

Matematyczna wieża Babel

Anna Gawin

klasa IV

**Szkoła Podstawowa im. Mikołaja Kopernika
w Mikołajowicach**

Opiekun: mgr Agnieszka Batko

Spis treści

Wstęp	3
Systemy liczbowe i trochę z historii liczenia	4
Dziesiętkowy system liczbowy	7
Dwójkowy system liczbowy (System binarny)	10
Zastosowanie systemu dwójkowego	17
Podsumowanie	23

Wstęp

Podczas lekcji matematyki o sposobach zapisywania liczb dowiadujemy się, że naturalny dla nas zapis to klasyczny system dziesiętkowy. Dlaczego naturalny? Dlaczego klasyczny? a przede wszystkim: Czy tylko taki i innego nie ma? Pojawiły się u mnie pytania o to, czy istnieją inne systemy liczbowe? Oczywiście moja ciekawość musiała być zaspokojona natychmiast, więc podnoszę rękę, zadaję pytanie i ... słyszę zdecydowaną odpowiedź: „Oczywiście i jest ich sporo! Jeśli temat Cię interesuje to proszę przygotuj na kolejną lekcję coś na temat systemu np. dwójkowego.” Zapisałam starannie wskazówki i pierwsze o co zapytałam mamę po powrocie do domu to to, czy słyszała coś o systemie dwójkowym. Okazało się, że słyszała i to sporo (mama jest informatykiem). Z wielkim zdziwieniem popatrzyła na mnie, uczennicę czwartej klasy i z powagą powiedziała: „System dwójkowy zajmuje szczególne miejsce pośród sposobów zapisywania liczb” i szczerze się uśmiechnęła.

Na kolejną lekcję przygotowałam kilka informacji o systemie dwójkowym, które przedstawiłam w klasie. Z wielkim zaciekawieniem moi koledzy słuchali tego i zadawali pytania, na które niestety nie umiałam wówczas podać odpowiedzi, dlatego postanowiłam przy pomocy Nauczyciela, i Mamy oczywiście, je znaleźć.

Jaki jest najstarszy system zapisu liczb, jak liczono dawniej i jak zapisywano liczby? Byłam ciekawa, czy można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić w systemie dwójkowym? Czy można by go było wykorzystać w życiu codziennym zamiast systemu dziesiętkowego? Jak to zastosowanie mogłoby wyglądać? Czy byłoby wygodne w użyciu? A to, czego się dowiedziałam i nauczyłam przedstawia właśnie moja praca.

Systemy liczbowe i trochę z historii liczenia

System liczbowy to sposób w jakim liczby są zapisywane oraz w jaki sposób nazywamy te liczby. Mamy dwa systemy: pozycyjny i addytywny.

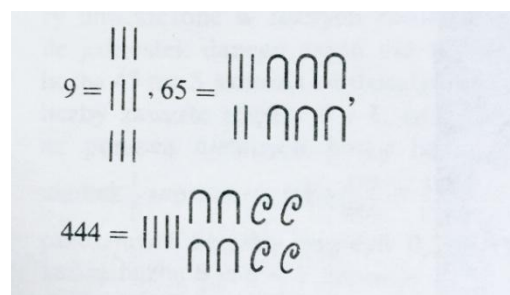
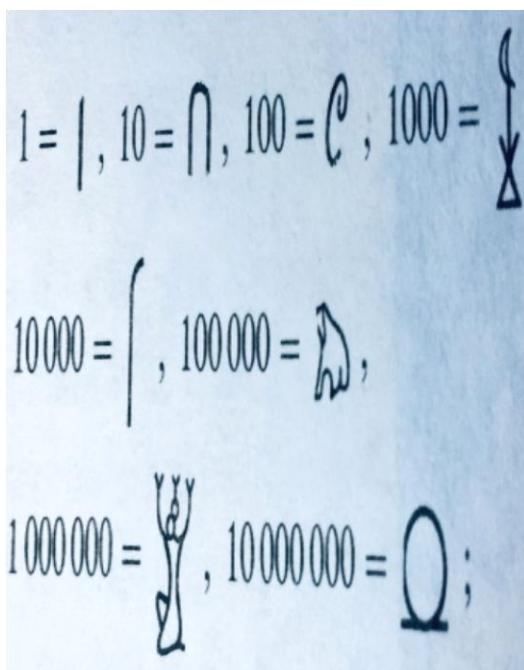
Pozycyjny system to zapis liczby za pomocą znaków – cyfr, których wartość zależy od jej ustawienia względem „sąsiadów”, czyli od cyfr jakie stoją zarówno przed nią, jak i za nią. Przykładem to nasz system dziesiętkowy, o którym więcej napiszę w dalszej części oraz system dwójkowy, czyli ten, który jest tematem mojej pracy.

