tym razem ukaże nam nieco inne własności. Na początku przejdźmy do samej treści twierdzenia, a później przedstawimy twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 5. *(**Cevy**) Jeśli punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC oraz odcinki AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie, to prawdą jest, że*

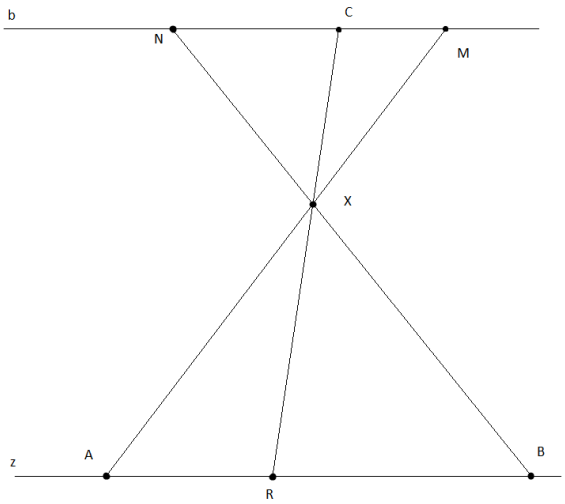
$$\frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$



Dowód. Prowadzimy prostą b równoległą do prostej z, która zawiera bok AB.



1) Pomińmy na chwilę odcinki AC i BC na powyższym rysunku



Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{|AR|}{|MC|} = \frac{|RX|}{|CX|}$, $\frac{|RB|}{|NC|} = \frac{|RX|}{|CX|}$.

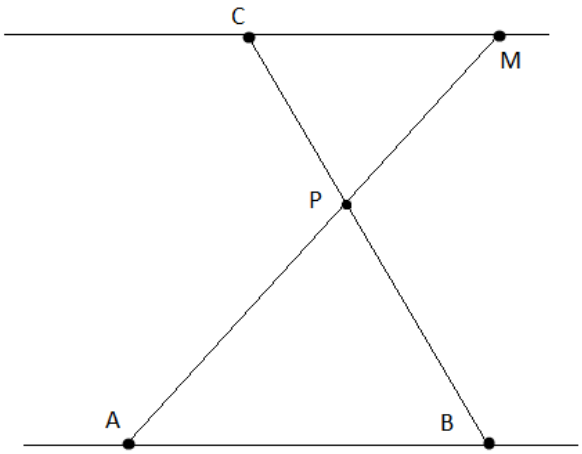
Przyrównując ułamki mamy

$$\frac{|RB|}{|NC|} = \frac{|AR|}{|MC|}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|MC|}{|NC|}.$$

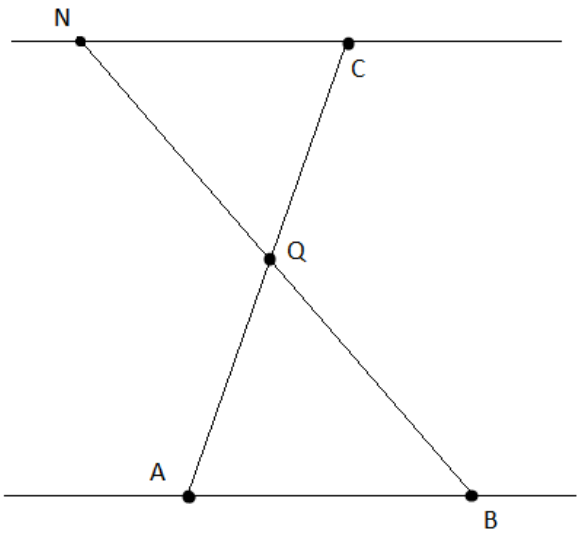
2) Teraz z rysunku pomińmy proste BN, CR, AC.



Podobnie jak wcześniej z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|AB|}{|CM|}.$$

3) Na koniec pomińmy z rysunku proste BC, AM, CR.



