Małopolski Konkurs Prac Matematycznych

Albert Einstein

i licealny problem z geometrii.

Martyna Smolska

Klasa pierwsza

XII Liceum Ogólnokształcące

Os. Kolorowe 29a

Kraków

2019/2020

CZĘŚĆ PIERWSZA – ODROBINA HISTORII

Niedawno moja nauczycielka matematyki opowiedziała mi historię opisaną w artykule: *„Albert Einstein and the high school geometry problem.The famous physicist's answer to a Hollywood high schooler's letter went viral 65 years ago.",* Davida Toppera i Dwight E. Vincent'a, który był zamieszczony w czasopiśmie Physics Today, 19 grudnia 2017. Historia zawarta w artykule zaciekawiła mnie i skłoniła do matematycznych poszukiwań, dlatego chciałabym go po krótce streścić.

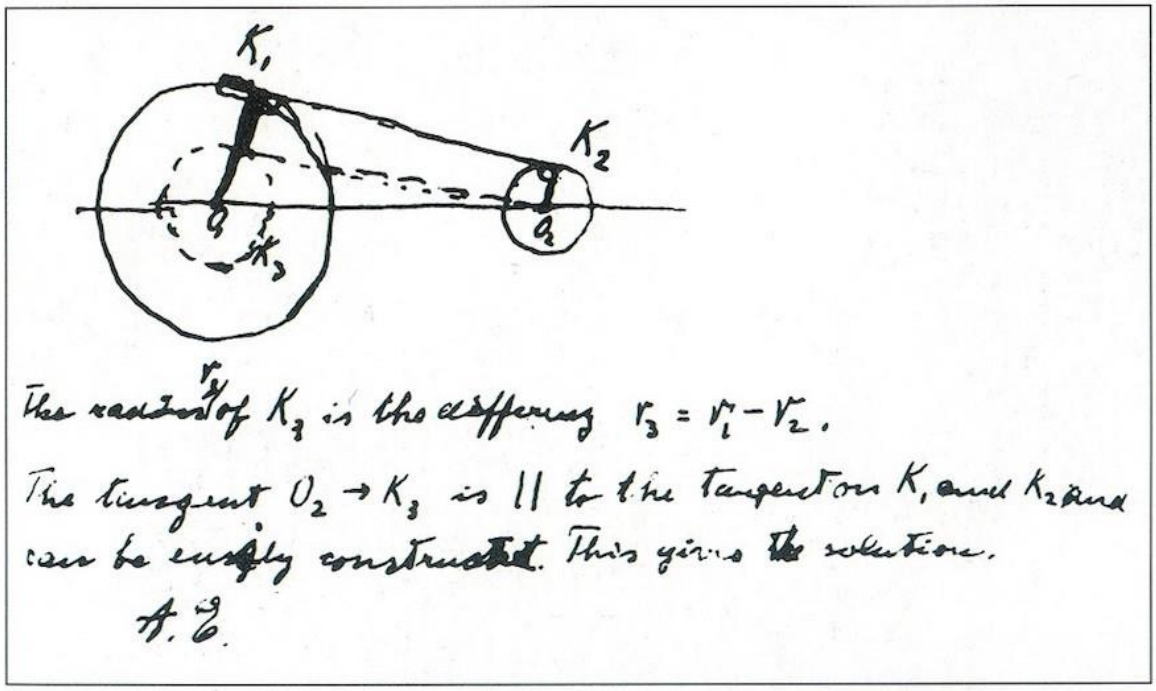
Na początku maja 1952 r. 73-letni Albert Einstein otrzymał list od 14 letniej Johanny Mankiewicz, licealistki z Westlake School for Girls w Los Angeles. Johanna była córką Hermana Mankiewicza, pisarza, który współpracował z Orsonem Wellesem przy filmie Citizen Kane. Jej wujek był znanym producentem i reżyserem Józefem Mankiewiczem. Niektórzy z jej szkolnych kolegów, jak Jane Fonda, stali się gwiazdami filmowymi.