Addytywny system to taki, w którym wartość liczby otrzymujemy dodając (sumując) wartości znaków za pomocą których liczba jest zapisana. Przykładem jest system rzymski (też przez nas używany), alfabetyczny oraz hieroglificzny.

Rzymski system oparty jest na zasadzie piątkowej, dlatego specjalne oznaczenia mamy dla pięciu **V**, pięćdziesięciu **L** i pięciuset **D**. Do dzisiaj stosujemy go, gdy chcemy napisać datę, na tarczy zegara, numeracja miesięcy itp.

Przykład zapisu: **CDXCVI = 496, DCCCLXXXVIII = 888**

Hieroglificzny system używany był w starożytnym Egipcie i oparty był na zasadzie dziesiętnej, ale bez zera. Do oznaczania kolejnych potęg liczby 10 istniały specjalne znaki - hieroglify. Znak dla jedynki przedstawiał prawdopodobnie tyczkę do mierzenia, zapisywano go jako pionową kreskę. Kreskami takimi oznaczano liczby od 1 do 9. Znak dla 10 przypominał podkową.



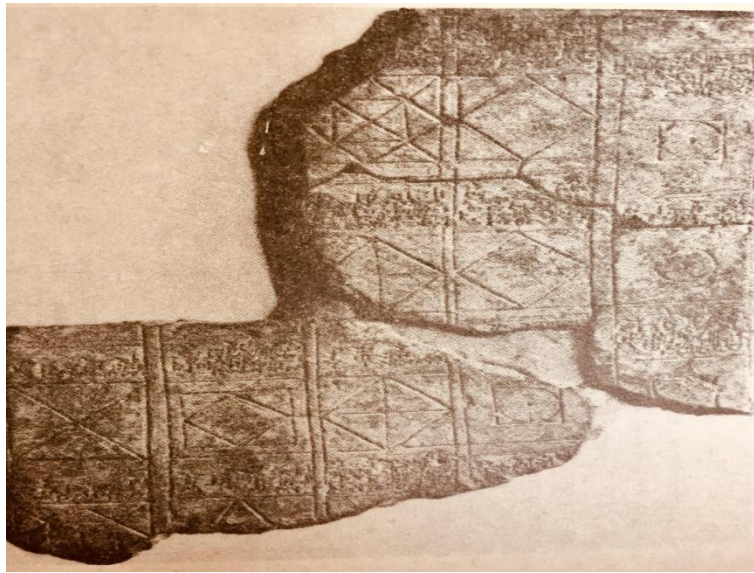
Hieroglificzny system zapisu liczb

Alfabetyczny system stosowali starożytni Grecy. Liczby zastępowano literami i podobnie jak system rzymski oparty był na zasadzie dziesiętnej, ale bez zera. Aby odróżnić je od słów nad liczbami stawiano kreskę.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ	ι
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	π	ρ	ϱ	
200	300	400	500	600	700	800	900		
σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	λ		
1000	2000	3000	4000						
α	β	γ	δ						

