Spidrony

Opracował: Jacek Marchewka
Szkoła podstawowa z Oddziałami Integracyjnymi nr 151
w Krakowie im. Uniwersytetu Jagiellońskiego
Klasa 7e

Spis treści

Spis treści 2
Wstęp 3
Co to jest spidron 3
Jak powstaje spidron? 4
Własności i zależności między powstałymi figurami 6
Wypełnianie płaszczyzny 8
Inne spidrony 20
Spidron na bazie kwadratu 20
Spidron na bazie pięciokąta foremnego 23
Spidron na bazie siedmiokąta foremnego 26
Spidron na bazie ośmiokąta foremnego 28
Podsumowanie 31
Spidrony przestrzenne 32
Bibliografia 34
Kontakt: 34

Wstęp

Szukając w Internecie informacji na temat kostki Rubika trafiłem na ciekawą stronę dotyczącą jego studenta Daniela Erdely'ego i odkrytego przez niego spidrona. Zainteresowałem się tym „tworem" geometrycznym, jego właściwościami i zastosowaniem. Znalazłem również stronę, na której autor zachęcał do samodzielnego skonstruowania spidrona i zbadania jego właściwości.

Postanowiłem odpowiedzieć na postawione tam pytania:

- Jaki jest stosunek długości boków kolejnych trójkątów równobocznych?
- Jaki jest stosunek powierzchni kolejnych trójkątów równobocznych?
- Jaki jest stosunek powierzchni trójkątów sąsiadujących ze sobą
- Jakie jest pole wszystkich trójkątów - jednego połspidrona?
- Jaki jest stosunek pól wszystkich trójkątów do pola największego trójkąta równobocznego?
- Na ile sposobów i na jakich warunkach można wypełnić płaszczyznę spidronami (parkietaż)?
- Czy można (w jaki sposób) złożyć spidron w trójwymiarowe kształty?

Zaciekawiony otrzymanymi wynikami rozszerzyłem te rozważanie na inne wielokąty foremne: kwadrat, pięciokąt, siedmiokąt, ośmiokąt. Postanowiłem odpowiedzieć na te same pytania, sprawdzić czy zachodzą podobne zależności.

Co to jest spidron

W latach siedemdziesiątych Daniel Erdély odkrył (zainspirowany zadaniem postawionym na lekcji projektowania przez Ernő Rubika, twórcy kostek), że może w sześciokącie foremnym stworzyć wzór naprzemiennych równobocznych i równoramiennych trójkątów. Erdély połączył dwa z tych wzorów, a figurę nazwał spidronem. Nazwa pochodzi od angielskich nazw pająka i spirali, ponieważ kształtem przypomina pajęczynę.

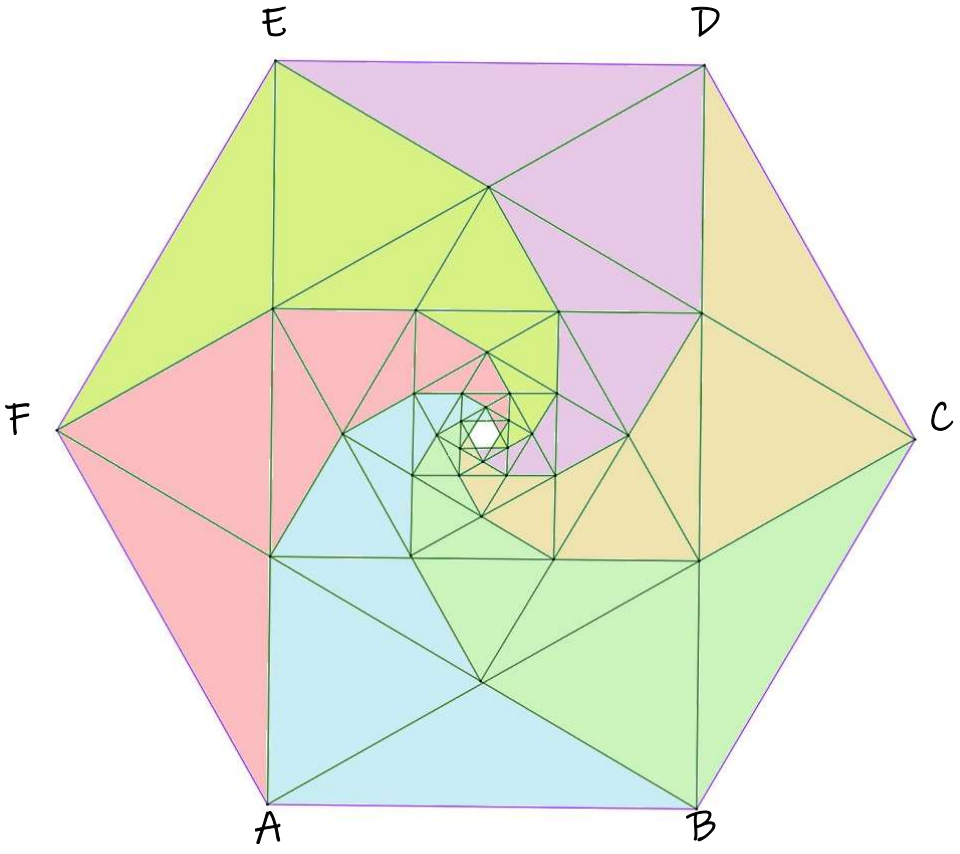
W swojej początkowej pracy Erdély zaczynał od sześciokąta, natomiast Stefan Stenzhorn wykazał, że możliwe jest stworzenie spidronu w każdym wielokącie foremnym większym niż cztery. Erdély odkrył również, że spidrony mają ciekawe właściwości- można je składać w struktury trójwymiarowe.

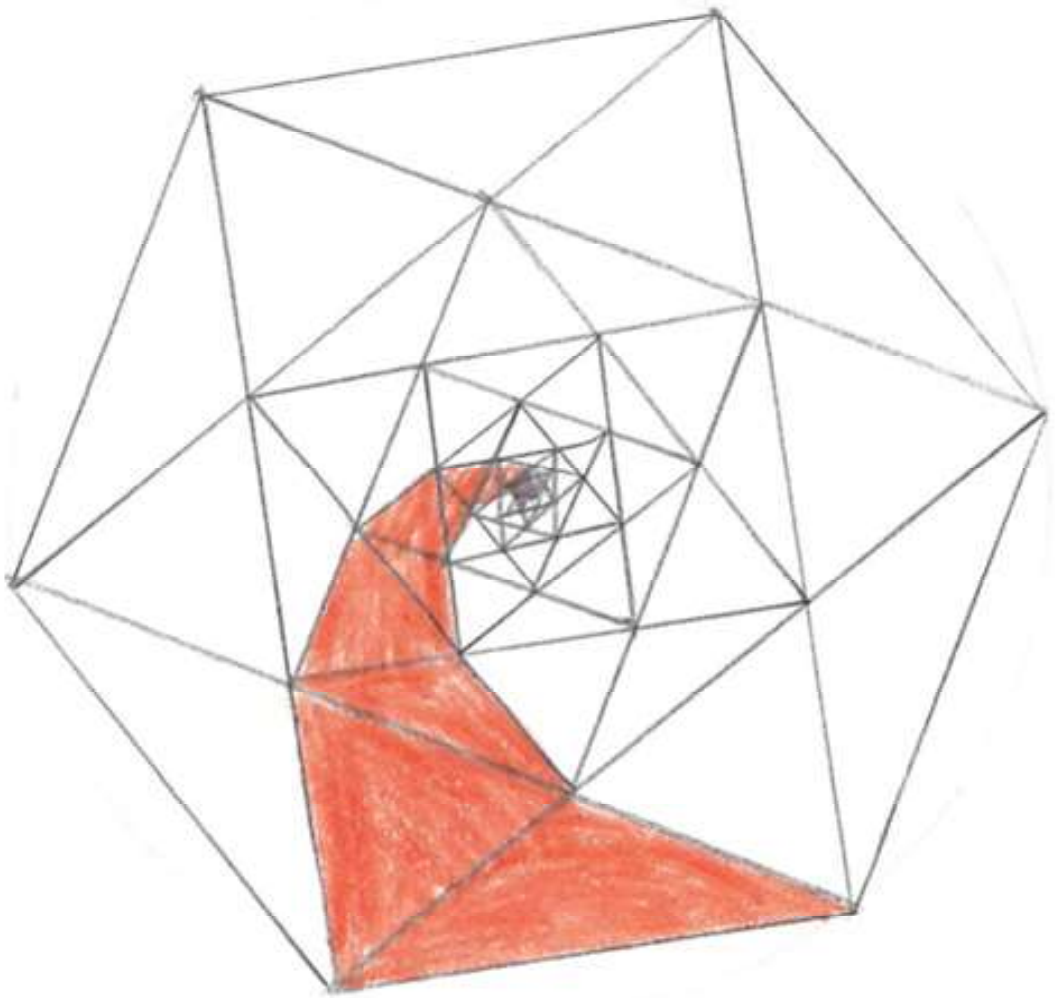
Jak powstaje spidron?

Konstrukcja spidronu:

- Konstruuję sześciokąt foremny ABCDEF
- Łączę co drugi wierzchołek odcinkiem: AC, BD, CE, DF, EA, FB
- Narysowane linie tworzą mniejszy sześciokąt foremny, wewnątrz pierwszego.
- Powtarzam poprzedni krok, aż wewnętrzny sześciokąt stanie się zbyt mały, aby kontynuować.
- Jedna powstała sekwencja to półspidron.

