Małopolski Konkurs Prac Matematycznych

w roku szkolnym 2018/19

Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk
pod patronatem Uniwersytetu Jagiellońskiego
w Centrum Młodzieży im. dr. H. Jordana

Polskie Towarzystwo Matematyczne
Oddział Krakowski

CENTRUM MŁODZIEŻY
W KRAKOWIE

rok zał. 1919

LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

im. Marii Skłodowskiej-Curie

w Skawinie

OLIWIA FRANKOWSKA

„Przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych. Regula Falsi i Metoda Newtona"

Praca konkursowa napisana pod kierunkiem

mgr Renaty Powroźnik

Skawina 2019

Składam serdeczne wyrazy podziękowania
Pani mgr Renacie Powroźnik
za pomoc udzieloną mi w czasie pisania tej pracy.

Wyrazy podziękowania składam również polonistce
Pani mgr Renacie Bysinie.

Spis treści

I. Wstęp 2

II. Przypomnienie pojęć, określeń matematycznych występujących w przybliżonych metodach rozwiązywania równań 4

III. Metody przybliżonego obliczania pierwiastków równań nieliniowych 30

IV. *„Regula falsi"* przez wieki 37

V. *„Regula falsi"* i metoda Newtona jako metody numeryczne 40

VI. Rozwiązanie przykładowego zadania 43

VII. Podsumowanie i wnioski 50

Literatura 52

I Wstęp

W ubiegłorocznej edycji Małopolskiego Konkursu Prac Matematycznych zaprezentowałam pracę z dziedziny geometrii o Heronie, wybitnym starożytnym matematyku, fizyku i wynalazcy. W tym roku pragnę przedstawić pracę z dziedziny algebry na temat „Przybliżonych metod rozwiązywania równań". Wybór tematu pracy wyniknął między innymi z mojej „babskiej ciekawości".

W zakresie podstawowym matematyki, w którym kontynuuję naukę realizowane są zagadnienia dotyczące np.: funkcji liniowej, funkcji kwadratowej, równań stopnia pierwszego, drugiego, równań dwukwadratowych, prostych wielomianów. I tutaj włączyła się moja ciekawość i pytanie: Jak rozwiązuje się równania algebraiczne dowolnego stopnia n. Z podręcznika Pana Eustachego Tarnawskiego „Matematyka" dowiedziałam się, że rozwiązanie równania algebraicznego stopnia n polega w ogólnym przypadku na wyrażeniu pierwiastków równania przez jego współczynniki. Odpowiednie wzory do rozwiązania równań algebraicznych znajdujemy łatwo w przypadkach n=1 oraz n=2. Mniej proste wzory znane są w przypadkach n=3 oraz n=4 (np.: tzw. wzór Cardana). Jak udowodniono, nie można w ogólnym przypadku dla $n \geq 5$ wyrazić pierwiastków równania algebraicznie przez jego współczynniki, tzn. wyrazić za pomocą kombinacji podstawowych działań i wyciągania pierwiastka stopnia naturalnego wykonywanych w skończonej ilości na współczynnikach tych równań. W poszczególnych przypadkach równanie algebraiczne stopnia wyższego daje się rozwiązać, bądź przez podstawienia sprowadzające takie równanie do równania stopnia niższego, bądź za pomocą metod przybliżonych. Również w szczególnych przypadkach równań stopnia trzeciego i czwartego stosujemy odpowiednie podstawienia lub metody przybliżone jako prowadzące nieraz szybciej do celu.

W kolejnym etapie, po analizie kilku podręczników matematycznych, wybrałam te, w których według mnie przybliżone metody rozwiązywania równań wyjaśnione są w sposób najbardziej zrozumiały dla ucznia szkoły średniej. Autorzy w/w podręczników wyjaśniają trzy metody przybliżonego rozwiązywania równania f(x)=0:

1. Interpolacji liniowej, tzw. *„regula falsi"*,
2. Metodę Newtona,
3. Metodę kolejnych przybliżeń.

W mojej pracy przedstawiłam dwie pierwsze metody tj. *„regula falsi"* i metodę Newtona, z uwagi na fakt, że często obie te metody stosujemy równocześnie, opierając się na twierdzeniu, którego tezę przytoczyłam w części III pracy.

Podczas pierwszych analiz w/w metod miałam problemy w zrozumieniu pewnych zagadnień. Wynikało to z braku wymaganej wiedzy na temat niektórych pojęć, z którymi nie spotkałam się w dotychczasowej nauce matematyki w zakresie podstawowym.

Nie poddając się, podczas kolejnej analizy wyjaśnień autorów podręczników, metodą *„step to step"* odnotowałam wszystkie zagadnienia, pojęcia i określenia występujące w tekstach opisujących w/w metody.

Okazało się, że tylko zagadnienia: pochodnych funkcji i interpolacji liniowej były mi nieznane w ramach dotychczasowej nauki, natomiast pozostałe aspekty były wyłącznie kwestią przypomnienia.

Oczywiście opanowanie wiedzy we własnym zakresie na temat nieznanych mi zagadnień, z pomocą opiekuna pracy Pani mgr Renaty Powroźnik nie stanowiło większego problemu.