Johanna i jej koledzy z klasy zmagali się z trudnym dla nich zadaniem domowym z geometrii. W liście do Einsteina dziewczyna napisała: „Zdaję sobie sprawę, że jesteś bardzo zajętym mężczyzną, ale jesteś jedyną znaną nam osobą, która może udzielić odpowiedzi". Otaczając się hollywoodzkimi gwiazdami, Johanna miała odwagę, aby skontaktować się z największą gwiazdą na amerykańskiej scenie naukowej. Po przedstawieniu problemu Einsteinowi powiedziała: „Myślę, że zgodzisz się, że to najtrudniejsze zadanie! "

W rzeczywistości Johanna prosiła o pomoc w standardowym problemie geometrii euklidesowej obejmującym zastosowanie twierdzenia Pitagorasa. Był to klasyczny problem, który pojawiał się w podręcznikach z matematyki w tamtych czasach:

Jaka jest długość „wspólnej zewnętrznej stycznej dwóch stycznych kół o promieniu 8 cali i 2 cali"?

Albert Einstein jak to miał w zwyczaju napisał swoją odpowiedź na odwrocie listu Johanny. Wysłał list pocztą lotniczą. Reprodukcję odręcznej odpowiedzi Einsteina pokazano poniżej na rysunku nr 1:



Obraz z odręcznym rozwiązaniem Einsteina został po raz pierwszy odtworzony w Los Angeles Times z 16 maja 1952 r. Źródło: Kenji Sugimoto, Albert Einstein: A Photographic Biography (1989), str. 163

Pismo pod rysunkiem można przetłumaczyć następująco:

Promień r_3 koła K_3 jest różnicą $r_3 = r_1 - r_2$.*
Styczna O_2 -> K_3 jest || do stycznej K_1 i K_2,
łatwo można ją skonstruować.
To daje rozwiązanie.
A. E

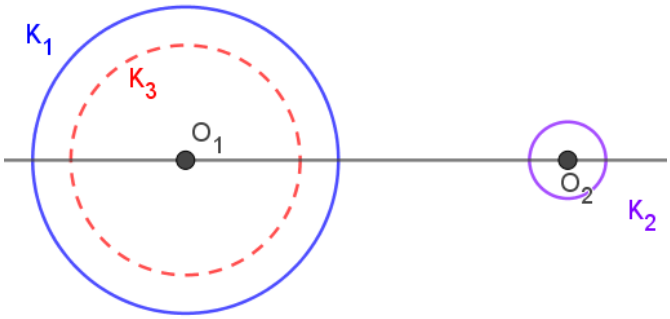
*(*differenz to niemiecka pisownia – język ojczysty Einsteina – niemiecki, dokonał dwóch drobnych ingerencji w odpowiedź; drugą z nich było oznaczenie koła literą K prawdopodobnie od słowa kreis – koło po niemiecku)*

<u>Logika Einsteina w rozwiązaniu wydaje się być następująca</u>:

Krok 1.

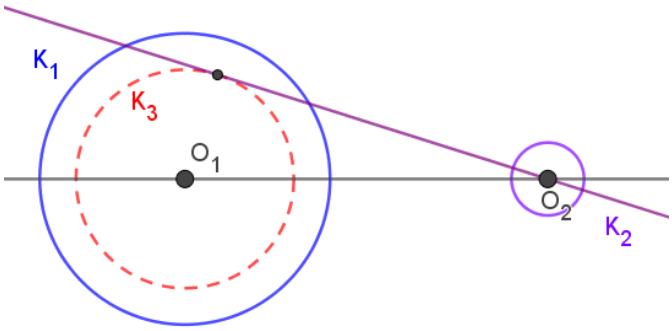
Zbuduj (na przykład za pomocą cyrkla) okrąg K_3 zaznaczony linią przerywaną o promieniu równym różnicy dwóch podanych promieni $r_3 = r_1 - r_2$.

W tym przypadku $r_1 = 8\ cali$ oraz $r_2 = 2\ cale$ więc okrąg K_3 ma promień $r_3 = 6\ cali$.



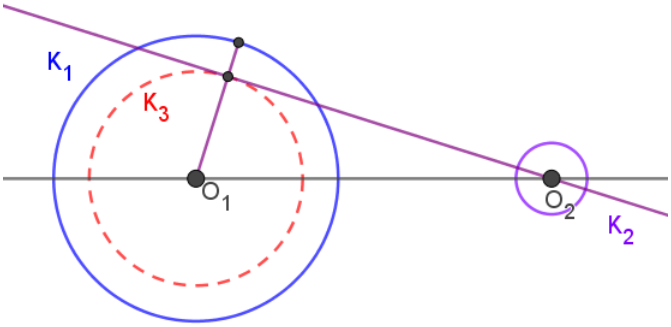
Krok 2.

Narysuj styczną do okręgu K_3 przechodzącą przez środek mniejszego okręgu, czyli punkt O_2.