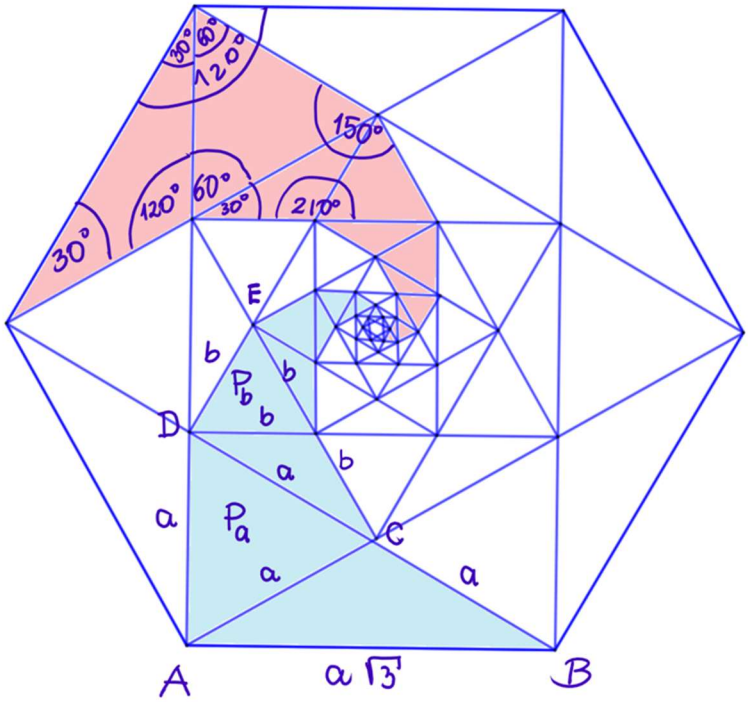
Konstrukcje w wersji rysunkowej wykonałem zgodnie z zasadami konstruowania wielokątów foremnych. W pracy umieszczone są też zrzuty konstrukcji wykonanych za pomocą programów Geogebra oraz Paint.





Łatwo zauważyć, że jeden bok trójkąta równobocznego pokrywa się z jednym z boków trójkąta równoramiennego, a drugi jest podstawą trójkąta równoramiennego i jednocześnie przeciwprostokątną innego, mniejszego trójkąta prostokątnego. Sekwencja: równoramienny +równoboczny = prostokątny jest powtarzana dowolną ilość razy w kierunku coraz mniejszych trójkątów.

Własności i zależności między powstałymi figurami



Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego: $180^0\ (n-2)/n$
Dla sześciokąta mamy : $180^0 \cdot 4 : 6 = 120^0$
Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym o kątach 120^0 ,30^0 , 30^0
Trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym o kątach 30^0,60^0, 90^0
Trójkąt ACD jest trójkątem równobocznym.

W całej figurze półspidrona mamy powtarzające się kąty wewnętrzne :
Z lewej 90^0,150^0, 150^0,150^0, 150^0….
Z prawej 30^0, 210^0,210^0,210^0 210^0…

Trójkąty prostokątne w półspidronie mają kąty o miarach 30^0,60^0, 90^0 - są podobne.

Oznaczam długość boku największego trójkąta równobocznego przez a , jest to jednocześnie długość przyprostokątnej mniejszego trójkąta prostokątnego oraz długość przyprostokątnej największego trójkąta prostokątnego.

Trójkąty ABD i CDE są podobne (cecha kkk). Stąd:

$$\frac{a\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{b}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Rozumowanie można powtarzać - mamy sekwencje trójkątów podobnych.

Wniosek:

Boki kolejnych trójkątów są $\sqrt{3}$ razy mniejsze od odpowiednich boków poprzedniego trójkąta.

Stosunek pól trójkątów równobocznych można obliczyć z własności pól figur podobnych:

$$\frac{P_a}{P_b} = \sqrt{3}^2 = 3$$

Wniosek:
Pole każdego następnego mniejszego trójkąta równobocznego jest trzy razy mniejsze od poprzedniego.

Pole P_a największego trójkąta równobocznego:

$$P_a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole największego trójkąta prostokątnego:

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Wniosek:
Pola trójkąta równobocznego ACD i równoramiennego ABC są równe.

Pole sześciokąta o boku $a\sqrt{3}$:

$$P_6 = 6 \cdot \frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole jednego półspidrona:

$$P_s = \frac{1}{6} \cdot P_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

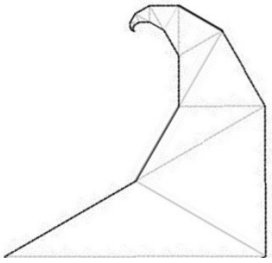
Różnica między polem półspidrona, a polem największego trójkąta:

$$P_s - P_{ABD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = P_a$$

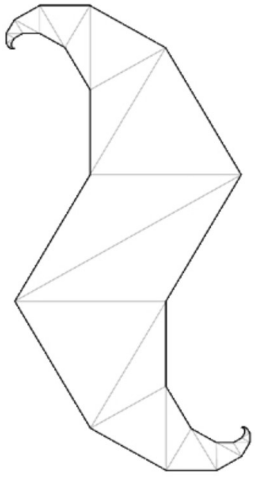
Wniosek:

Pole największego trójkąta równobocznego jest równe sumie pól pozostałych trójkątów. Rozumowanie można rozszerzyć na następne trójkąty równoboczne:
pole dowolnego trójkąta równobocznego jest równe sumie pól wszystkich trójkątów o polach mniejszych niż dany trójkąt równoboczny. Czyli wszystkimi mniejszymi trójkątami można wypełnić większy.

Wypełnianie płaszczyzny

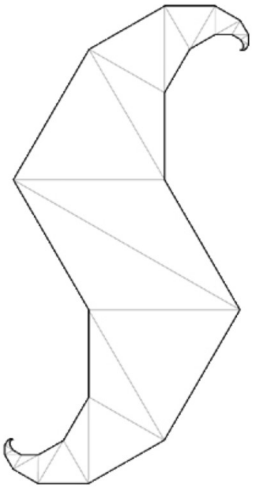


rys.1 Półspidron

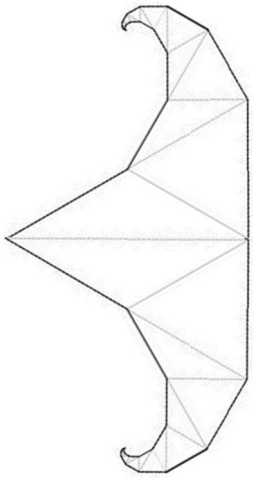


rys.2 Spidron „s”

Dwa złączone najdłuższymi bokami naprzemiennie półspidrony tworzą spidron (jest to figura środkowo symetryczna) tworzą „konika morskiego”



rys.3 spidron lewostronny „s’” (odwrócony „na lewą” stronę)



rys.4 Rogi (r)

Dwa złączone symetrycznie półspidrony tworzą „rogi”

Używając kombinacji półspidronów można pokryć płaszczyznę tworząc parkietaż. Będzie to możliwe, jeżeli w każdym wierzchołku parkietażu suma kątów poszczególnych elementów wynosi 360°.

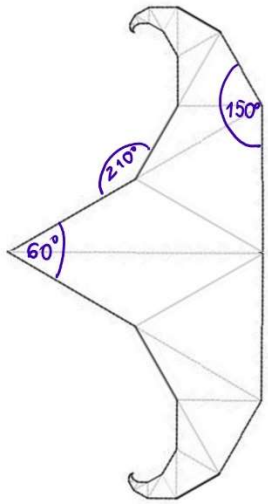
Sześć „ogonków” spidronów lub rogów musi zawsze łączyć się w jednym miejscu. Pozostałe kombinacje kątów to:

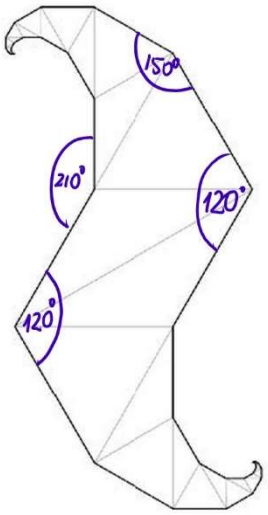
210^0 i 150^0

150^0, 60^0, 150^0

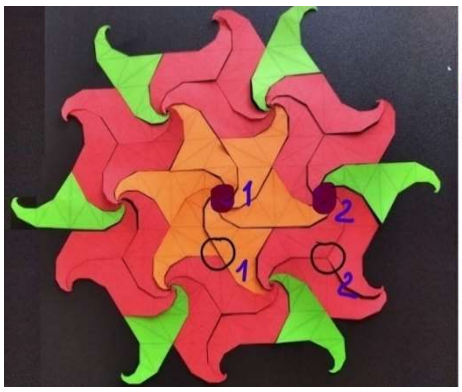
120^0 , 120^0 , 120^0

120^0, 180^0 , 60^0





Ułożenie pierścieniowe – centralne gniazdo, wokół układam następne gniazda.