Korzystając po raz ostatni z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|NC|}{|AB|}.$$

Z równości otrzymanych w punktach 1), 2) oraz 3) wynika teza

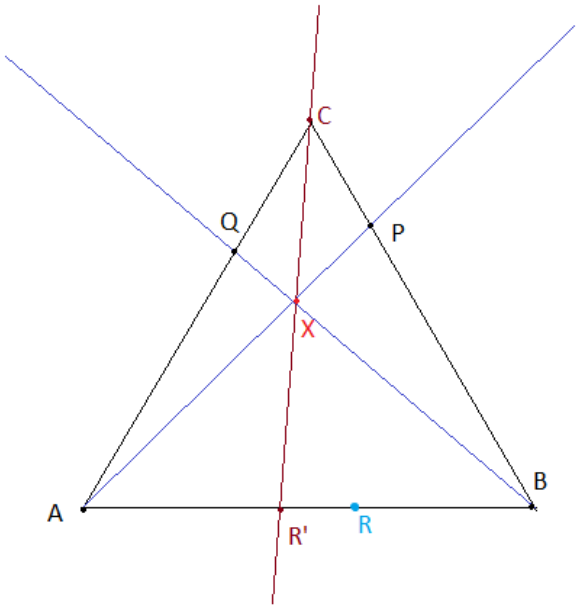
$$\frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|NC|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CM|} \cdot \frac{|CM|}{|NC|} = 1.$$

□

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy także jest prawdziwe, co wykażemy poniżej.

Twierdzenie 6. *(**odwrotne do twierdzenia Cevy**) Jeśli punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC oraz zachodzi równość $\frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$, to odcinki AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załózmy, że proste AP, BQ, CR nie przecinają się w jednym punkcie. Oznaczamy przez punkt X punkt wspólny prostych AP i BQ. Prowadzimy prostą CX, która przecina prostą AB w punkcie R'. Wiemy, że Q i P leżą odpowiednio na bokach CA, BC trójkąta ABC .



Korzystając z twierdzenia Menelaosa w trójkącie ABC, wiemy że

$$\frac{|AR'|}{|BR'|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

Zgodnie z założeniami twierdzenia mamy $\frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$. Zatem

$$\frac{|AR'|}{|BR'|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|},$$

czyli

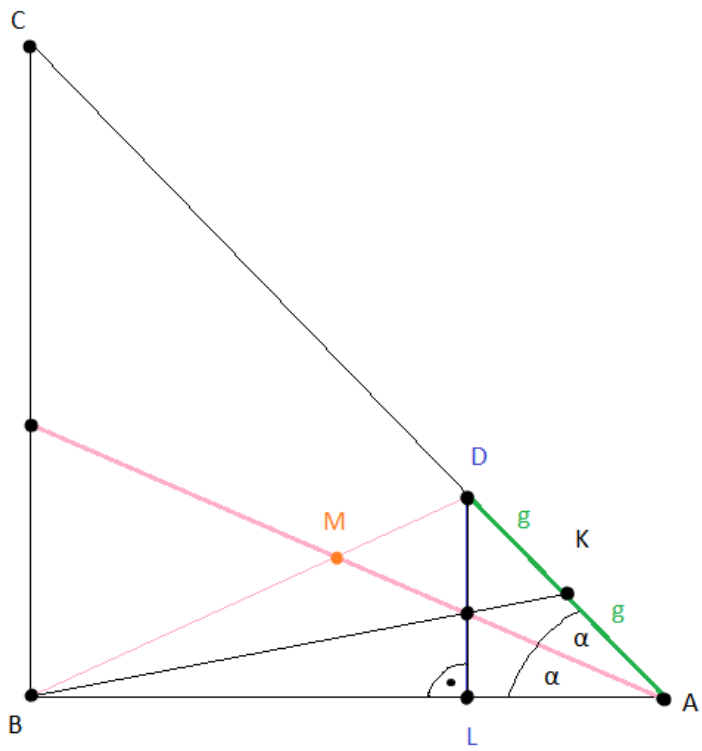
$$\frac{|AR'|}{|BR'|} = \frac{|AR|}{|BR|}.$$

Stąd wynika, że $R = R'$.