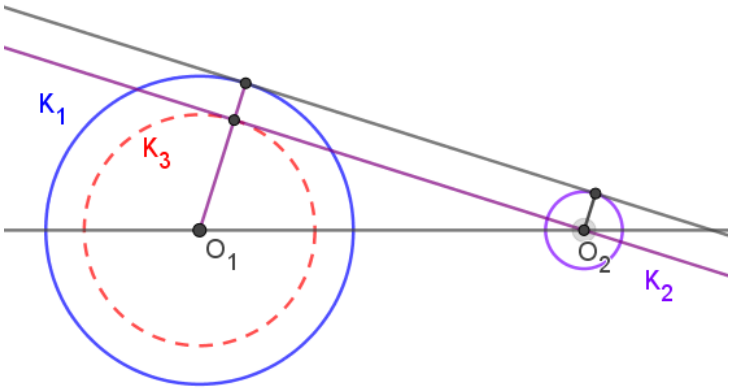


Krok 3.

Poprowadź promienie okręgów K_3 i K_1 przez punkt styczności.



Krok 4. Styczna do koła K_3 przechodząca przez punkt O_2 jest równoległa do stycznej poprowadzonej do kół K_1 i K_2.

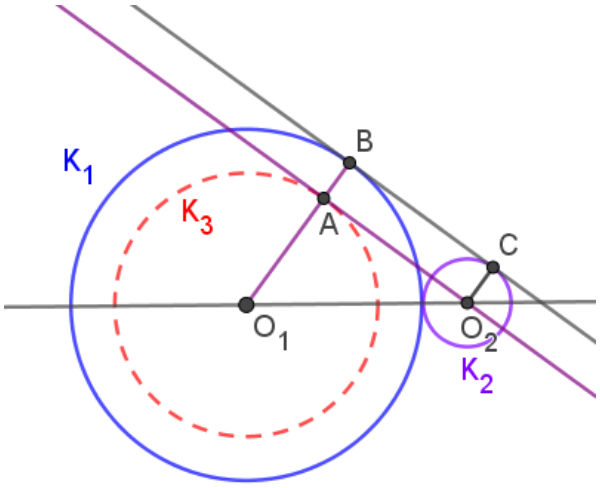


Krok 5. W tym momencie wydaje się, że Einstein nie miał ochoty zaprezentować całego rozwiązania. Nagle zamknął odpowiedź słowem „To daje rozwiązanie".

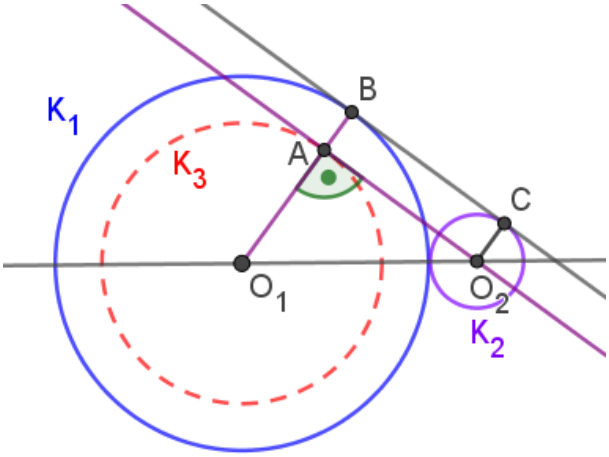
Jak rozwiązać zadanie do końca? Co jeszcze musiała by zrobić Johanna, aby uzyskać ostateczną odpowiedź?

Einstein w rozwiązaniu z niewyjaśnionych powodów nie wspomniał, że rozważane koła były kołami stycznym, co bezpośrednio wynikało z treści zadania. Oznacza to, że koła mają jeden punkt wspólny.

Zmienimy rozwiązanie Einsteina uwzględniając fakt, że koła są styczne zewnętrznie. Wprowadzimy dodatkowo oznaczenia punktów przecięcia.



W trójkącie O_1AO_2 kąt przy wierzchołku A jest prosty, bowiem kąt pomiędzy styczną, a promieniem poprowadzonym do punktu styczności jest kątem prostym.