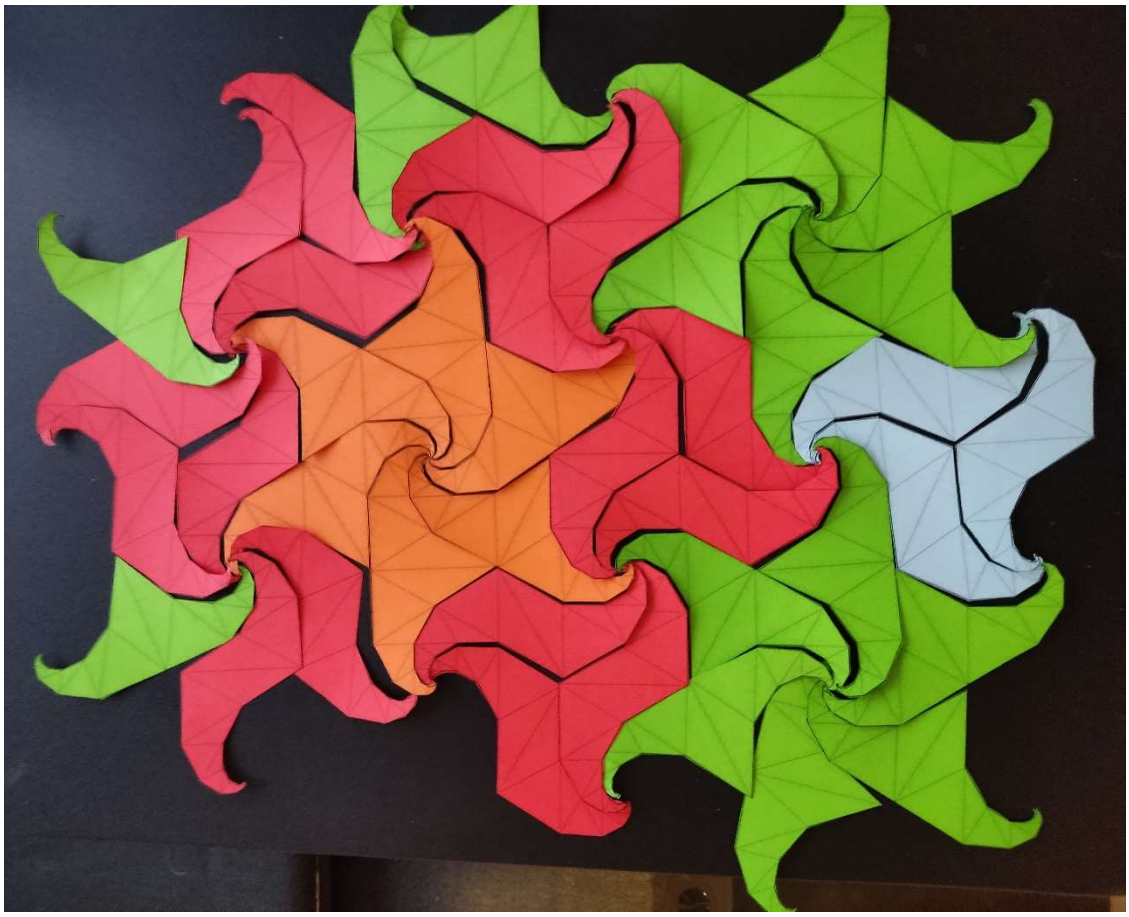


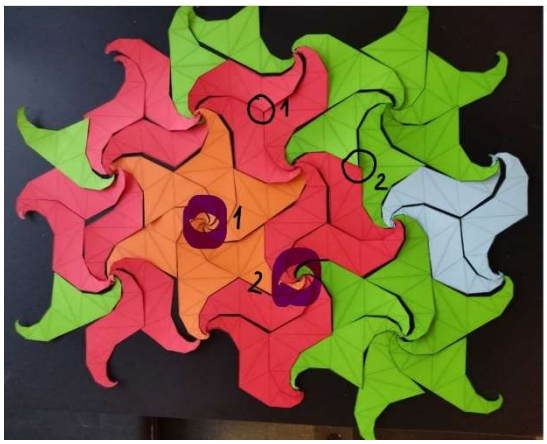
1 Gniazdo I r,r,r,r,r,r,

2 Gniazdo II r,s,s,r,s,s

1 Wierzchołek 1: 120^0, 180^0 , 60^0

2 Wierzchołek 2: 120^0 , 120^0 , 120^0





1 Gniazdo 1: r,r,r,r,r,r

2 Gniazdo 2: s,s,r,s,s,r

1 Wierzchołek 1: 120^0 , 120^0 120^0

2 Wierzchołek 2: 60^0 , 180^0 120^0

Do poprzedniego dołożony jest kolejny pierścień r,r,r,r,r,r, wierzchołek 120^0 , 120^0 120^0 r,r,r,r,r,r

① Gniazdo 1: r,s,s,s,s,s
② Gniazdo 2: r,r,r,r,r,r

1 Wierzchołek 1: 60^0 , 180^0 120^0
2 Wierzchołek 2: 120^0 , 120^0 , 120^0

1 Gniazdo 1: r,s,r,s,r,s

2 Gniazdo 2: s,r,r,r,r,r

1 Wierzchołek 180^0 , 120^0 60^0

1 Gniazdo 1 : s,s,r,r,r,r,

2 Gniazdo 2: r,r,s,r,r,s

3 Gniazdo 3: r,s,r,r,r,s

O1 Wierzchołek 1: 120^0 , 120^0 120^0

O2 Wierzchołek 2: 180^0 , 120^0 60^0

1 Gniazdo 1: r,r,r,r,r,r

2 Gniazdo 2: r,s,r,s,r,s

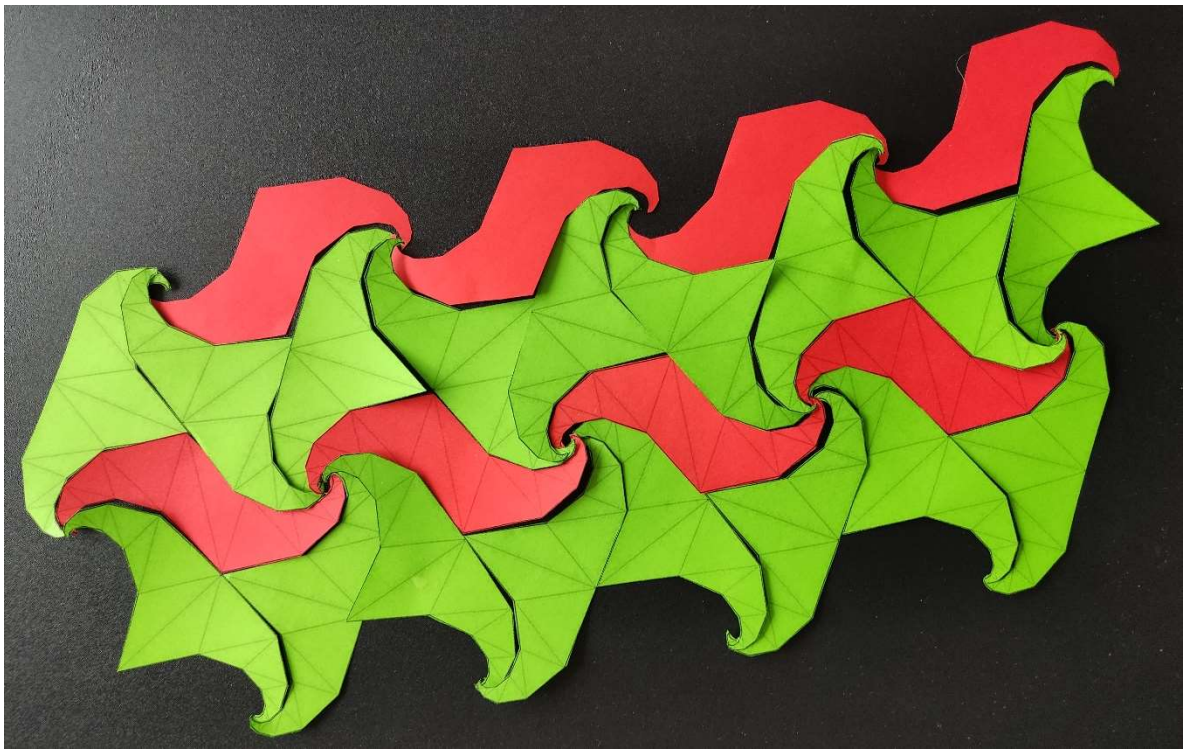
1 Wierzchołek 60^0 , 180^0 120^0

Ułożenie rzędowe – gniazda układam rzędami.