□

Po tym jak objaśniliśmy dokładnie twierdzenie Cevy zapoznajmy się z przykładami wykorzystania go w różnych zadaniach. Pierwsze z omawianych zadań pochodzi z kółka matematycznego V LO w Krakowie, zaś drugie z Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 3. ([8]) Na przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC obrano punkt taki D, taki że $AB = CD$. Udowodnić, że w trójkącie ABD dwusieczna kąta $\sphericalangle DAB$, środkowa z wierzchołka B, wysokość z wierzchołka D przecinają się w jednym punkcie.



Dowód. (a) Z twierdzenia o dwusiecznej mamy

$$\frac{|MB|}{|BA|} = \frac{|MD|}{|AD|}.$$

Przekształcając równość otrzymujemy

$$\frac{|MB| \cdot |AD|}{|BA| \cdot |MD|} = 1.$$

(b) Proste BC i DL są równoległe, więc korzystając z twierdzenia Talesa dostajemy

$$\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

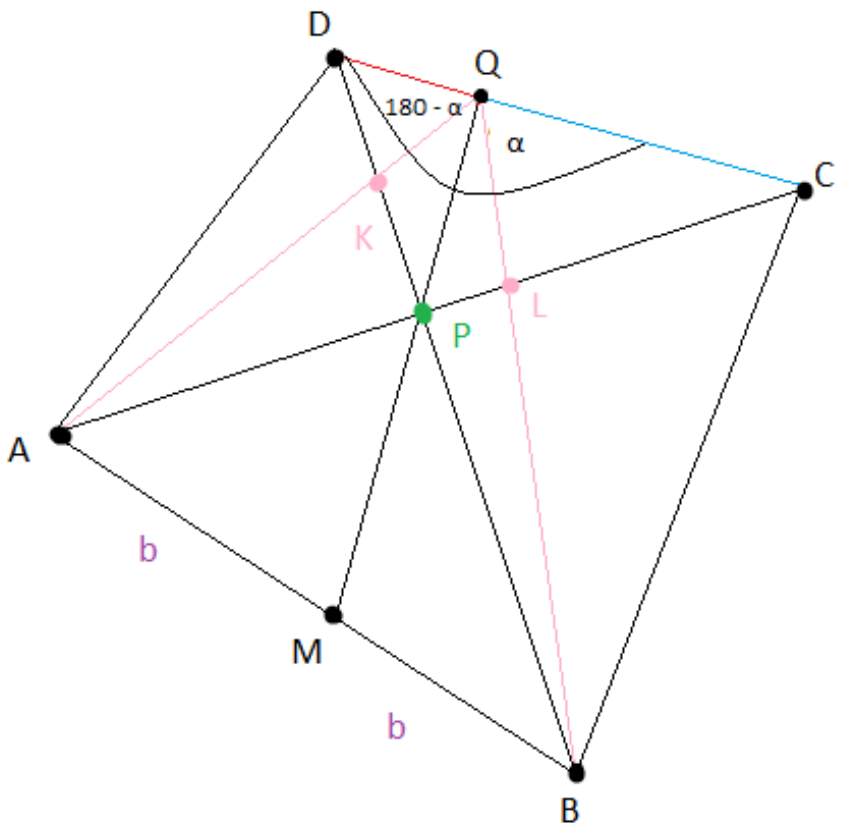
Z równości a) i b) oraz z tego, że $|AB| = |CD|$ wynika, że w trójkącie ABD

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BM|}{|MD|} \cdot \frac{|DK|}{|KA|} = \frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BM|}{|MD|} \cdot \frac{g}{g} = \frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BM|}{|MD|} = \frac{|AD|}{|AB|} \cdot \frac{|MB|}{|DM|} = 1$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wynika, że odcinki BK, AM, DL przecinają się w jednym punkcie.