Szukamy długości *„wspólnej zewnętrznej stycznej dwóch stycznych kół”*, czyli długości odcinka BC. Styczne AO_2 i BC są równoległe, więc $|AO_2| = |BC|$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie O_1AO_2 mamy:

$$|O_1A|^2 + |AO_2|^2 = |O_1O_2|^2$$

$$r_3^2 + |AO_2|^2 = (r_1 + r_2)^2$$

Podstawiając wartości liczbowe i odpowiednio przekształcając dane równanie, otrzymujemy:

$$|AO_2|^2 = (8 + 2)^2 - 6^2$$

$$|AO_2|^2 = 100 - 36$$

$$|AO_2|^2 = 64$$

$$|AO_2| = 8$$

Ponieważ $|AO_2| = |BC|$, więc *długość wspólnej zewnętrznej stycznej dwóch stycznych kół* z naszego zadania jest równa 8.

Rozwiązanie Einsteina można uznać raczej za symboliczne przedstawienie problemu. Nie odwołuje się do podanych długości liczbowych ani nie wskazuje zastosowania twierdzenia Pitagorasa dla skonstruowanego trójkąta. Co więcej, nie uwzględnia styczności kół, pomimo tego, że ta informacja była konieczna do znalezienia rozwiązania. Godne pochwały jest to, że chciał pomóc uczennicy, jednak można wątpić, by przedstawione w ten sposób rozwiązanie było dla niej zrozumiałe.

Rodzice Johanny byli sławni, dlatego reporterzy gazet szybko dowiedzieli się o odpowiedzi Einsteina. Pojawiło się wiele artykułów opisujących tę historię. Prasa zachwyciła się gotowością Einsteina do pomocy, pomimo tego, że był czołowym naukowcem na świecie.

Zarówno „Los Angeles Times", jak i „New York Times" umieściły tę historię na swoich pierwszych stronach dnia 16 maja 1952 r. „New York Times" zaokrąglił wiek Johanny i opatrzył artykuł nagłówkiem „Einstein wysyła QED problemu uczennicy, 15 lat". LA Times zatytułował swój artykuł „Utknęła z geometrią, dziewczyna zwraca się do Einsteina". Historia Johanny była nawet wiadomością na pierwszej stronie w australijskim Sydney Morning Herald pod hasłem „Dr. Einstein rozwiązuje problem geometrii ". Bazując na wyszukiwarkach internetowych można stwierdzić, że historia ta ukazała się w co najmniej 82 gazetach w samych Stanach Zjednoczonych. Dzisiaj powiedzielibyśmy, że historia Johanny stała się viralem.

Dzień później, po pojawieniu się artykułów, wydźwięk historii nie był już tak pozytywny dla Einsteina i Johanny. Z artykułu z 17 maja z LA Times zatytułowanego „Einstein ćwiczy się jako nauczyciel geometrii" można było się dowiedzieć, że chociaż Johanna była wdzięczna za odpowiedź Einsteina, tak jak się spodziewaliśmy nadal nie rozumiała „hieroglifów" w jego odpowiedzi.

Tego samego dnia opublikowano krótki artykuł zatytułowany

„Einstein pomógł jej, ale niewystarczająco",

któremu towarzyszyło zdjęcie Johanny siedzącej z otwartym segregatorem i trzymającej list od Einsteina. Kolejne szeroko opublikowane zdjęcie wyraźnie pokazywało niepewność Johanny w związku z odpowiedzią Einsteina. Próbując odtworzyć rozwiązanie na małej tabliczce, błędnie odczytała ręcznie pisane symbole Einsteina jako symbole pierwiastkowe, co skutkowało błędnym i pozbawionym znaczenia równaniem.

Co ciekawe, interesujący się matematyką dentysta z Los Angeles Leon Benkoff, zauważył, że z odpowiedzią Einsteina było coś nie tak.

Cytuje się go, mówiąc: *„Cóż, spojrzałem na szkic rozwiązania przedstawiony w gazecie, a Einstein też nie miał racji. Udzielił odpowiedzi na inny problem. Opisał, jak zbudować styczną do koła, ale problemem było obliczenie długości stycznej. ”*

Benkoff zadzwonił do gazety Mirror i powiedział im o „błędzie". Redaktorzy byli sceptyczni. Ale wizyta reportera w domu Benkoffa w celu sprawdzenia jego poświadczeń wystarczyła, aby następnego dnia wylądować na pierwszej stronie gazety. Nagłówek brzmiał:

„Einstein nie radzi sobie z matematyki, ale nadal ma Nagrodę Nobla".

Jak powiedział Benkoff, stał się znany w całym mieście jako *„człowiek, który poprawił Einsteina ".*

Johannie problem z geometrii, który wywołał nie małe zamieszanie, wytłumaczył nauczyciel na dzień przed przybyciem listu Einsteina. Pomimo interwencji najsławniejszego żyjącego naukowca na świecie, nie miała genialnego rozwiązania, którym mogłaby zaimponować innym uczniom.