Ponadto poznanie nieznanych mi pojęć matematycznych spełniło dodatkową funkcję pozytywną. Poszerzyłam swoją wiedzę matematyczną o zagadnienia, których znajomość jest niezbędna w zakresie rozszerzonym, a w takim zakresie planuję w przyszłym roku szkolnym zdawać maturę z matematyki.

Reasumując, zrozumienie zaprezentowanego w pracy materiału nie powinno stanowić problemu dla koleżanek i kolegów kontynuujących naukę matematyki w zakresie rozszerzonym, jak również dla tych, którzy *„czują sympatię do tego przedmiotu"*.

Zgodnie z metodą *„step to step"* w części II pracy przypomniałam wszystkie pojęcia, określenia i zagadnienia matematyczne występujące w opisie zaprezentowanych metod przybliżonego rozwiązywania równań, oznaczając je cyframi od 1 do 19.

W części III wyjaśniającej poszczególne metody, przy występujących pojęciach, zagadnieniach zaznaczyłam w/w liczby stanowiące odnośnik do wytłumaczonych kwestii w części II. W ten sposób na bieżąco można śledzić tok myślenia autorów podręczników i przypominać sobie potrzebne pojęcia i określenia.

W części IV pracy na podstawie artykułu Pana Romana Dudy z Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego pod tytułem *„Regula falsi przez wieki"*, przedstawiłam kilka ciekawostek historycznych dotyczących tematu pracy.

Przybliżone metody rozwiązywania równań są między innymi zagadnieniami nazywanymi metodami numerycznymi. Metody numeryczne są działem matematyki stosowanej. W części V pracy przedstawiłam kilka informacji w tym zakresie. Z uwagi na temat, który wymaga obszernej wiedzy matematycznej i informatycznej, podałam tylko ogólny zarys problemu, zrozumiały dla ucznia szkoły średniej.

W części VI przedstawiłam przykładowe rozwiązanie zadania dwoma prezentowanymi metodami, które w ramach ćwiczeń zaproponował do rozwiązania Pan Włodzimierz Wrona. Zadanie dotyczy obliczenia pierwiastka równania 7 stopnia z dokładnością do 0,00001.

Część VII pracy dotyczy wniosków, które przedstawiłam po dokładnej analizie prezentowanych metod.

Reasumując; moja ciekawość, praktyczne wykorzystanie w/w metod, umożliwiających rozwiązywanie różnorodnych problemów z dziedziny techniki, medycyny, ekonomii itp., zainteresowanie techniki obliczeniowej przy użyciu komputerów tym tematem spowodowało, że uznałam to zagadnienie za godne zaprezentowania w Konkursie Prac Matematycznych.

II. Przypomnienie pojęć, określeń matematycznych występujących w przybliżonych metodach rozwiązywania równań

W tej części pracy dla ułatwienia zrozumienia przybliżonych metod rozwiązywania równań przypomnę kilka pojęć i określeń matematycznych. Skupiłam się wyłącznie na informacjach niezbędnych (np. pisząc o równaniach algebraicznych nie poruszyłam już tematu nierówności czy ich układów, pisząc o funkcjach, określałam te, które będą w naszym zainteresowaniu itp.)

1. Zbiory

Pojęcia zbiór i element zbioru są pojęciami pierwotnymi matematyki. Nie definiujemy ich. Zbiór A składający się ze skończonej ilości elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy zbiorem skończonym i zapisujemy $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Niepusty zbiór, który nie jest skończony, nazywamy zbiorem nieskończonym.

Mówimy, że zbiór B jest podzbiorem zbioru A, jeśli każdy element zbioru B jest elementem zbioru A, co zapisujemy symbolicznie B C A.

* Zbiory liczbowe – liczby: naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, rzeczywiste.

a) traktując liczby naturalne jako pojęcie pierwotne, zapisujemy zbiór liczb naturalnych w postaci $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$
b) zbiór liczb całkowitych $Z=\{k: k\in N^+ \vee -k\in N^+ \vee k\neq 0\}$.
c) zbiór liczb wymiernych oznaczamy przez Q i definiujemy następująco:

$$Q = \{x: x = \frac{l}{m}, l\in Z, m\in N \setminus \{0\}\}$$

Dwie liczby wymierne $a = \frac{l}{m}$ oraz $b = \frac{p}{q}$ uważamy za równe gdy spełniony jest warunek

$$l \cdot q = m \cdot p$$

d) liczbę, która nie jest wymierna nazywamy liczbą niewymierną i oznaczamy symbolem IQ. Zbiór liczb wymiernych jest niewystarczający dla analizy matematycznej, pomimo że jest gęsty, ale nie wypełnia całej osi liczbowej. Wprowadzenie liczb niewymiernych pozwala na przyporządkowanie każdemu punktowi osi liczbowej odpowiedniej liczby, przez co zbiór liczb staje się ciągły. Liczbom niewymiernym odpowiadają na osi liczbowej punkty wypełniające wszystkie luki między punktami wymiernymi. Każda liczba niewymierna może być wyrażona za pomocą ułamka dziesiętnego nieskończonego, nieokresowego. Najprostszymi przykładami liczb niewymiernych są np.: $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, liczba $\pi=3{,}141593\ldots$ itd.

e) sumę zbiorów $Q \cup IQ = R$ nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych.