□

Zadanie 4. ([9]) Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Wykazać, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ tzn. $\frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle ADP}} = \frac{|CQ|}{|DQ|}$.



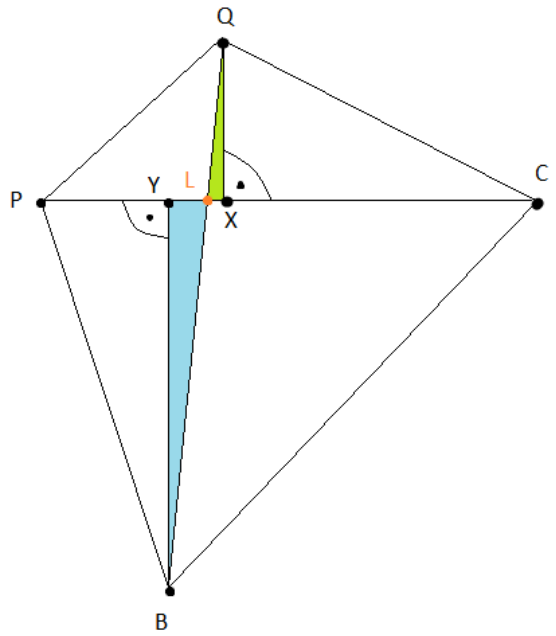
Dowód. Niech punkt K będzie punktem przecięcia prostych AQ i BD, zaś punkt L punktem przecięcia prostych AC oraz QB.
W trójkącie ABQ korzystamy z twierdzenia Cevy i otrzymujemy

$$\frac{|BL|}{|LQ|} \cdot \frac{|KQ|}{|KA|} \cdot \frac{|MA|}{|MB|} = 1.$$

Z założeń wiemy, że $|MA| = |MB|$, więc

$$\frac{|BL|}{|LQ|} \cdot \frac{|KQ|}{|KA|} = 1.$$

Teraz rozważmy czworokąt $PQCB$. Prowadzimy wysokość QX w trójkącie PQC oraz wysokosć BY w trójkącie BPC.



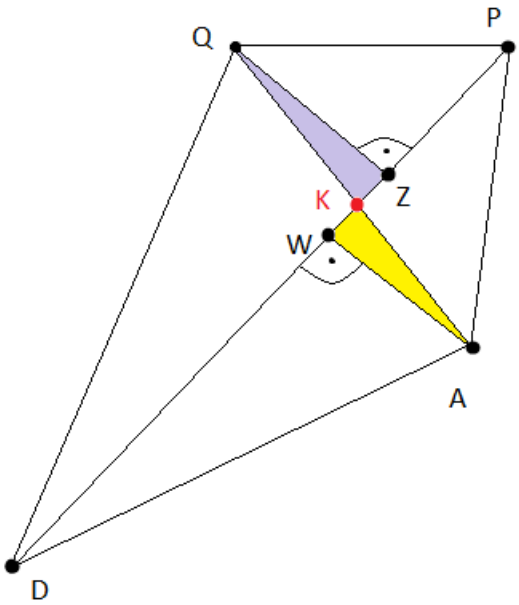
Skupmy się na trójkątach QXL i YBL. Kąty $\sphericalangle QLC$, $\sphericalangle YLB$ są wierzchołkowe, a kąty $\sphericalangle OXL$ i $\sphericalangle LYB$ są proste, więc na mocy cechy kąt-kąt-kąt te trójkąty są podobne. Zatem

$$\frac{|BL|}{|QL|} = \frac{|BY|}{|QX|}.$$

Wiemy, że

$$\frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle PQC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot |YB|}{\frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot |XQ|} = \frac{|YB|}{|XQ|} = \frac{|BL|}{|QL|}.$$

Analogicznie postępujemy z czworokątem $APQD$.