1 Gniazdo 1: s,s,s,s,r,r

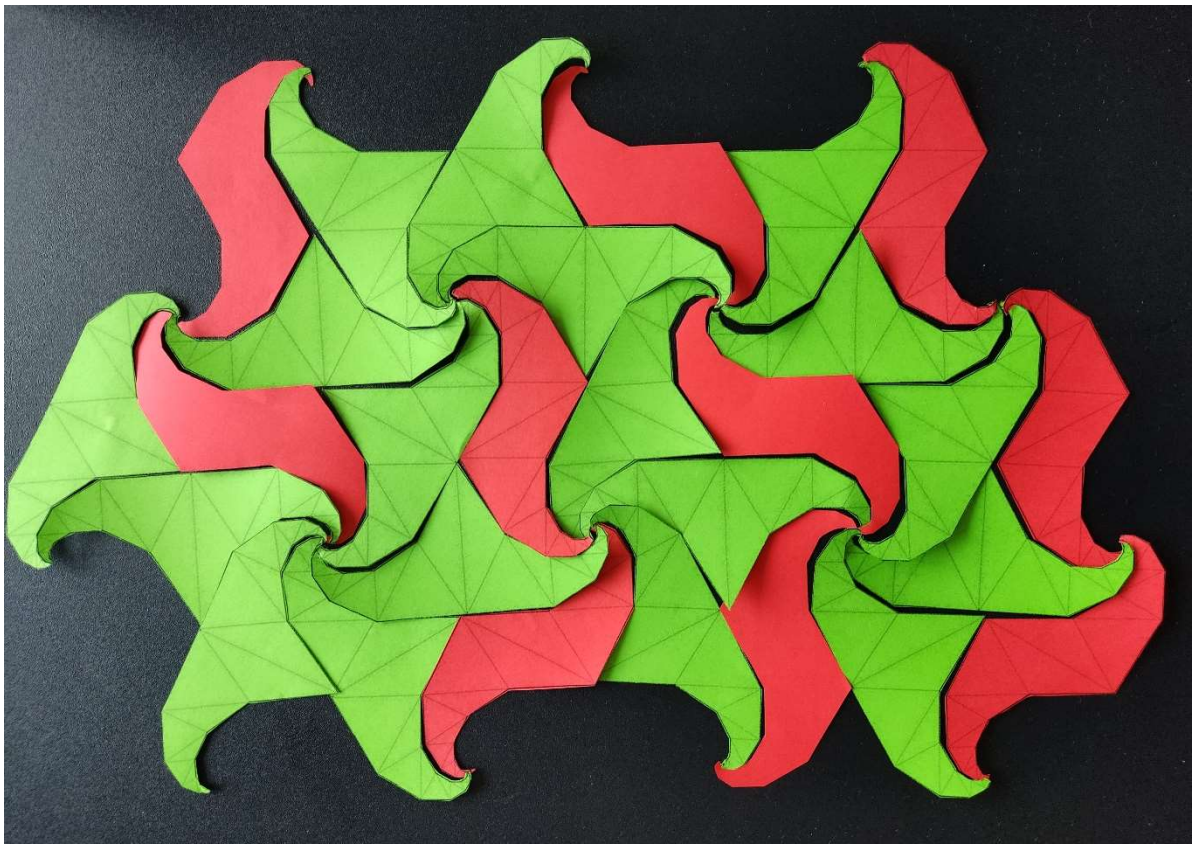
O1 Wierzchołek 1: 120^0, 120^0, 120^0

O2 Wierzchołek 2: 60^0 , 180^0 120^0



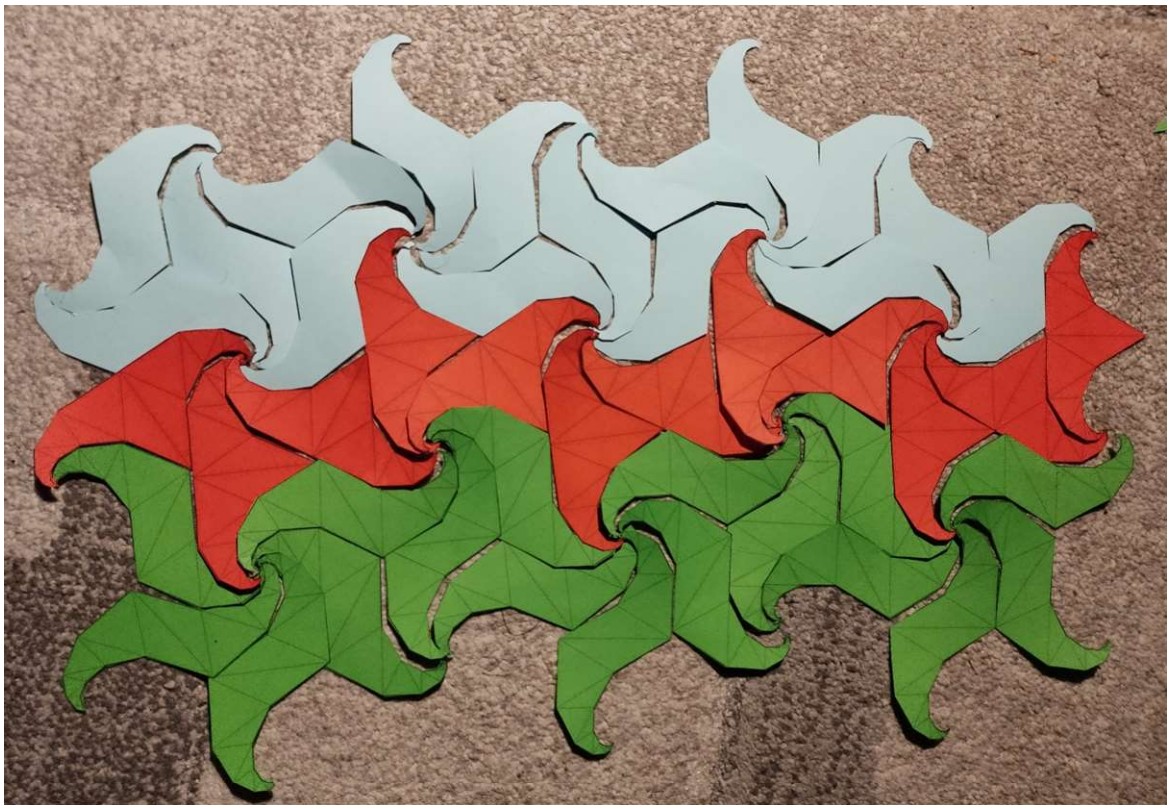
Pas środkowy r,r,s,r,r,s

Wierzchołek 180^0 , 120^0 60^0



1
2
O1

Gniazdo1: r,r,r,r,s,r,r ,
Gniazdo 2: r,s’,r,r,s’,r, s’ – spidron lewostronny
Wierzchołek 180^0 , 120^0, 60^0



(s’- spidron lewoskrętny)

1 Gniazdo1: r,s’,s’,s’,s’,s’,

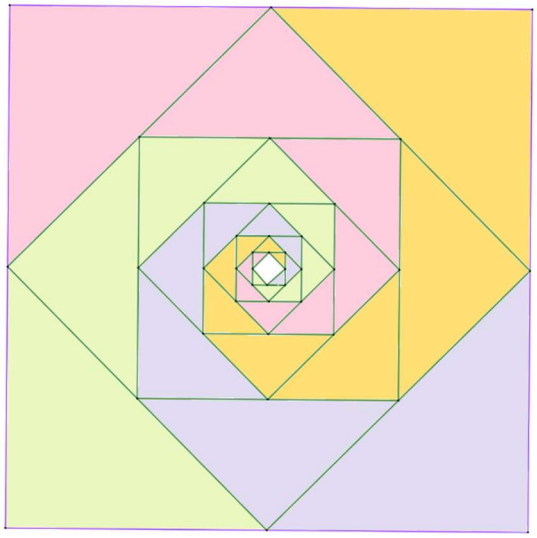
2 Gniazdo 2 s,s,s,r,r,r,

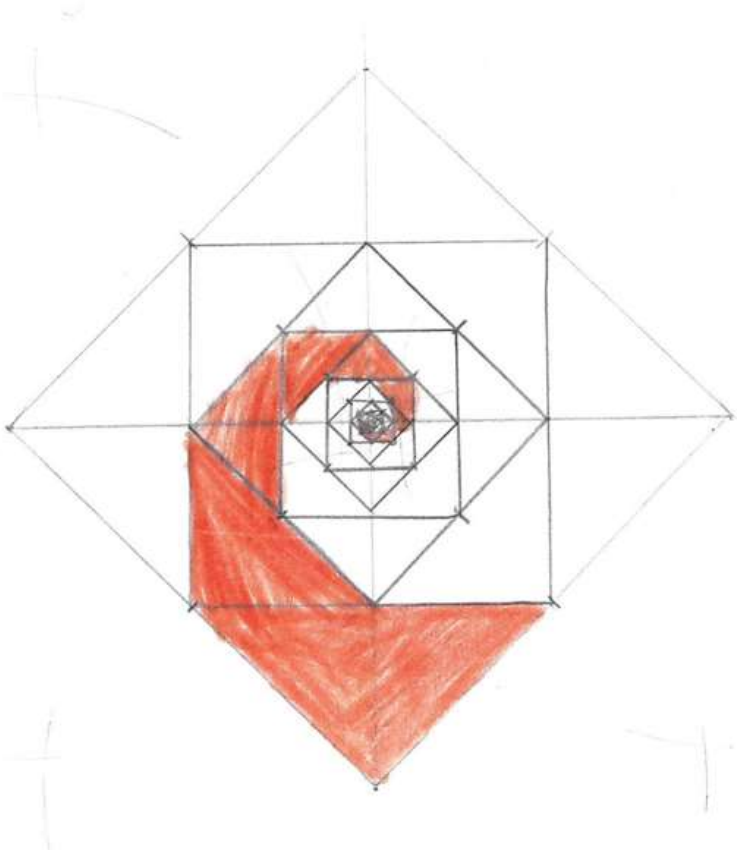
1 Wierzchołek 1: 180^0 , 120^0 60^0

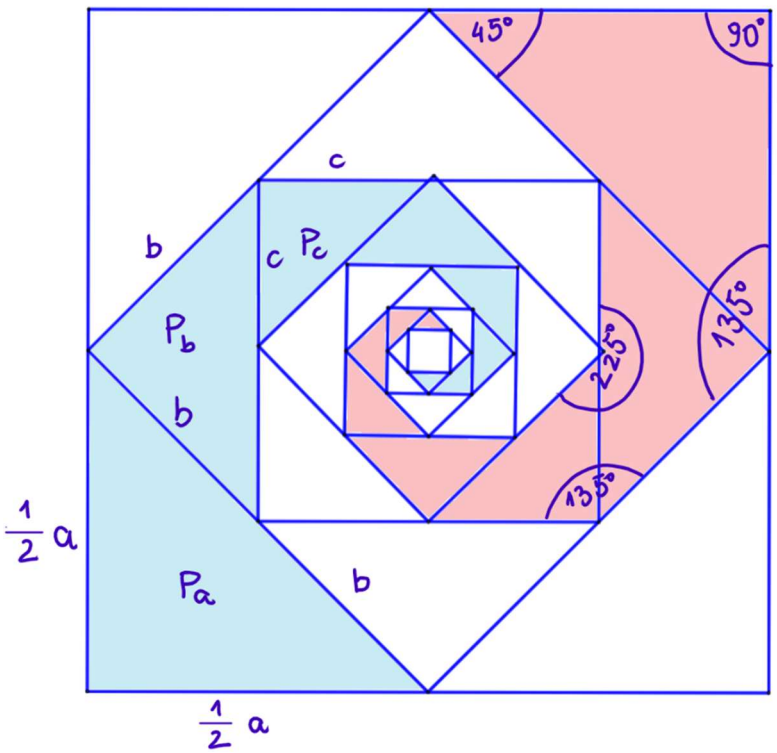
2 Wierzchołek 2: 120^0, 120^0, 120^0

Inne spidrony

Spidron na bazie kwadratu







Wszystkie trójkąty tworzące półspidron są prostokątne i równoramienne

Kąty wewnętrzne półspidrona:
Kąty z lewej strony: 90^0,135^0,135^o,135° …
Kąty z prawej strony: 45^0, 225^0, 225^0, 225°…

a - długość boku kwadratu

Z własności trójkąta prostokątnego równoramiennego:

$$2b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Obliczam stosunek odpowiednich boków trójkątów:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}$$

<u>Wniosek:</u>
Każdy następny bok jest $\sqrt{2}$ razy mniejszy od poprzedniego, a każde następne pole 2 razy mniejsze. (Wynika to z własności pól figur podobnych).