Alfabetyczny system zapisu liczb

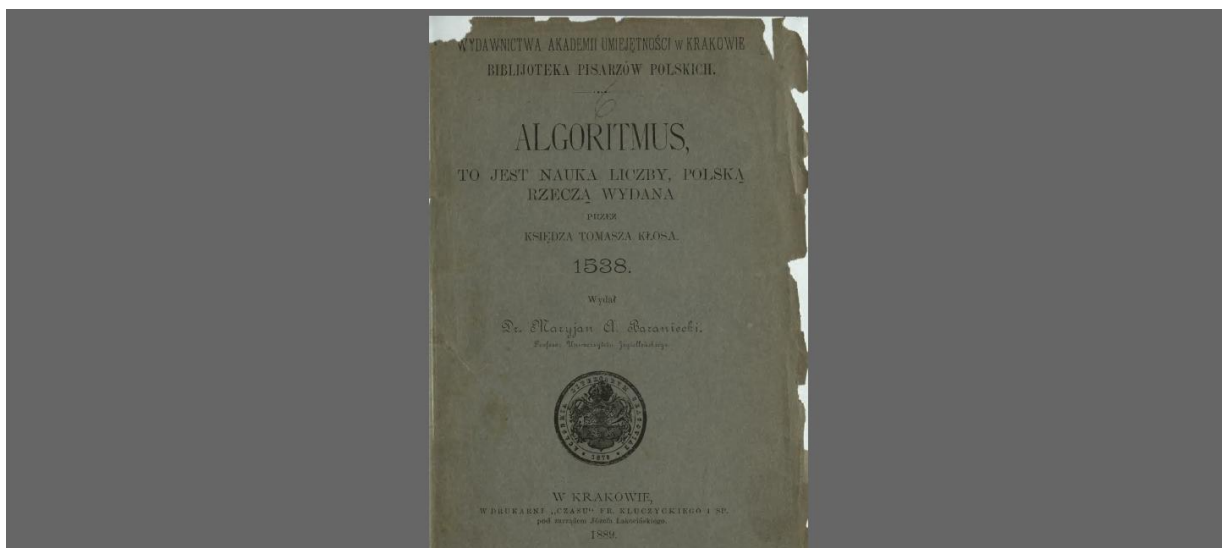
To jednak nie wszystkie możliwości zapisu liczb jakie dawniej stosowano, to są te najpopularniejsze. Znalazłam informację o systemie jaki stosowali Majowie, którzy używali do zapisu systemu dwudziestkowego lub piątkowego, jednak to nie Majowie jako pierwsi stworzyli stosowany przez innych system, tylko Babilończycy. W starożytnym Babilonie korzystano z systemu sześćdziesiątkowego, który stosujemy do dziś, przy podziale godzin na minuty i minuty na sekundy.



Tabliczka babilońska z tekstem matematycznym z około 2400 p.n.e.

Dziesiętkowy system liczbowy

W Polsce (tak jak prawie na całym świecie) posługujemy się cyframi arabskimi. To właśnie za ich pomocą zapisujemy wszystkie liczby – te małe i te duże. Cyfry są to kolejno znaki: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Przy ich pomocy możemy tworzyć liczby w różnych systemach liczbowych. System ten powstał najprawdopodobniej w Indii, a do Europy dotarł dzięki Arabom. Na szeroką skalę używany jest od *XIII* – *XIV* w., dzięki kupcom rzymskim oraz uczonym, którzy zastąpili nim system rzymski. W Polsce pierwsza drukowana książka w której użyto systemu dziesiętnego oraz liczb arabskich to książka z roku 1538, której autorem jest Tomasz Kłosa pt. „*Algoritmus, to jest nauka liczby...*”.



Okładka książki „Algoritmus, to jest nauka liczby ...”

W życiu codziennym wykorzystujemy znany nam dobrze dziesiętny system liczbowy. Do zapisu liczb w tym systemie używamy wszystkich dziesięciu cyfr (0 – 9). Nazwa dziesiętnego systemu wzięła się właśnie z tego, że do zapisu używamy dziesięciu cyfr. W ten sposób jesteśmy w stanie budować liczby zarówno jednocyfrowe (np. 2 lub 8), jak i dwucyfrowe (np. 16 lub 89), trzycyfrowe (163 lub 555), czterocyfrowe (3542 lub 6760) itd.

W liczbach dziesiętnych kolejne cyfry licząc od prawej strony nazywamy kolejno:

- cyfrą jedności
 - cyfrą dziesiątek
 - cyfrą setek
 - cyfrą tysięcy
- itd.

Przykładowo w liczbie 3629:

- cyfrą jedności jest 9
- cyfrą dziesiątek jest 2
- cyfrą setek jest 6
- a cyfrą tysięcy jest 3

System dziesiętny jest systemem pozycyjnym, gdyż każda pozycja w liczbie ma swoją wagę. Są to kolejne potęgi liczby 10 rozpoczynając od potęgi równej 0 dla cyfry jedności.