Do tego wszystkiego nauczycielka i dyrektor nie byli zadowoleni z jej publicznego oświadczenia, że Einstein jest *„jedyną znaną nam osobą, która może udzielić odpowiedzi".* W artykule uzupełniającym New York Times zauważono, że Johanna została zganiona przez władze szkolne za pisanie do Einsteina. Dyrektor, Helen Temple, powiedziała podobno *„Wielcy naukowcy powinni przejmować się tylko wielkimi problemami"* .

Nie jest jasne, jak się czuł Albert Einstein, bowiem odmówił komentarza.

Zainteresowana problemem Johanny postawiłam sobie pytania:

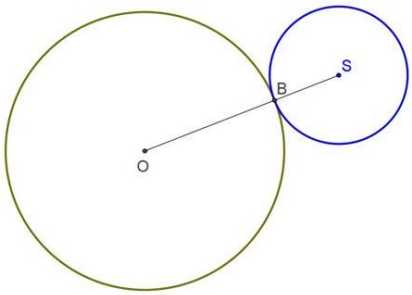
- *Czy z podobnym problemem spotyka się uczeń liceum obecnie?*
- *Czy przyjdzie mi spotkać się z zadaniem dotyczącym okręgów i stycznych do okręgów na egzaminie maturalnym?*

Byłam ciekawa, czy jako licealistka dam radę rozwiązać je samodzielnie, bez pomocy.

CZĘŚĆ DRUGA – MOJA HISTORIA,
czyli problemy okręgów stycznych, prostych stycznych w zadaniach licealnych.

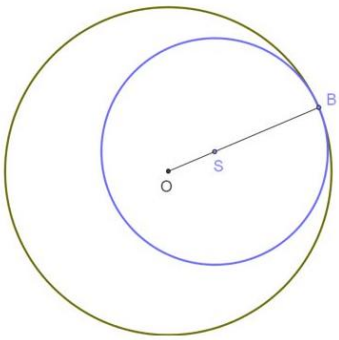
Na początku przypomniałam sobie wszystko, co wiedziałam o okręgach i prostych stycznych:

- OKRĘGI STYCZNE ZEWNĘTRZNIE



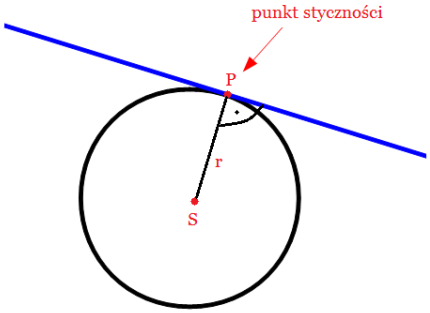
$|OS|=r_1+r_2$

- OKRĘGI STYCZNE WEWNĘTRZNIE



$|OS|=r_1-r_2$

- STYCZNE DO OKRĘGÓW



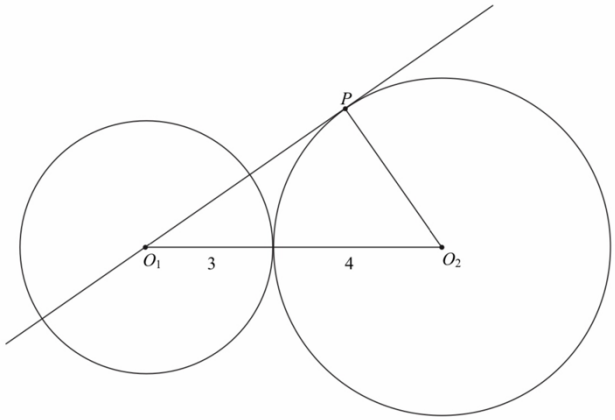
Następnie przejrzałam arkusze maturalne z poprzednich lat z obydwóch poziomów w poszukiwaniu zadań o okręgach i prostych stycznych. Odnalazłam pięć zadań – cztery na poziomie podstawowym i jedno na poziomie rozszerzonym.

Dwa z nich umiałam rozwiązać od razu, pomoc nie była potrzebna. Oto one:

Zadanie 1. Matura podstawowa 2016 (1 pkt)

Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie P przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek).

Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P, jest równe:



A. 14 B. $2\sqrt{33}$ C. $4\sqrt{33}$ D. 12

Oto moje rozwiązanie:

Trójkąt O_1PO_2 jest trójkątem prostokątnym, bo kąt pomiędzy promieniem PO_2 i styczną PO_1 jest kątem prostym. Długość odcinka PO_2 jest równa 4, bo jest on promieniem okręgu o środku w punkcie O_2.

Stosuję twierdzenie Pitagorasa:

$$|PO_1|^2 + |PO_2|^2 = |O_1O_2|^2$$
$$|PO_1|^2 + 4^2 = 7^2$$
$$|PO_1|^2 + 16 = 49$$
$$|PO_1|^2 = 33$$
$$|PO_1| = \sqrt{33}$$

Liczę pole:

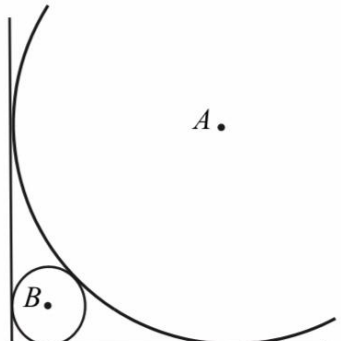
$$P_\Delta = \frac{1}{2}|PO_1||PO_2|$$
$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{33}$$
$$P_\Delta = 2\sqrt{33}$$

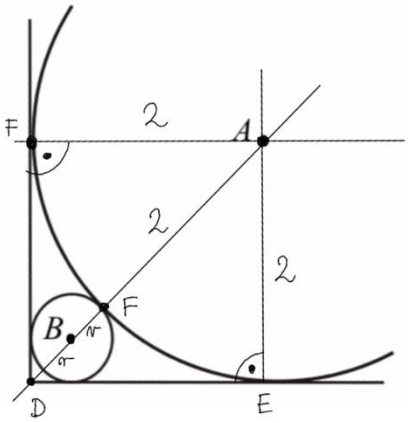
Odpowiedź B. Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P, jest równe $2\sqrt{33}$.

Zadanie 2. Matura podstawowa 2018 (2 pkt)

Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.

Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.





Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Wtedy $|AD| = 2\sqrt{2}$ jako przekątna kwadratu o boku długości 2 oraz $|AF| = 2$.

Zatem $|DF| = 2\sqrt{2} - 2$.

Średnica okręgu o środku B i promieniu r jest krótsza od odcinka DF, więc $2r < 2\sqrt{2} - 2$.

Zatem $r < \sqrt{2} - 1$

Co kończy dowód.

Kolejne zadanie sprawiło mi trochę problemów, potrzebowałam wskazówki od nauczyciela. Oto one:

Zadanie 3. Matura podstawowa 2019 (1 pkt)

Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16. Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B. Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zobacz rysunek).

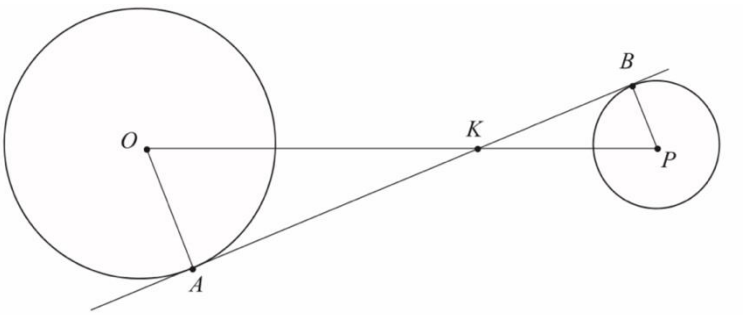
Wtedy

A. $|0K| = 6$

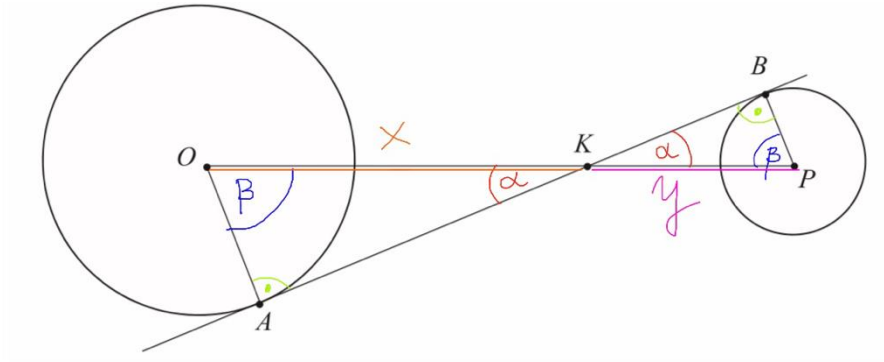
B. $|0K| = 8$

C. $|0K| = 10$

D. $|0K| = 12$



Rozwiązanie:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z danych w zadaniu $|OP| = x + y$, więc $16 = x + y$, po przekształceniu $y = 16 - x$.