Prowadzimy wysokość QZ w trójkącie DQP oraz wysokość AW w trójkącie DAP. Kąty $\sphericalangle AKW$, $\sphericalangle QKZ$ są wierzchołkowe oraz $\sphericalangle QZK = \sphericalangle KWA = 90°$, więc na podstawie cechy kąt-kąt-kąt te dwa trójkąty są podobne. W takim razie

$$\frac{|AW|}{|QZ|} = \frac{|AK|}{|KQ|}.$$

Wiemy, że

$$\frac{P_{\triangle APD}}{P_{\triangle DQP}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot |AW|}{\frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot |QZ|} = \frac{|AW|}{|QZ|} = \frac{|AK|}{|KQ|} = \frac{|BL|}{|LQ|}.$$

Widać więc, że

$$\frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle PQC}} = \frac{P_{\triangle ADP}}{P_{\triangle DQP}},$$

a po przekształceniach

$$\frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle ADP}} = \frac{P_{\triangle PQC}}{P_{\triangle DQP}}.$$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta i z zależności $\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$, otrzymujemy tezę

$$\frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle PDA}} = \frac{P_{\triangle QPC}}{P_{\triangle DQP}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |QC| \cdot |PQ| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |QD| \cdot \sin(180 - \alpha)} = \frac{|QC|}{|QD|}.$$

□

Wykorzystując twierdzenie Cevy, udowodniliśmy, że zachodzą inne własności figur zaprezentowanych w przykładach.

Analizowane tematy, jak pokazały przykłady, są przydatne w przypadku wykonywania zadań, udowadniania innych ważnych dla geometrii własności, w których należy ocenić współliniowość danych punktów lub występuje potrzeba określenia, czy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

Uzyskana wiedza pozwoli nam na odnajdywanie zależności, o których możliwe że nie mieliśmy pojęcia i uświadomi jak wiele ciekawych tematów skrywa w sobie geometria płaska.

Dla mnie samej-autorki tejże pracy, prowadzenie powyższych rozważań było ogromną przyjemnością. Pozwoliło mi zgłębić tajniki matematyki, a zwłaszcza geometrii płaskiej. Mam nadzieję, że Czytelnicy podzielą mój entuzjazm oraz docenią użyteczność twierdzeń, które starałam się tutaj przybliżyć.

Bibliografia

[1] Kurczab M., Kurczab E., Świda E.: *"Matematyka. Podręcznik do liceów i techników klasa 1. Zakres rozszerzony."*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2019

[2] Kurczab M., Kurczab E., Świda E.: *"Matematyka. Podręcznik do liceów i techników klasa 2. Zakres rozszerzony."*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, 2022

[3] L. Kurlyandchik *"Kącik olimpijski część 1 GEOMETRIA"*, Wydawnictwo Aksjomat Toruń, s.135

[4] S. I. Zetel, *Geometria trójkąta.* PWSZ, 1964, s. 38.

[5] Twierdzenie Menelaosa https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie-Menelaosa (dostęp 25.02.2022r.)

[6] Twierdzenie o dwusiecznej https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzeni-o-dwusiecznej-kąta-wewnętrznego-w-trójkącie (dostęp 25.02.2022r.)

[7] Twierdzenie Cevy i Menelaosa, zadania https://www.math.cmu.edu/ ttkocz/teaching /2lorybnik/kolkoadv9IX2009.pdf (dostęp 25.02.2022r.)

[8] Lista zadań z geometrii, http://www2.im.uj.edu.pl/home/PatrykPagacz/files/vlo8.pdf (dostęp 25.02.2022r.)

[9] Zadania z L Olimpiady Matematycznej, https://om.mimuw.edu.pl/static/app-main/problems/om50-1.pdf - (dostęp 25.02.2022r.)

[10] Rozwiązania zadań z L Olimpiady Matematycznej, https://om.mimuw.edu.pl/static/app-main/problems/om50-1r.pdf (dostęp 25.02.2022r.)

[11] Definicja czworokąta wypukłego, https://www.matmana6.pl/czworokat (dostęp 25.02.2022r.)

[12] Spodnie Talesa, https://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/44/Prosty dowód tw Talesa, NiM-12-KM.PDF3.PDF (dostęp 26.02.2022)