2. Przedziały liczbowe

Przedziałem liczbowym nazywamy podzbiór zbioru R:
- $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ – przedział liczbowy otwarty,
- $[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ – przedział liczbowy domknięty.

3. Pojęcie *„funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej"*

Mamy dane dwa niepuste zbiory X i Y. Przypisując każdemu elementowi x zbioru X dokładnie jeden element y zbioru Y określamy funkcje f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y, co zapisujemy $f: X \rightarrow Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f. Jeśli zbiory X i Y są podzbiorami zbioru R, to mówimy o *„funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej"*. Wyznaczenie dziedziny funkcji f danej wzorem $y=f(x)$ oznacza wyznaczenie zbioru tych wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których wyrażenie f(x) jest określone (ma sens).

4. Miejsce zerowe funkcji

Miejscem zerowym funkcji $f : X \rightarrow R$ nazywamy taką wartość argumentu $x_o \in X$, dla którego $f(x_o)=0$. Na wykresie funkcji jest to odcięta punktu, w którym wykres ten przecina się z osią OX.

5. Monotoniczność funkcji

Funkcje opisane w dwu poniższych definicjach nazywamy funkcjami monotonicznymi.

a) funkcja $f:x \rightarrow R$ nazywamy funkcją **rosnącą (malejącą)**, jeśli dla wszystkich

$$x_1, x_2 \in X \text{ jest } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \; (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

b) funkcja $f:x \rightarrow R$ jest **niemalejąca (nierosnąca)**, jeśli dla wszystkich

$$x_1, x_2 \in X \text{ jest } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \; (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

6. Ciągłość funkcji (1)

Aby zdefiniować pojęcie ciągłości funkcji należy przypomnieć podstawowe wiadomości: z teorii ciągów liczbowych (ciąg skończony, nieskończony), ciąg monotoniczny, ciąg ograniczony, granica ciągu oraz z zakresu teorii granic funkcji.

a) Ciąg skończony i nieskończony

- Nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy każdą funkcję $f: N \rightarrow R$ określoną na zbiorze N liczb naturalnych o wartościach w zbiorze R liczb rzeczywistych.

Ciąg liczbowy nieskończony oznaczamy symbolem np. (a_n) dla $n \in N^+$, liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazywamy wyrazami nieskończonego ciągu liczbowego. Liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem nieskończonego ciągu liczbowego, zaś liczbę n- wskaźnikiem lub indeksem n-tego wyrazu a_n.

-każdą funkcję $f:\{1,2,\ldots,n\} \rightarrow R$ nazywamy skończonym n- wyrazowym ciągiem liczbowym. Skończony n- wyrazowy ciąg liczbowy zapisujemy w postaci np.: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Funkcje, których dziedziną jest pewien podzbiór (skończony lub nieskończony) zbioru liczb naturalnych, będziemy również uważać za ciągi.

b) ciąg monotoniczny

-ciąg (a_n) nazywamy stałym, jeżeli istnieje liczba rzeczywista a taka, że:

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_n = a$$

-ciąg (a_n) nazywamy rosnącym, jeżeli:

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_n < a_{n+1}$$

-ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym, jeżeli:

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_n \leq a_{n+1}$$

-ciąg (a_n) nazywamy malejącym, jeżeli :

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_n > a_{n+1}$$

-ciąg (a_n) nazywamy nierosnącym, jeżeli :

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_n \geq a_{n+1}$$

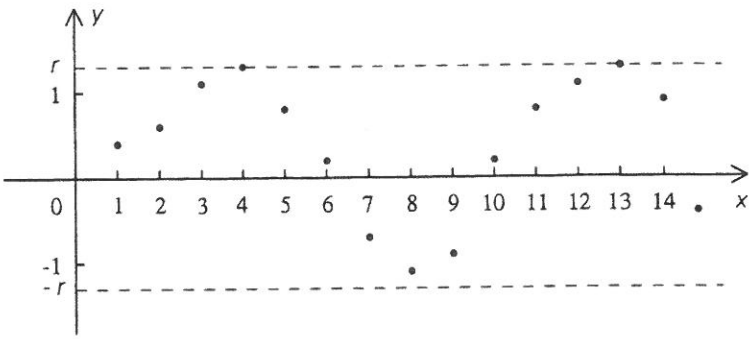
Każdy ciąg (a_n) rosnący jest również ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg (a_n) malejący jest również ciągiem nierosnącym.

Jeżeli ciąg (a_n) jest stały lub rosnący, lub niemalejący, lub malejący, lub nierosnący to ciąg (a_n) nazywamy monotonicznym.

Analogiczne definicje monotoniczności można sformułować dla ciągów skończonych.