Pole największego trójkąta:

$$P_a = \frac{1}{8}a^2$$

Pole jednego półspidrona:

$$P_s = \frac{1}{4}a^2$$

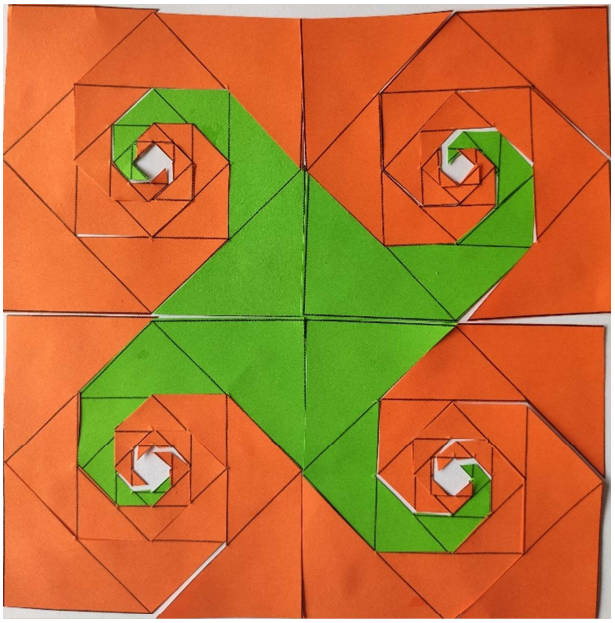
Różnica między polem półspidrona, a polem największego trójkąta:

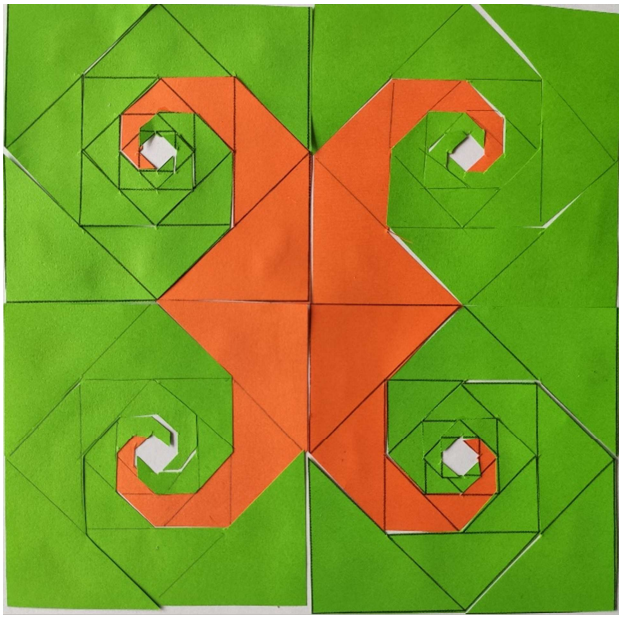
$$P_s - P_a = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{2}{8}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{8}a^2 = P_a$$

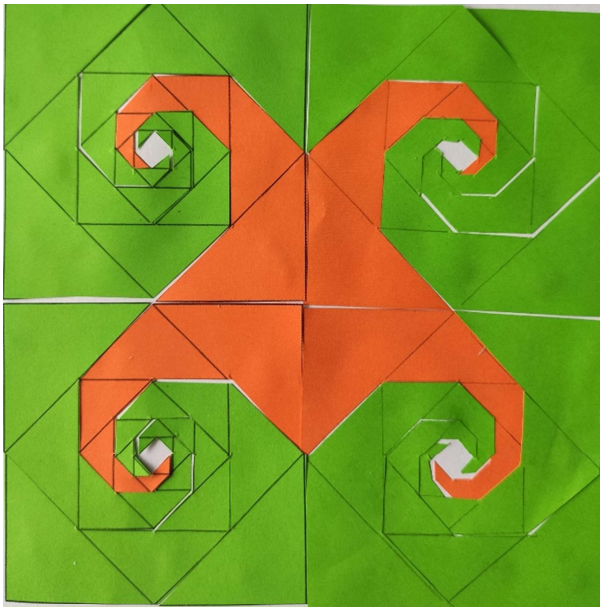
<u>Wniosek:</u>
P_a=P_b+P_c+… Pole największego trójkąta jest równe sumie pól następnych trójkątów.

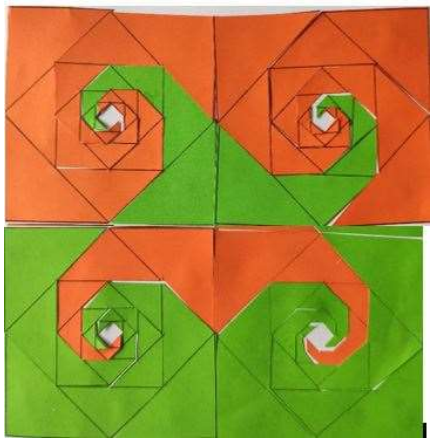
Wypełnianie płaszczyzny spidronami na bazie kwadratu .

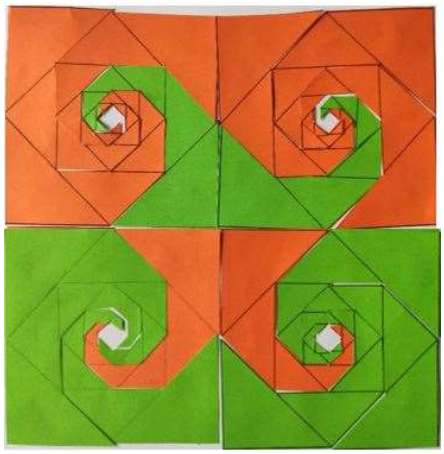
Na różne wypełnienie pozwala kombinacja 90^0 .