Wartość liczby obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} 3629 &= 3 * 1000 + 6 * 100 + 2 * 10 + 9 * 1 = \\ &= 3 * 10^3 + 6 * 10^2 + 2 * 10^1 + 9 * 10^0 \end{aligned}$$

gdzie:

$$10^0 = 1 \text{ (z definicji)}$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 * 10 = 100$$

$$10^3 = 10 * 10 * 10 = 1000, \text{ itd.}$$

W podanym przykładzie widać także, dlaczego liczbę 10 nazywamy podstawą systemu dziesiętnego.

Dwójkowy system liczbowy (System binarny)

System dwójkowy został odkryty w roku 1703, a autorem tego odkrycia jest G. W. Leibniz – niemiecki matematyk, który w dniu 15 marca 1679 roku w swoim notatniku zanotował sposób zapisywania liczb za pomocą dwóch cyfr: 0 i 1, ale wynik ten przedstawił dopiero w roku 1703.

15 March 1679.

De Progressione Dyadica -

Pars I.

Numeratio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	

... et sic pergitur usque ad ultimam potestatem dyadicam.

Kartka z notatnika Leibniza z dnia 15 marca 1679 roku

Dwójkowy system liczbowy opiera się na wykorzystaniu tylko dwóch cyfr do zapisu wszystkich liczb: 0 oraz 1. Podstawą tego systemu jest liczba 2.

Przykładowa liczba może wyglądać tak: 101110011_2 . Dla odróżnienia jej od liczby zapisanej w systemie dziesiętnym (bo to też mogłaby być liczba zapisana w systemie dziesiętnym) na końcu dodaje się „małą” liczbę 2.

Wartość liczby dwójkowej można przeliczać na znane nam wartości dziesiętne, np.

$$\begin{aligned} 101110011_2 &= \\ &= 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 256 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1 = 371 \end{aligned}$$

gdzie:

$$2^0 = 1 \text{ (z definicji)}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 * 2 = 4$$

$$2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$$

$$2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16$$

$$2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$$

$$2^6 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 64$$

$$2^7 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 128$$

$$2^8 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 256$$

itd.

W systemie dwójkowym można tak jak w systemie dziesiętkowym, wykonywać podstawowe operacje arytmetyczne, tzn. dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby i nie tylko w tym systemie. Własności działań nie zależą od systemu, to znaczy, że jeśli w systemie dziesiętkowym dodawanie jest przemienne, to w każdym innym pozycyjnym systemie taką samą własność mają liczby.

DODAWANIE (SUMA LICZB)

Dodając w systemie binarnym wiemy, że:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

Przykładowo dodając $14 + 10 = 24$,

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ + 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

gdyż

$$1110_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 = 8 + 4 + 2 = 14$$

$$1010_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^1 = 8 + 2 = 10$$

$$11000_2 = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 = 16 + 8 = 24$$

ODEJMOWANIE (RÓŻNICA LICZB)

Odejmowanie w systemie dwójkowym opiera się na zasadach podobnych do odejmowania w systemie dziesiętnym, czyli

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

W momencie kiedy pojawia się operacja 0 odjąć 1 ($0 - 1$) postępujemy analogicznie jak w systemie dziesiętnym, pamiętając tylko, że podstawą systemu jest liczba 2, a więc w momencie „pożyczania” jedynki z wyższego rzędu zamieniamy ją na 2 (to jest 10_2).

Zróbmy na przykład odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ - \quad 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Po zamianie na wartości dziesiętne mamy:

$$1101_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$$

$$111_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$110_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 = 4 + 2 = 6$$

czyli działanie wygląda tak:

$$13 - 7 = 6$$

MNOŻENIE (ILOCZYN LICZB)

Iloczyn dwóch liczb dwójkowych opiera się na zasadach:

$$0 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

Przykładowa operacja pisemnego mnożenia (zasady takie same jak dla systemu dziesiętnego):

$$\begin{array}{r} 1101 \\ * 111 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ + 1101 \\ \hline 1011011 \end{array}$$