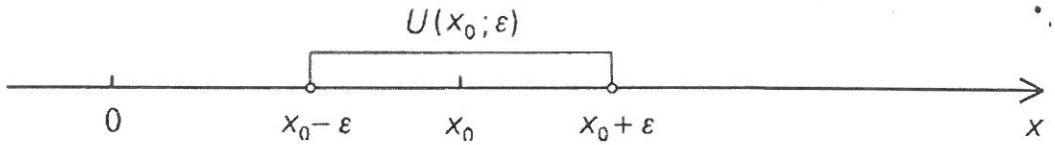
c) ciąg ograniczony

Jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu i z góry, to (a_n) nazywamy ciągiem ograniczonym (przykład ciągu ograniczonego przedstawiono na kolejnym rysunku).



d) granica ciągu

Jest jednym z najważniejszych pojęć w teorii ciągów. W definicji granicy ciągu istotną rolę odgrywa tzw. otoczenie liczby. Otoczeniem liczby $x_0 \in$ R o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy przedział otwarty $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i oznaczamy symbolem U (x_0, ε) – rysunek poniżej.



Zauważmy, że:

$$\bigwedge_{x \in R} [x \in U(x_0;\varepsilon) <=> |x - x_0| < \varepsilon <=> x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon]$$

- lewostronnym otoczeniem liczby $x_0 \in$ R o promieniu ε >0 nazywamy przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ i przyjmujemy oznaczenie: $U^-(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0]$

- prawostronnym otoczeniem liczby $x_0 \in$ R o promieniu ε >0 nazywamy przedział $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ i przyjmujemy oznaczenie: $U^+(x_0, \varepsilon) = [x_0, x_0 + \varepsilon)$

- otoczeniem +∞ wyznaczonym przez liczbę a ∈ R nazywamy przedział otwarty (a, +∞), otoczenie +∞ wyznaczone przez liczbę a ∈ R oznaczamy symbolem U(+∞, a), a więc: U(+∞, a) = (a, +∞).

Zauważmy, że

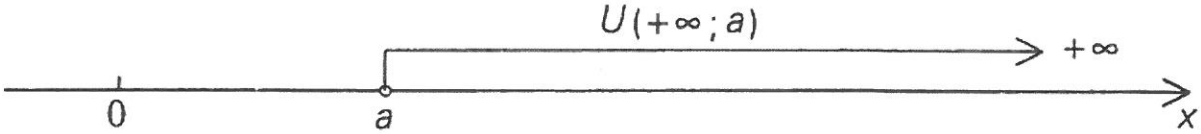
$$\bigwedge_{x \in R} [x \in U\,(+\infty, a) <=> x > a\,]$$

-Otoczeniem -∞ wyznaczonym przez liczbę a ∈ R nazywamy przedział otwarty $(-\infty, a)$. Otoczenie -∞ wyznaczone przez liczbę a ∈ R oznaczamy symbolem U(-∞, a), a więc: U(-∞, a) = (-∞, a)

Zauważmy, że

$$\bigwedge_{x \in R} [x \in U(-\infty, a) <=> x < a]$$

Przykładowo otoczenie +∞ zilustrowano na poniższym rysunku.



- sąsiedztwem liczby x_0 ∈R o promieniu Ɛ >0 nazywamy sumę przedziałów otwartych: $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, przyjmujemy oznaczenie: $S(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ Wobec tego: $S(x_0, \varepsilon) = U(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$

- lewostronnym sąsiedztwem liczby x_0cR o promieniu Ɛ >0 nazywamy przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ i przyjmujemy oznaczenie $S^-(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$

- prawostronnym sąsiedztwem liczby $x_0 \in R_n$ promieniu Ɛ >0 nazywamy przedział otwarty $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ i przyjmujemy oznaczenie $S^+(x_0, \varepsilon) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$

W matematyce używa się zwrotu: *„prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego”*, który oznacza: wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego, oprócz skończonej ilości tych wyrazów.

Mówimy, że liczba rzeczywista a jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego otoczenia liczby a należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n). Jeżeli liczba rzeczywista a jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego (a_n), to zapisujemy symbolicznie:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Powyższą definicję granicy ciągu można w sposób równoważny sformułować następująco:

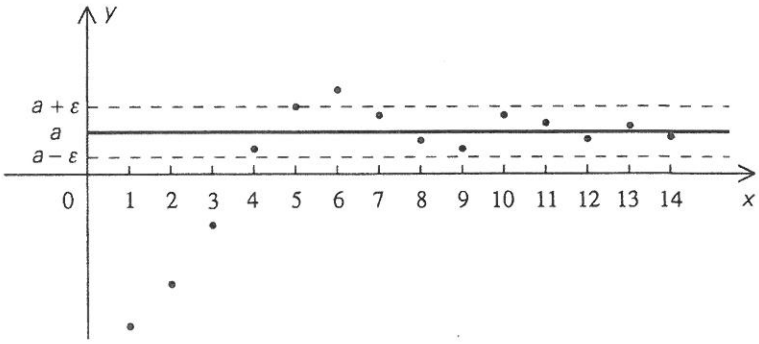
Mówimy, że liczba rzeczywista a jest granicą nieskończonego ciągu liczbowego (a_n) wtedy, gdy dla każdego otoczenia U(a,Ɛ) istnieje liczba naturalna n_0 taka, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o wskaźnikach n większych od liczby n_0 należą do otoczenia U(a,Ɛ) czyli:

$$\bigwedge_{n \in N} [n > n_0 => a_n \in U(a, \varepsilon)]$$

Ponieważ otoczenie U(a,Ɛ) liczby a jest wyznaczone przez promień Ɛ tego otoczenia, więc definicję granicy nieskończonego ciągu liczbowego (a_n) zapisujemy w języku symbolicznym następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a <=> \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in N} \bigwedge_{n\in N} [n > n_0 => |a_n - a| < \varepsilon]$$

Graficzne pojęcie granicy ciągu zilustrowano na poniższym rysunku.