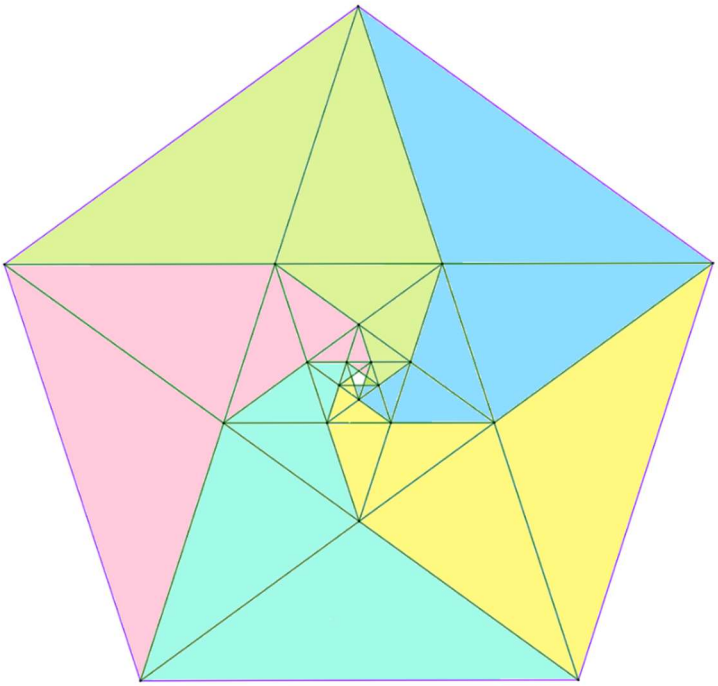


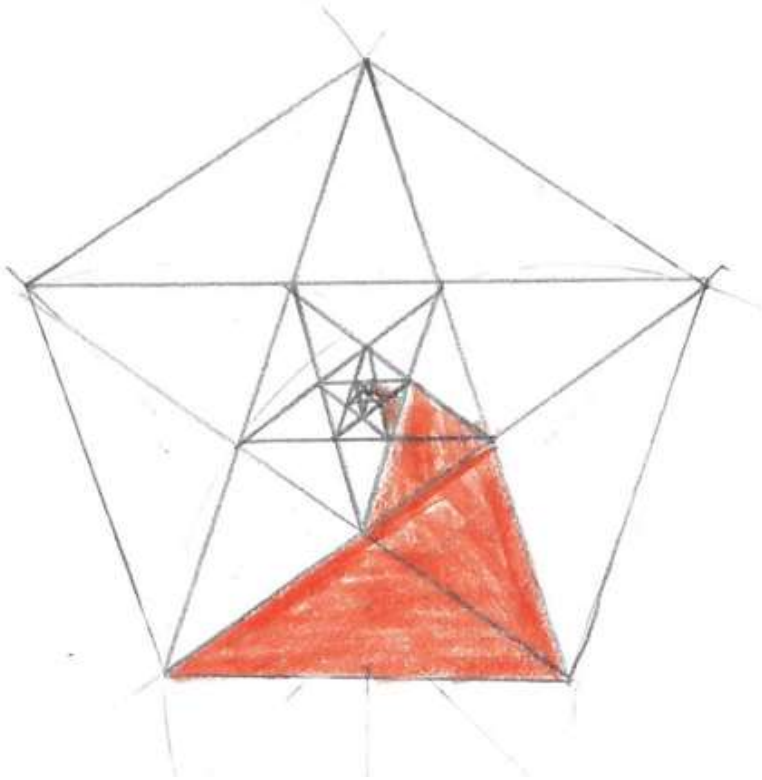


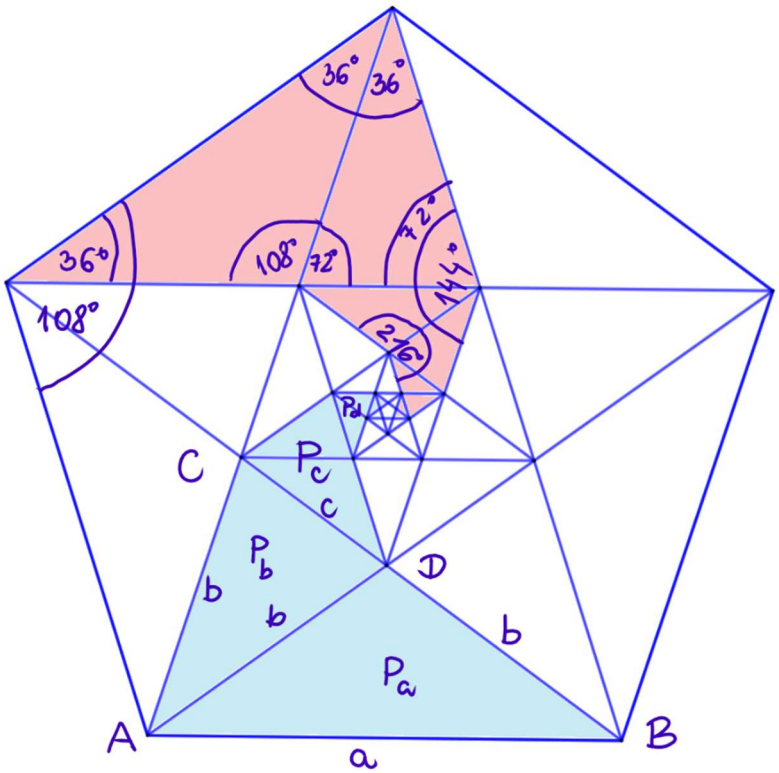




Spidron na bazie pięciokąta foremnego







Kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego:
$3 \cdot 180^0 : 5 = 108^0$
Kąty wewnętrzne półspidrona:
Kąty z lewej strony 72^0, 144^0,144^0 …
Kąty z prawej strony 36^0, 216^0, 216^0…

Z kombinacji kątów 36^0,72^0,144^0, 216^0 nie można otrzymać 360^0 – nie można wypełnić takimi spidronami płaszczyzny – nie można utworzyć parkietażu. (Pięć „ogonków” spidronów musi zawsze łączyć się w jednym miejscu tworząc „gniazdo”).

Największy trójkąt, jak i następne trójkąty są trójkątami równoramiennymi o kątach 36° ,72°,72°
Największy złoty trójkąt ABC składa się z dwóch trójkątów równoramiennych: ABD i złotego ACD.

<u>Wniosek:</u>
Półspidron składa się ze „złotych trójkątów”. Stosunek długości boku każdego z nich do długości jego podstawy jest złotą liczbą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

W ΔABC zachodzi:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Stąd:

$$\frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c = \frac{2b}{1+\sqrt{5}} \qquad a = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2} \qquad b = \frac{2a}{1+\sqrt{5}}$$

Obliczam stosunek odpowiednich boków trójkątów :

$$\frac{a}{c} = \frac{\frac{b(1+\sqrt{5})}{2}}{\frac{2b}{1+\sqrt{5}}} = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})}{2b} = \frac{(1+2\sqrt{5}+5)}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ c$$

Wniosek:

Każdy następny bok trójkąta jest $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ razy mniejsze od poprzedniego, a pole $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ razy mniejsze.

Obliczam pola trójkątów (przyjmując $sin36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$):

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot sin36^0 = \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{8}\cdot a^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 0{,}294a^2$$

$$P_b = P_{ACD} = \frac{1}{2}b^2 \cdot sin36^0 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a}{1+\sqrt{5}}\right)^2 \cdot sin36^0 = \frac{a^2}{3+\sqrt{5}} \cdot sin36^0 =$$
$$= \frac{a^2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}112a^2$$

$$P_a = P_{ABD} = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin36^0 = \frac{1}{2}\cdot a\left(\frac{2a}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot sin36^0 = \frac{a^2}{1+\sqrt{5}} \cdot sin36^0 =$$
$$= \frac{a^2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}182a^2$$

Pole pięciokąta foremnego:

$$P_5 = \frac{5}{4}\cdot a^2 \cdot ctg36^0 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$$

Pole jednego półspidrona:

$$P_S = \frac{1}{5}P_5 = \frac{1}{4}\cdot a^2 \cdot ctg36^0 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{20} \approx 0{,}344a^2$$

Różnica między polem półspidrona, a polem największego trójkąta:

$$P_S - P_{ABC} \approx 0{,}344a^2 - 0{,}294a^2 \approx 0{,}05a^2$$

Próbowałem porównać pola trójkątów przekształcając wyrażenia z pierwiastkami (co było trudne ze względu na pierwiastki występujące we wzorach– nie znalazłem żadnej konkretnej zależności). Obliczyłem więc przybliżenia tych pól co potwierdziło moje przypuszczenia – nie ma pomiędzy trójkątami takiej zależności jak dla trójkątów w sześciokącie foremnym czy w kwadracie.

Wniosek:

W półspidronach zbudowanych w pięciokącie foremnym:

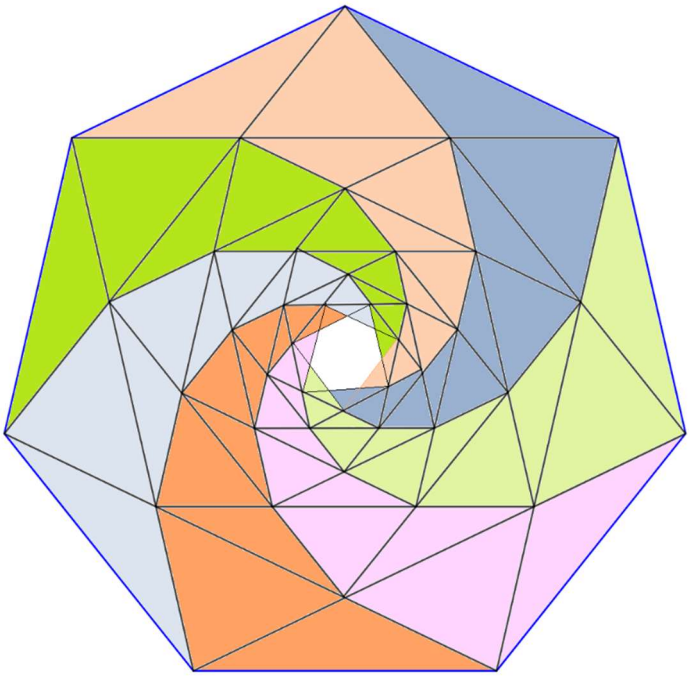
$$P_b \neq P_S - P_a$$

oraz :

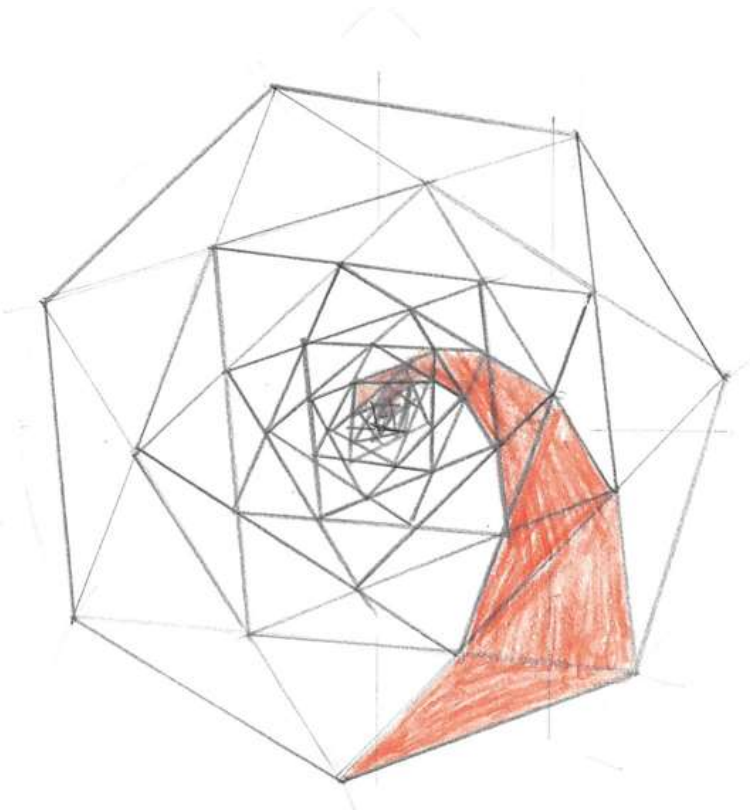
$$P_S - P_a \neq P_b + P_c + \cdots$$

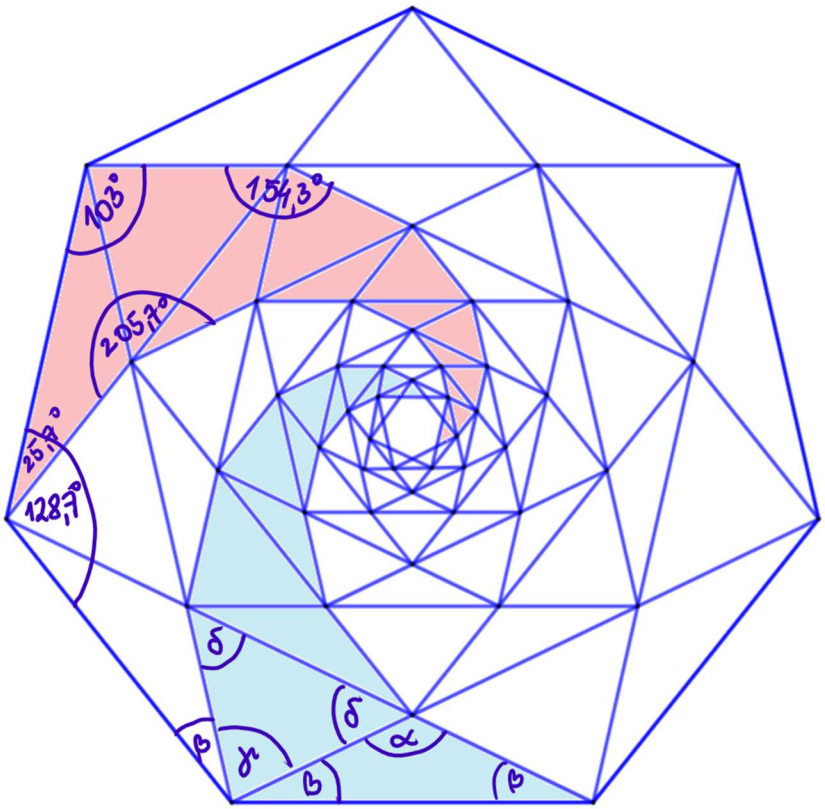
Spidron na bazie siedmiokąta foremnego

Siedmiokąta foremnego nie da się skonstruować, można skonstruować co najwyżej jego przybliżenie.