Trójkąty są podobne z cechy kąt, kąt, kąt, zatem:

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{16 - x}$$

$$5(16 - x) = 3x$$

$$80 - 5x = 3x$$

$$80 = 8x$$

$$x = 10$$

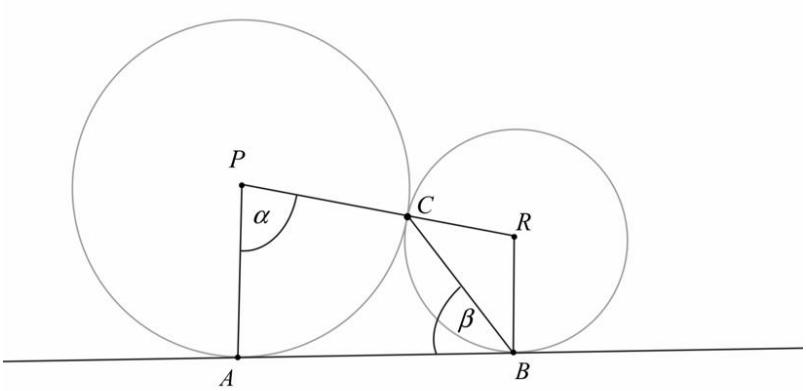
Zatem prawidłowa jest odpowiedź C - $|0K| = 10$.

Tego zadania nie rozwiązałam samodzielnie. Nie znałam podobieństwa trójkątów, nie umiałam rozwiązywać nierówności wymiernych. Mogłam jednak zwrócić się do nauczyciela z prośbą o wskazówkę.

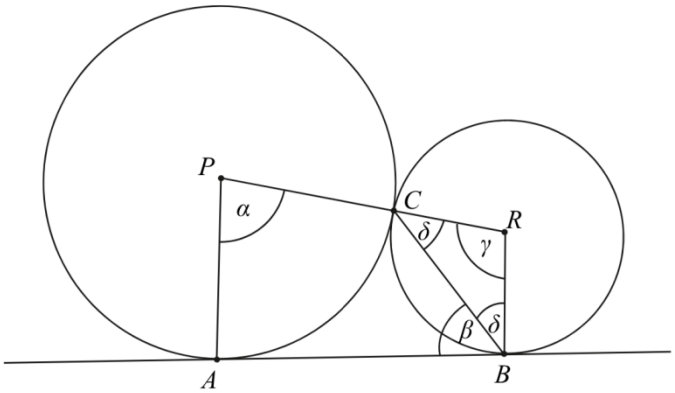
Kolejnych zadań nie rozwiązałam samodzielnie, oto one:

Zadanie 4. Matura podstawowa 2017 (2 pkt)

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R , styczne zewnętrznie w punkcie C.
Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$
i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ *(zobacz rysunek).*
Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.



Rozwiązanie:



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $|\sphericalangle ABR| = 90^0$.

Stąd δ =$|\sphericalangle CBR| = 90^0 - \beta$.

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle BCR|$ = δ =$|\sphericalangle CBR| = 90^0 - \beta$.

Zatem

$$|\sphericalangle BRC| = \gamma = 180^0 - 2(90^0 - \beta) = 180^0 - 180^0 + 2\beta = 2\beta.$$

Suma miar kątów czworokąta ABRP jest równa 360°, $|\sphericalangle PAB| = 90^0$,więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BRP| + |\sphericalangle RPA| = 360^0$$

czyli $90^0 + 90^0 + 2\beta + \alpha = 360^0$.

Stąd $\alpha + 2\beta = 180^0$

$\alpha = 180^0 - 2\beta$.

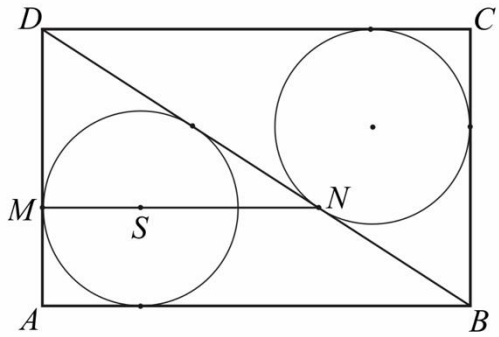
To kończy dowód.