Jeżeli ciąg (a_n) ma granicę a∈R to mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby a. Ciąg (a_n), który nie jest zbieżny nazywamy rozbieżnym.

e) granica funkcji

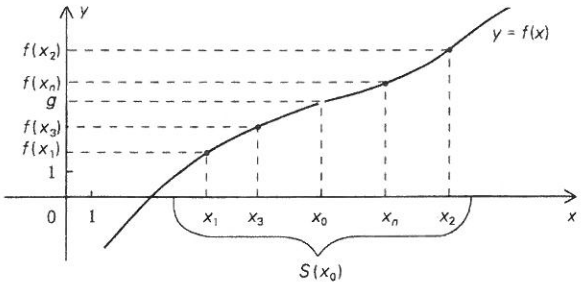
Przyjmijmy umowę, że jeżeli w prowadzonych rozważaniach wielkość promienia Ɛ sąsiedztwa S(x_0,Ɛ) nie jest istotna, to będziemy pisać S(x_0), zamiast S(x_0,Ɛ).

-granica funkcji w punkcie.

Istnieją dwie równoważne definicje granicy funkcji: Heinego i Cauchy'ego. Przytoczę jedną z nich:

<u>Definicja Heinego</u>.

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie S(x_0) punktu x_0∈R (rysunek poniższy). Liczbę rzeczywistą g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa S(x_0), zbieżnego do punktu x_0, ciąg (f (x_n)) wartości funkcji jest zbieżny do liczby g.



Jeżeli liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, to zapisujemy symbolicznie:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Definicję Heinego granicy funkcji możemy zapisać w języku symbolicznym następująco:

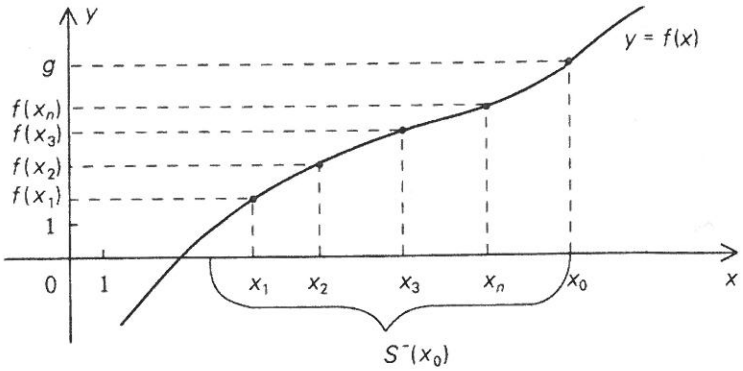
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)} [(\bigwedge_{n \in N} (x_n \in S(x_0)) \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x_0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g]$$

Zauważmy, że w definicji granicy funkcji wymagamy, aby funkcja f była określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, natomiast w samym punkcie x_0 funkcja f może być lub nie być określona.

- granice jednostronne funkcji

<u>Definicja Heinego</u>

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym lewostronnym sąsiedztwie $S^-(x_0)$ punktu $x_0 \in R$ (rysunek poniżej). Liczbę rzeczywistą g nazywamy lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do lewostronnego sąsiedztwa $S^-(x_0)$, zbieżnego do punktu x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do liczby g.



Jeżeli liczba g jest lewostronną granicą funkcji w punkcie x_0 , to zapisujemy symbolicznie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

Definicję Heinego lewostronnej granicy funkcji możemy zapisać w języku symbolicznym następująco:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)} [(\bigwedge_{n \in N} (x_n \in S^-(x_0)) \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x_0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g]$$

Analogicznie określa się prawostronną granicę funkcji w punkcie:

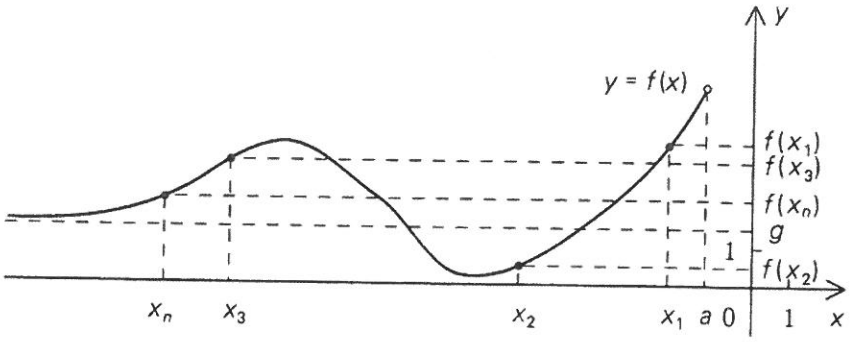
Definicja Heinego

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g <=> \bigwedge_{(x_n)} [(\bigwedge_{n\in N} (x_n \in S^+(x_0)) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0) => \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g]$$