Przedstawiona przeze mnie konstrukcja jest przybliżona, to znaczy, że bok siedmiokąta ma długość w przybliżeniu równą długości odcinka, który służy do konstrukcji siedmiokąta foremnego. Błąd jest jednak na tyle mały, że w moich rysunkach można go pominąć.





Kąt wewnętrzny siedmiokąta foremnego $\alpha = 5 \cdot 180^0 : 7 = 128{,}7\ ^0$

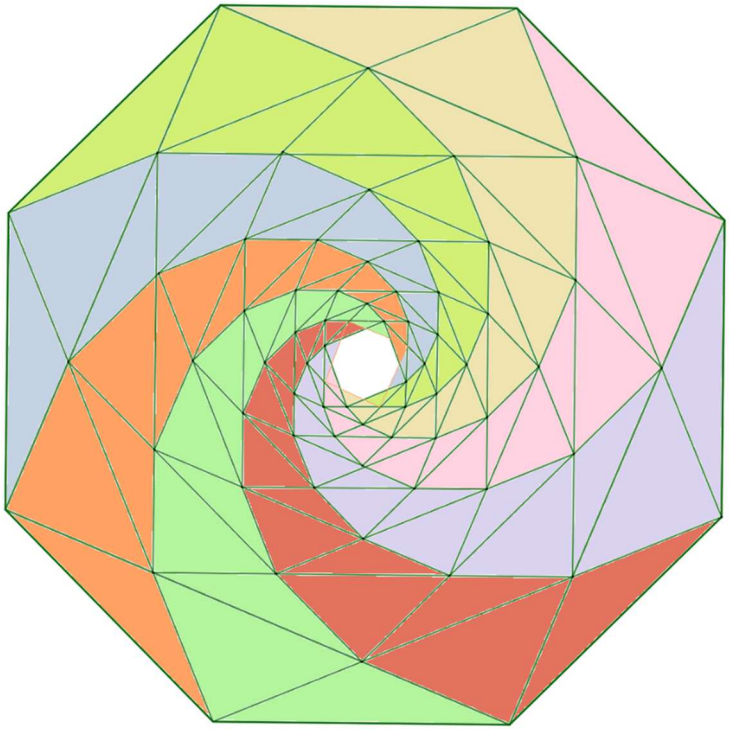
Każdy półspidron składa się z dwóch różnych trójkątów równoramiennych.

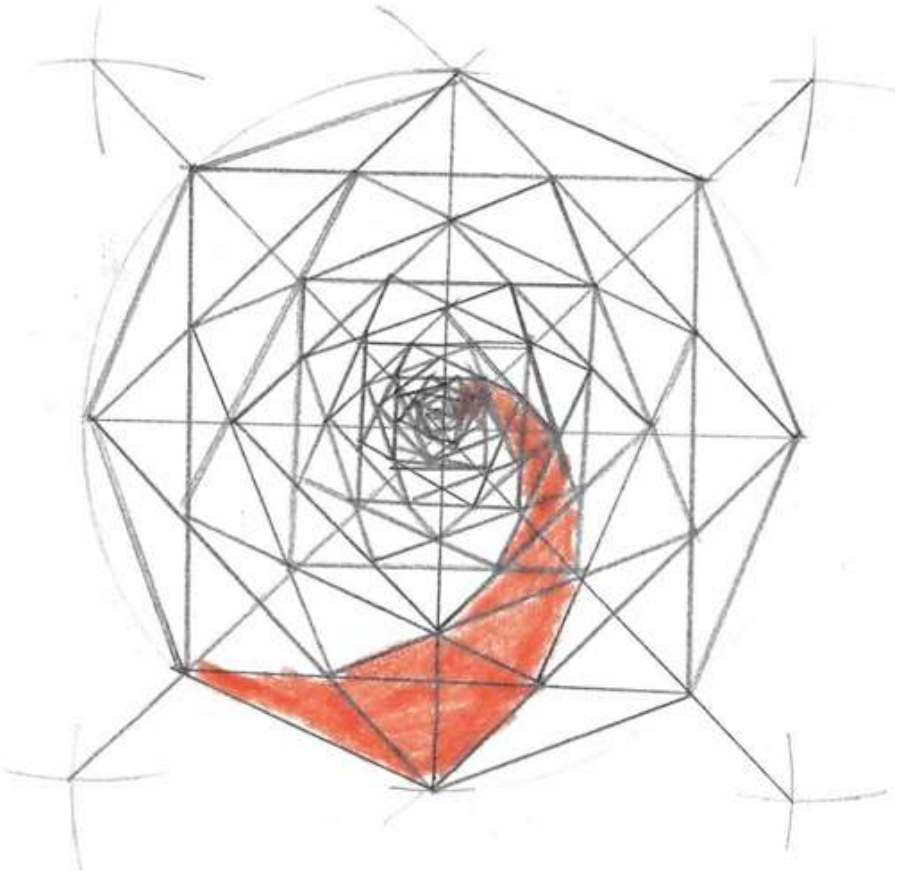
$\beta = (180^0 - \alpha) : 2 = 25{,}7^0$:
$\gamma = (128{,}7^0 - 2\beta) = 77{,}3^0$
$\delta = (180^0 - 128{,}7\ ^0) : 2 = 51{,}3^0$

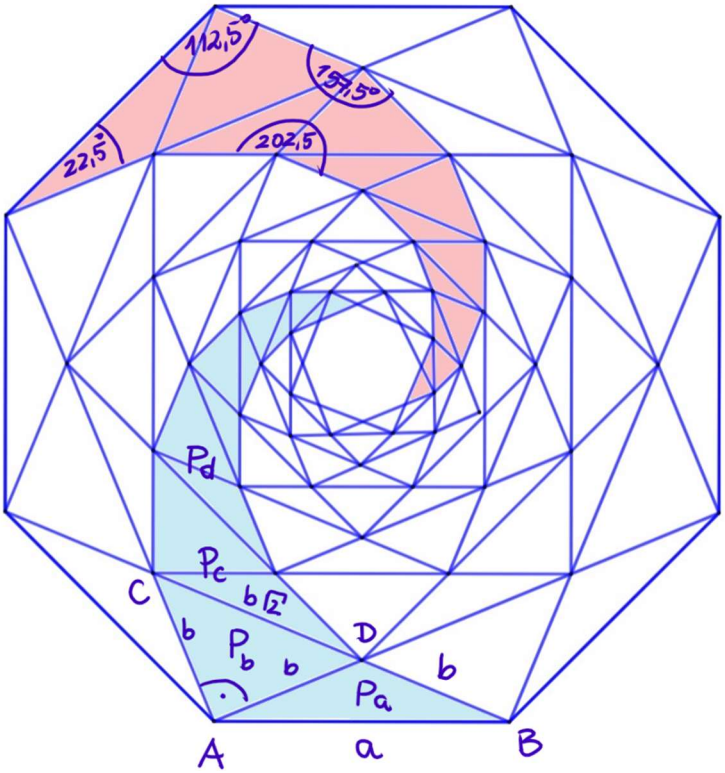
Kąty wewnętrzne półspidrona:
Kąty z lewej strony : 103^0,$154{,}3^0$, $154{,}3^0$,…
Kąty z prawej strony: $25{,}7^0$, $205{,}7^0$, $205{,}7^0$, ...

Stosunek kolejnych boków można obliczyć wykorzystując funkcje trygonometryczne. Ponieważ kąty wewnętrzne są przybliżone wartości długości boków też będą przybliżone. Z tego powodu pominąłem te obliczenia.
Żadna kombinacja kątów nie da też 360^0 – nie można stworzyć parkietażu.

Spidron na bazie ośmiokąta foremnego







Kąt wewnętrzny ośmiokąta foremnego:
6·180° : 8=135°

Największy trójkąt składa się z trójkąta równoramiennego o kątach 22,5° , 22,5° i 135° oraz trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Kąty wewnętrzne półspidrona:
Kąty z lewej strony: $112{,}5^0$, $157{,}5^0$, $157{,}5^0$…
Kąty z prawej strony: $22{,}5^0$, $202{,}5^0$, $202{,}5^0$, …

Te kąty również nie pozwalają na stworzenie parkietażu.

Obliczam stosunek odpowiednich boków trójkątów

$$\frac{\frac{1}{2}a}{b} = cos22{,}5^0$$

$$\frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$$

<u>Wniosek :</u>
Tyle razy następny bok trójkąta jest mniejszy od poprzedniego.