Tego zadania nie rozwiązałam samodzielnie, rozwiązanie przekopiowałam z zasad oceniania zadań maturalnych ze strony cke.gov.pl

Ostatnim zadaniem z którym przyszło mi się zmierzyć, było zadanie z poziomu rozszerzonego:

Zadanie 5. Matura rozszerzona 2016 (3 pkt)

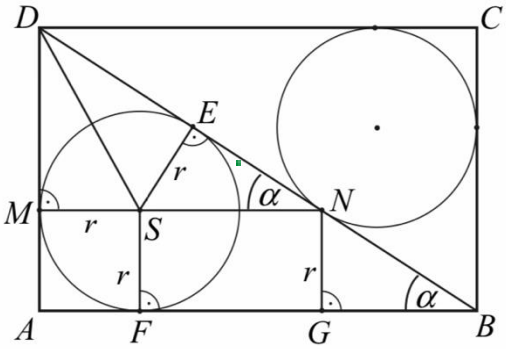
Dany jest prostokąt ABCD. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

Pomimo prób, nie udało mi się rozwiązać samodzielnie tego zadania. Jestem dopiero w klasie pierwszej liceum i mam za mało wiedzy. Stojąc jednak przed problemem, mogłam spojrzeć na rozwiązanie zamieszczone na stronie Centralnej Komisji Egzaminacyjnej. Prezentowane rozwiązanie pochodzi z właśnie tej strony:

Poprowadźmy promienie SE i SF okręgu o środku S do punktów E i F styczności tego okręgu odpowiednio z przekątną BD i bokiem AB prostokąta.



Niech G będzie rzutem punktu N na bok AB, jak na rysunku.

Wówczas $|SM| = |SE| = |SF| = |MA| = |NG|$ oraz $|DE| = |BN|$.

Trójkąty DMS i DES są prostokątne, więc z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów otrzymujemy

$$|DM| = \sqrt{|DS|^2 - |SM|^2} = \sqrt{|DS|^2 - |SE|^2} = |DE|$$

Odcinek MN jest równoległy do AB, więc kąty GBN i ENS są równe0.

Trójkąty BGN i NES są prostokątne, więc kąty BNG i NSE także są równe.

To z kolei wraz z równością $|SE| = |NG|$oznacza, że trójkąty BGN i NES są przystające. Zatem$|BN| = |NS|$.

Stąd $|MN| = |MS| + |SN| = |MA| + |BN| = |MA| + |DE| = |MA| + |DM| = |AD|$

To kończy dowód.

Uwaga:

Równość odcinków DM i DE wynika też bezpośrednio z twierdzenia o odcinkach stycznych.

Johanna była licealistką w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Jej świat był zupełnie inny od mojego. W tych czasach uczeń mający rozwiązać problem z matematyki musiał bazować na swojej wiedzy. Rozwiązanie często zabierało mu bardzo dużo czasu. Musiał dogłębnie zbadać problem, dokładnie znać wszystkie definicje i twierdzenia. Mógł zwrócić się o pomoc do nauczyciela, ale było to źle widziane. Jak widać Johanna zwróciła się o pomoc do samego Alberta Einsteina. W moich czasach dostęp do informacji jest zbyt łatwy. Stojąc przed rozwiązaniem problemu wcale nie musimy się wysilać. Rozwiązania większości zadań można znaleźć w Internecie. Wszystko pięknie prezentują nam programy komputerowe i symulacje. Czy to powoduje, że umiemy matematykę lepiej? Nie wydaje mi się.

Bibliografia:

1. Część historyczną przetłumaczono i streszczono na podstawie artykułu:

   „Albert Einstein and the high school geometry problem

   The famous physicist's answer to a Hollywood high schooler's letter went viral 65 years ago.",

   Davida Toppera i Dwight E. Vincent zamieszczonego w czasopiśmie Physics Today, 19 grudnia 2017

   Autor artykułu - *David R. Topper* jest emerytowanym profesorem na University of Winnipeg, który wykładał historię nauki i historii sztuki przez 42 lata.

   Drugi z autorów - *Dwight E. Vincent* jest profesorem nadzwyczajnym fizyki na University of Winnipeg. Interesuje się kosmologią przy użyciu wyższych wymiarów, a także interesuje się pracą naukową Einsteina.

2. Wskazane rozwiązania zadań maturalnych przekopiowałam z zasad oceniania umieszczonych na stronie Centralnej Komisji Edukacyjnej.