- granica funkcji w nieskończoności

Definicja Heinego

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale (-∞,a) -rysunek poniżej. Liczbę rzeczywistą g nazywamy granicą funkcji f w minus nieskończoności (-∞), jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do przedziału (-∞,a), rozbieżnego do -∞, ciąg ($f(x_n)$) wartości funkcji jest zbieżny do liczby g



Jeżeli liczba g jest granicą funkcji f w -∞, to zapisujemy symbolicznie:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g$$

Definicję Heinego granicy funkcji f w -∞, możemy zapisać w języku symbolicznym następująco:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g <=> \bigwedge_{(x_n)} [(\bigwedge_{n\in N} ((x_n \in (-\infty, a)) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty) => \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g]$$

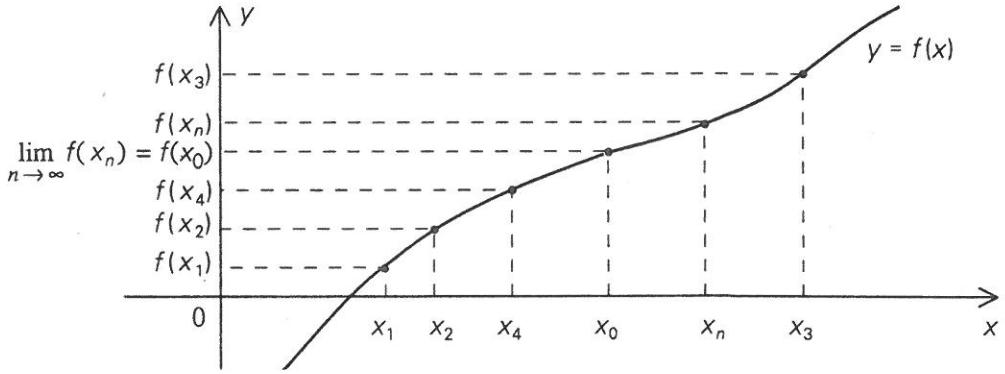
7. Ciągłość funkcji (2)

Podobnie jak w przypadku zagadnienia granicy funkcji, pojęcie ciągłości funkcji zostało zdefiniowane przez Heinego i Cauchy'ego. Dla zobrazowania tego zagadnienia oprzemy się na definicji Heinego.

Przyjmijmy umownie, że jeżeli w prowadzonych rozważaniach wielkość promienia Ɛ otoczenia $U(x_0; \varepsilon)$ nie jest istotna, to będziemy pisać $U(x_0)$, zamiast $U(x_0; \varepsilon)$.

a) Definicja Heinego

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu $x_0 \in R$ (rysunek poniżej). Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do otoczenia $U(x_0)$, zbieżnego do punktu x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do liczby $f(x_0)$.



Definicję Heinego ciągłości funkcji f w punkcie x_0 możemy zapisać w języku symbolicznym następująco:

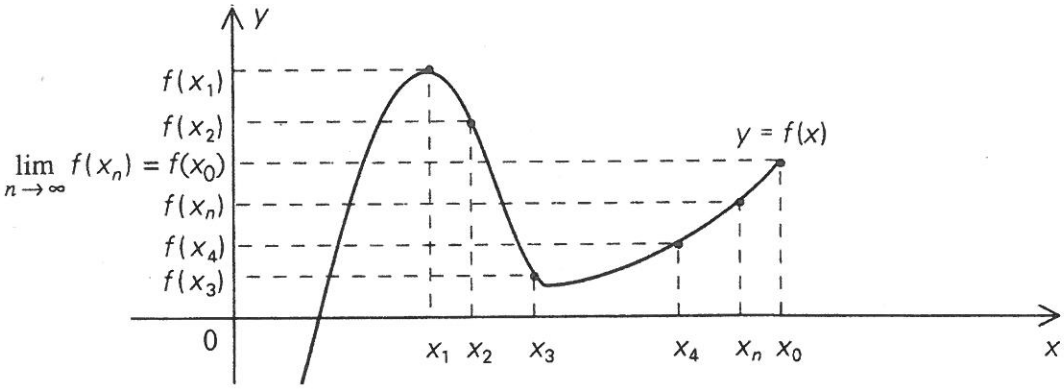
$$\bigwedge_{(x_n)} [(\bigwedge_{n \in N} (x_n \in U(x_0)) \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x_0) => \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)]$$

Zauważmy, że w definicji ciągłości funkcji wymagamy, aby funkcja f była określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, a więc w samym punkcie x_0 funkcja f musi być określona.

b) ciągłość jednostronna funkcji

<u>-Definicja Heinego</u>

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym lewostronnym otoczeniu $U^-(x_0)$, punktu $x_0 \in R$ (rysunek poniżej). Mówimy, że funkcja f jest lewostronnie ciagła w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n), ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do liczby $f(x_0)$.