Pole ośmiokąta foremnego:

$$P_8 = 2(1+\sqrt{2})a^2$$

Pole półspidrona:

$$P_s = \frac{(1+\sqrt{2})a^2}{4}$$

Obliczam pola trójkątów ($b = \frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$):

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\left(b\sqrt{2}+b\right)\cdot sin45^0 = \frac{1}{2}\cdot b^2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}a^2$$

$$P_b = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{a^2(2-\sqrt{2})}{4}$$

$$P_a = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{4}$$

$$P_S - P_{ABC} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)a^2}{4} - \frac{1}{4}a^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$$

<u>Wniosek :</u>

W tym półspidronie nie ma takiej zależności miedzy polami trójkątów jak w półspidronie z sześciokąta, występuje inna zależność: suma pól pozostałych trójkątów jest $\sqrt{2}$ razy większa od pola największego trójkąta

Podsumowanie

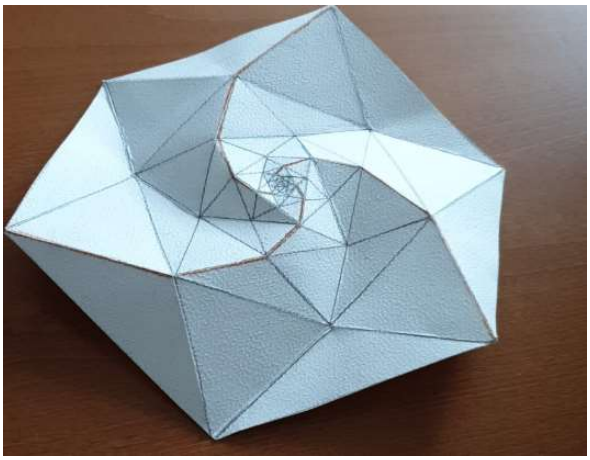
	4	5	6	8
Z jakich trójkątów składa się pierwszy największy trójkąt ?	jeden równoramienny prostokątny	równoramienny +złoty	równoramienny +równoboczny	równoramienny + równoramienny prostokątny
Jaki jest stosunek długości boków kolejnych trójkątów podobnych?	$1:\sqrt{2}$	$1:\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$1:\sqrt{3}$	$1:\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$
Jaki jest stosunek powierzchni kolejnych trójkątów podobnych?	1:2	$1:\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$	1:3	$1:\frac{\sqrt{2}+2}{2}$
Jaki jest stosunek powierzchni trójkątów sąsiadujących ze sobą (składających się na jeden trójkąt)?	x	$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$	1:1	$\frac{(\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})}$
$\frac{P_s - P_a}{P_a}$ $\frac{\text{pole półspidrona} - \text{pole największego trójkąta}}{\text{pole największego trójkąta}}$	1	≈0,17	0,5	$\sqrt{2}$

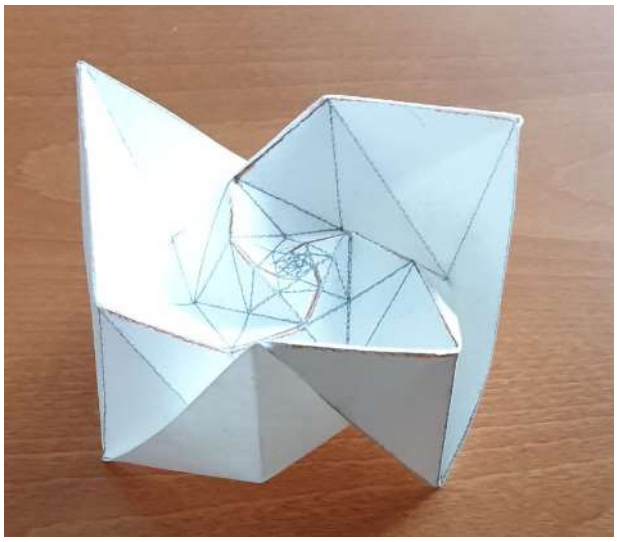
Chociaż w każdym wielokącie foremnym można w podobny sposób tworzyć spidrony, nie wszystkie trójkąty tworzące spidron mają ciekawe własności. Najwięcej takich zależności ma półspidron powstały w sześciokącie foremnym.

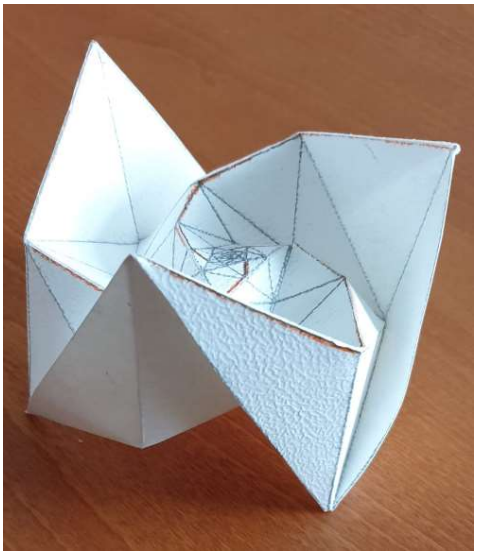
Tylko półspidronów powstałych z kwadratu oraz sześciokąta foremnego można tworzyć parkietaże. Mnie udało się ułożyć 10 różnych parkietaży, być może jest ich więcej. Ułożyłem 5 różnych parkietaży ze spidronów z kwadratu. Sądzę, że to wszystkie różne parkietaże.

Spidrony przestrzenne

Jedną z niesamowitych właściwości spidronów jest to, że można je „zgniatać” w trójwymiarowe kształty.
Można je też przestrzennie składać. Wykonałem taki zginający, wypiętrzający się spidron.

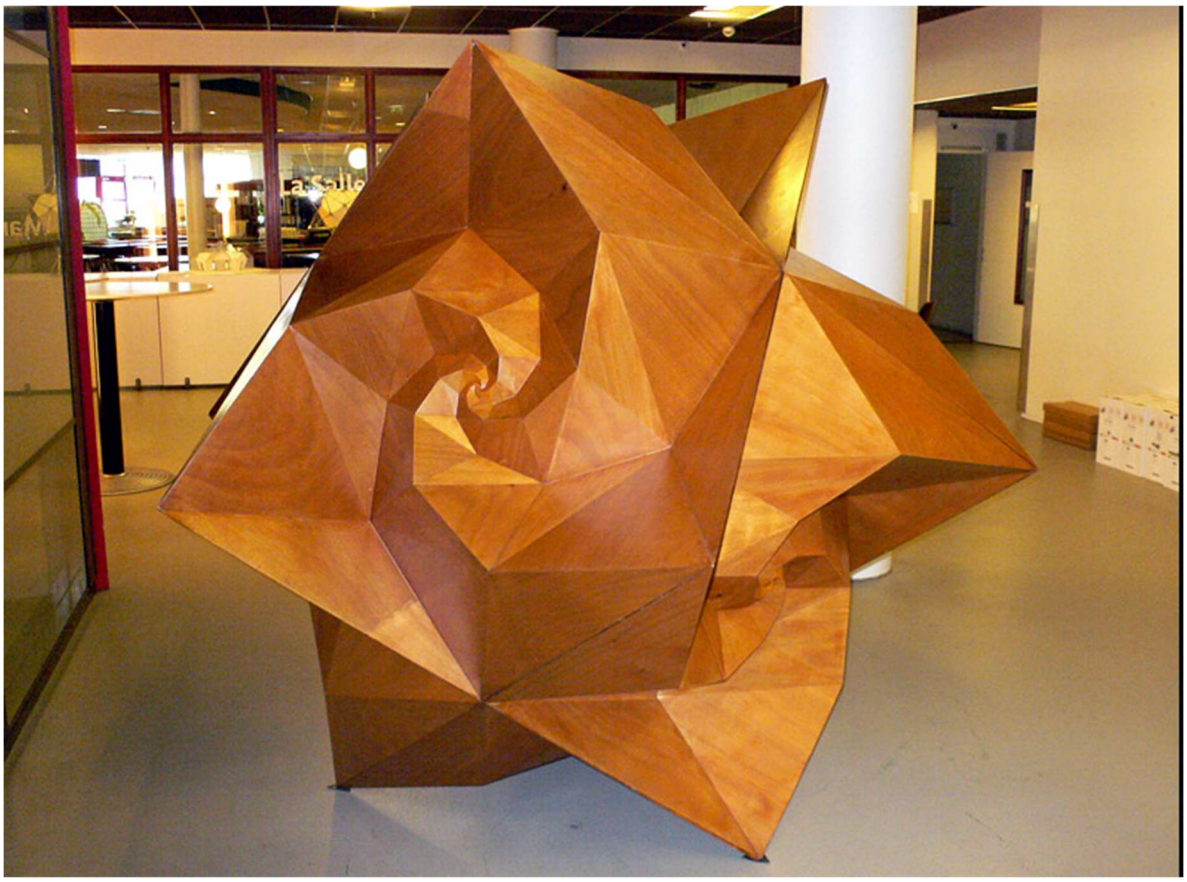






System spidron jest chroniony kilkoma patentami i wzorami przemysłowymi. Został nagrodzony złotym medalem na wystawie Genius Europe w 2005 roku. Był prezentowany w wielu czasopismach artystycznych, konferencjach i wystawach międzynarodowych.

Kilka warstw spidronowych form przestrzennych można wykorzystać jako amortyzatory lub strefy zgniotu w pojazdach. Powierzchnię można wykorzystać do tworzenia regulowanej ściany akustycznej lub systemu ogniw słonecznych, które podążają za słońcem.



http://edan.spidron.hu/SpidroNew/index.html

Bibliografia

https://www.medianauka.pl/wielokat-foremny
http://www.zobaczycmatematyke.krk.pl/003-golonka-kalwaria/index.html
https://www.math-only-math.com/exact-value-of-sin-36-degree.html
https://www.matemaks.pl/tablice-wartosci-funkcji-trygonometrycznych-dla-katow-ostrych.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Spidron
http://edan.spidron.hu/SpidroNew/index.html
https://www.youtube.com/watch?v=rvCBO9xChGA
http://polyspidrons.over-blog.com/tag/spidrons/
https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Math_p043/pure-mathematics/tiling-with-spidrons#procedure
https://spidron.hu/edan.szinhaz.org/SpidroNew/general_concept.htm
http://edan.spidron.hu/SpidronWorkBook/

Kontakt:

marchewkajacek9@gmail.com

Tel. 602443500 (tata)