Po sprawdzeniu otrzymujemy:

$$1101_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13$$

$$111_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$1011011_2 = 1 * 2^6 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91$$

tzn.

$$13 * 7 = 91.$$

DZIELENIE (ILORAZ LICZB)

Operację **dzielenia** również można przedstawić posługując się wzorcem pisemnego dzielenia:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ \hline 1100010 : 111 \\ - 111 \\ \hline = 1010 \\ - 111 \\ \hline = = 111 \\ - 111 \\ \hline = = = \end{array}$$

Przeliczając wartości z systemu dwójkowego na system dziesiętny dostajemy:

$$1100010_2 = 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^1 = 64 + 32 + 2 = 98$$

$$111_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$1110_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 = 8 + 4 + 2 = 14$$

Gdzie ilorazem liczb 98 i 7 jest $98:7 = 14$

Jaki widać wszystkie operacje matematyczne, co do których nie miałam pewności ich wykonywania są wykonalne. Problemem dla mnie jest sam zapis oraz bardzo duża ilość zer i jedynek. Aby zapamiętać daty historyczne, czy numer telefonu, itp naprawdę trzeba byłoby się sporo uczyć, a szybkie odczytanie wartości też nie jest takie proste. Może gdybym nie znała systemu dziesiętkowego, to wszystkie te czynności byłyby naturalne i proste. ☺

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz działanie w systemie dwójkowym oraz zapisz podane działania w systemie dziesiętnym:

a. $11100101_2 + 10011011_2$

b. $10001001_2 - 1110011_2$

c. $1010_2 * 1011_2$

d. $1110011_2 : 101_2$

Zastosowanie systemu dwójkowego

Zastanawiam się gdzie można by było zastosować system dwójkowy, skoro taką trudność sprawia ich zapis i „rozumienie” wartości. Wiem, że używają go komputery, smartfony, tablety i inne urządzenia elektroniczne, ale dlaczego? Tym razem to tata wyjaśnił mi tę zagadkę tłumacząc: „...twoja lampka nocna może znajdować się z jednym z dwóch stanów, tzn. gdy świeci, czyli jest włączona do gniazdka i płynie prąd, to taką sytuację opisuje cyfra 1, a gdy odłączymy ją od źródła prądu i nie świeci, to sytuację opiszemy jako cyfra 0. Trudne byłoby opisanie stanu pracy lampki za pomocą aż dziesięciu cyfr. Dlatego w elektronice stosujemy tylko system dwójkowy”, ... no i teraz wszystko jasne. 😊

Ale wciąż ciekawi mnie jak by to było gdyby system dwójkowy w życiu codziennym zastąpił dziesiętkowy? Czy moglibyśmy go używać na co dzień? Wchodzimy do sklepu, a tam cena w systemie dwójkowym. Wybieramy numer telefonu do koleżanki, a tam tylko ciąg zer i jedynek. Patrzymy na jadący samochód, a tam na tablicy rejestracyjnej oprócz liter same cyfry 0 i 1. Wyobraźmy sobie takie sytuacje.

Cena chleba w sklepie, wygląda tak:



po przeliczeniu do systemu dwójkowego wyglądałaby tak:

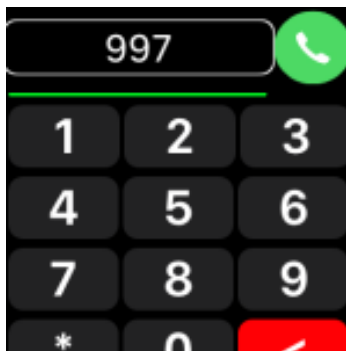


Obliczenia:

$$10_2 = 1 * 2^1 = 2$$

$$11010_2 = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^1 = 16 + 8 + 2 = 26$$

Numer telefonu alarmowego policji:



Po przeliczeniu numer telefonu alarmowego w systemie binarnym wyglądałby tak:



Obliczenia:

$$1001_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9$$

$$111_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

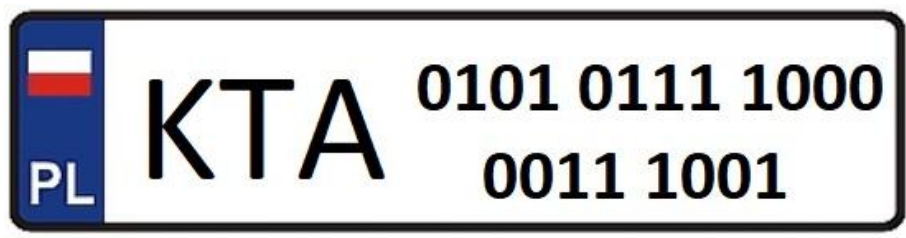
Tablica rejestracyjna samochodu:

KTA 57839



po przeliczeniu do systemu dwójkowego wyglądałaby tak:

KTA 0101 0111 1000 0011 1001



Obliczenia:

$$0101_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$0111_2 = 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$1000_2 = 1 * 2^3 = 8$$

$$0011_2 = 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 2 + 1 = 3$$

$$1001_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9$$

Trochę to wszystko nierealne i niezrozumiałe, ale jednak możliwe :)

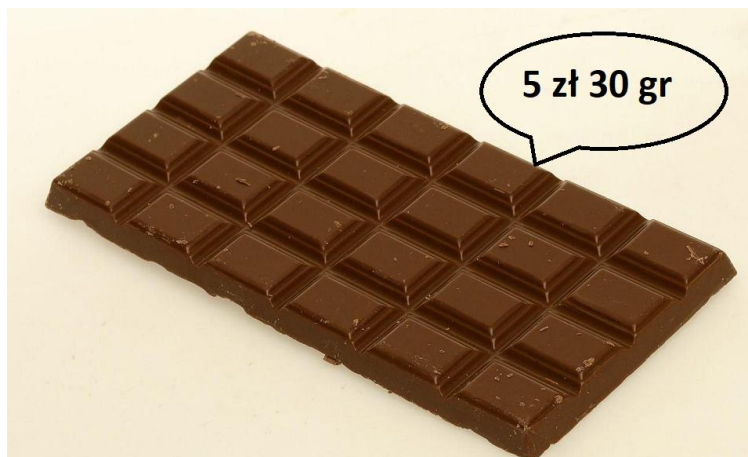
Zadania do samodzielnego rozwiązania

2. Oblicz cenę produktu w systemie dwójkowym:

a. mleko:



b. czekolada:



c. laptop:



Podsumowanie

Jak doskonale widać w powyższych przykładach system dwójkowy nie jest wygodny do stosowania w życiu codziennym. Nieczytelność zapisu, długie ciągi cyfr oraz prawie całkowity brak naszego wyczucia nawet rzędu wielkości liczby powoduje, że jest on niepraktyczny w stosowaniu na co dzień. Prawdziwa **MATEMATYCZNA WIEŻA BABEL**... Pomimo poprawności matematycznej użycie systemu dwójkowego przy zapisie cen, wyborze numeru telefonicznego, czy też zapisie numerów tablic rejestracyjnych w samochodach, ciężko byłoby nam szybko zorientować się i przeliczyć wartości tak, aby rozumieć świat liczb wokół nas.

Gdyby jednak nie było systemu dwójkowego, to by także nie było komputerów, telefonów i innych elektronicznych sprzętów bazujących na zapisie binarnym.

Ciekawe czy można przy pomocy systemu dwójkowego zapisywać liczby ujemne lub ułamki? ... Ale to już temat na następną pracę. ☺

Bibliografia

1. Matematyka z plusem 4, Podręcznik dla klasy 4, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
2. Liczy się matematyka, Podręcznik dla klasy 1 gimnazjum, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne
3. Encyklopedia Szkolna Matematyka, Warszawa 1998
4. https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwójkowy_system_liczbowy
5. https://pl.wikipedia.org/wiki/Dziesiętny_system_liczbowy

Odpowiedzi do zadań:

Zadanie 1:

- a) $110000000_2, 229 + 155 = 384$
- b) $10110_2, 137 - 115 = 22$
- c) $1101110_2, 10 * 11 = 110$
- d) $10111_2, 115 : 5 = 23$

Zadanie 2:

- a) mleko: 10 zł 1000101 *gr*
- b) czekolada: 101 zł 11110 *gr*
- c) laptop: 1100011111 zł