Definicję Heinego lewostronnej ciągłości funkcji f w punkcie x_0 możemy zapisać w języku symbolicznym następująco:

$$\bigwedge_{(x_n)}[(\bigwedge_{n\in N}(x_n \in U^-(x_0)) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0) => \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)]$$

Analogicznie określa się prawostronną ciągłość funkcji w punkcie $x_0 \in R$.

Funkcję nazywamy ciągłą w przedziale otwartym, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcję nazywamy ciągłą w przedziale domkniętym, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału i jednostronnie ciągła na końcach przedziału. Funkcję nazywamy ciągłą, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Jeżeli dziedziną jest przedział domknięty, to na końcach tego przedziału wymagamy ciągłości jednostronnej.

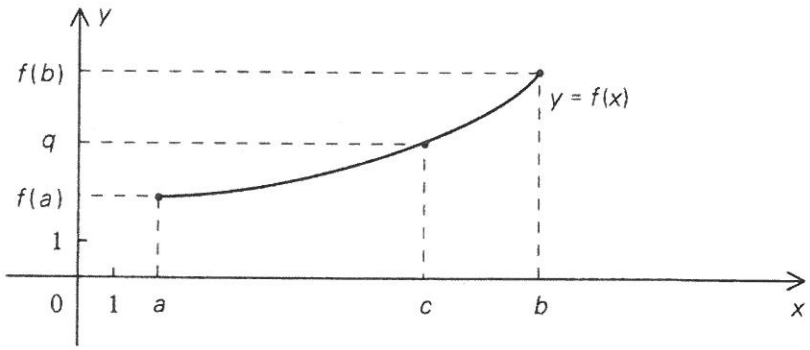
Podam teraz dwa z kilku najważniejszych twierdzeń o ciągłości funkcji, które zostaną wykorzystane w dalszej części mojej pracy.

Twierdzenie 1

Funkcje: potęgowe, wielomianowe, wymierne, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne są ciągłe.

Twierdzenie 2 (Darboux)

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym [a,b] (rysunek poniżej). Jeżeli $f(a) < f(b)$(lub $f(b) < f(a)$), to dla dowolnej liczby $q \in (f(a), f(b))$(lub $q \in (f(b), f(a))$ istnieje liczba $c \in (a,b)$ taka, że $f(c)=q$.

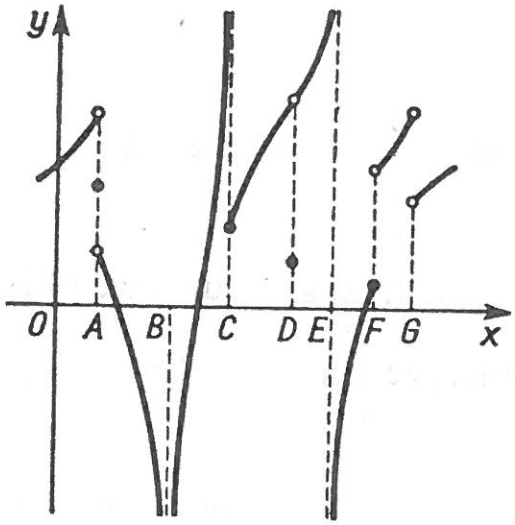


Z twierdzenia 2 wynika następujący wniosek:

Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym [a,b]. Jeżeli $f(a)\cdot f(b) < 0$, to istnieje liczba $c \in (a,b)$ taka, że $f(c)=0$.

Reasumując, wiele funkcji badanych w analizie matematycznej, są to funkcje ciągłe, tzn. przy niewielkich zmianach argumentu x wartości funkcji y zmieniają się także bardzo mało, a wykresem takiej funkcji jest linia ciągła.

Przy pewnych wartościach x funkcja może nie być ciągła i wtedy wykres funkcji ma *„przerwę"*; wartości argumentu, przy których to zachodzi, nazywamy punktami nieciągłości funkcji. Na rysunku poniżej dany jest wykres funkcji ciągłej we wszystkich punktach z wyjątkiem punktów A,B,C,D,E,F,G (litery te oznaczają punkty nieciągłości funkcji, leżące na osi OX, przy czym kółkami (nulkami) oznaczone są punkty nie należące do wykresu funkcji, a czarnymi kropkami oznaczone są punkty, które należą do wykresu.



8. Wielomian jednej zmiennej

Definicja

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję $y=W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, gdzie $n\in N\cup\{0\}$,$x\in R$, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$ oraz $a_n\neq 0$. Liczby $a_0, a_1,\ldots,a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu W(x), liczbę a_0 nazywamy też wyrazem wolnym.

Funkcję $W(x)\equiv 0$ (tzn. $W(x)=0$ dla każdego x nazywamy wielomianem zerowym.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu

Jeżeli W(x) i P(x) są wielomianami i P(x) jest wielomianem niezerowym oraz stopień $W(x)\geq$stopnia P(x), to istnieją dwa wielomiany Q(x) i R(x), że: $W(x)=Q(x)\cdot P(x)+R(x)$, przy czym $R(x)\equiv 0$ (jest wielomianem zerowym) lub stopień $R(x)<$ od stopnia P(x).

Wielomian R(x) nazywamy resztą z dzielenia wielomianu W(x) przez P(x); Jeżeli $R(x)\equiv 0$ to mówimy, że wielomian W(x) jest podzielny przez wielomian P(x) i wielomian Q(x) nazywamy wówczas ilorazem wielomianu W(x) przez P(x) pisząc $Q(x)=\frac{W(x)}{P(x)}$.

- W pkt. 4 wspomnieliśmy o miejscach zerowych funkcji. Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji liczbo-liczbowej $f:X \to R$ wiąże się, zgodnie z definicją, z rozwiązaniem równania $f(x)=0$. Rozwiązania tego równania, o ile istnieją i znajdują się w dziedzinie funkcji f, są właśnie miejscami zerowymi tej funkcji. Ich liczba zależy od rodzaju i własności funkcji f(x).

- Szczególnie ważną rolę odgrywa wyznaczenie miejsc zerowych wielomianów, które nazywa się często pierwiastkami wielomianu. Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu należy rozwiązać równanie $W(x)=0$, gdzie W jest wielomianem.

Rozwiązując te równania będziemy korzystać między innymi z twierdzenia Bezout'a. Należy pamiętać, że jeżeli wielomian jest stopnia n, to posiada on co najwyżej n miejsc zerowych.

Twierdzenie Bezout'a

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W(x) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian (x-a).

Twierdzenie o reszcie dzielenia wielomianu przez dwumian

Reszta R z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian (x-a) jest równa wartości tego wielomianu w punkcie a, czyli jeśli $W(x)=(x-a)P(x)+R$, to $R=W(a)$. Liczbę a nazywamy k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W(x), jeśli wielomian ten jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$, $(k \in N^+)$.

Twierdzenie

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego o współczynnikach rzeczywistych. To nie znaczy oczywiści, że dokonanie takiego rozkładu jest łatwe.

9. Równania

Równaniem z jedną niewiadomą nazywamy równość dwóch funkcji jednej i tej samej zmiennej: $f_1(x)=f_2(x)$.

Zmienną występującą w powyższym równaniu nazywamy niewiadomą. Jeżeli przy pewnej wartości $x=x_1$ równość ta jest prawdziwa, to mówimy, że liczba x_1 spełnia równanie i nazywamy ją pierwiastkiem tego równania. Równanie może mieć wiele pierwiastków: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; rozwiązać równanie to znaczy znaleźć wszystkie jego pierwiastki. Może się okazać, że równanie wcale nie ma pierwiastków, wtedy nazywamy je równaniem sprzecznym. Jeżeli równanie jest spełnione dla wszelkich wartości zmiennej x, przy których obie funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ mają sens liczbowy, to równanie nazywamy tożsamością. Dwa równania nazywamy równoważnymi, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie o pierwiastkach równania n-tego stopnia

Jeżeli $x_1,\ldots, x_s$ są różnymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$ odpowiednio o krotnościach $k_1,\ldots,k_s$, to istnieje wielomian $P(x)$ taki, że $W(x)=P(x)(x-x_1)^{k1}\ldots(x-x_s)^{ks}$, przy czym $k_1+\ldots+k_s$ + stopień $P(x)$=stopień $W(x)$.

10.Równanie algebraiczne

Równanie nazywamy algebraicznym, jeżeli obie występujące w nim funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są funkcjami algebraicznymi (wymiernymi lub niewymiernymi), przy czym jedna z tych funkcji może być stała. Z każdego równania algebraicznego można za pomocą przekształceń algebraicznych otrzymać równanie w postaci uporządkowanej $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, które ma wszystkie pierwiastki pierwotnego równania algebraicznego, ale może mieć też ponadto pierwiastki obce. Powyższe równanie można przekształcić dalej w taki sposób, żeby było $a_0=1$.

Twierdzenie

Każdy wielomian $W(x)$ postaci $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots,+a_n$ przy założeniu $a_0=1$ można przedstawić jako iloczyn czynników liniowych (tzn. stopnia pierwszego) w postaci $W(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$.Oznacza to, że jedynie $x_1, x_2,\ldots,x_n$ są pierwiastkami równania $W(x)= 0$. Niektóre z nich mogą być przy tym pierwiastkami wielokrotnymi (rzeczywistymi lub nierzeczywistymi).

11.Równanie przestępne

Równanie $f_1(x)=f_2(x)$ nazywamy równaniem przestępnym, jeżeli przynajmniej jedna z funkcji $f_1(x)$ lub $f_2(x)$ nie jest algebraiczna.

Przykłady: $3^x=4^{x-2}\cdot 2^x$, $\sin x=\cos^2 x - \frac{1}{4}$, $x\cos x=\sin x$.

W niektórych przypadkach rozwiązywanie równań przestępnych sprowadza się do równań algebraicznych, przy czym stosuje się tablice; na ogół równania przestępne mogą być rozwiązane **tylko metodami przybliżonymi.**

12. Zagadnienie interpolacji

Przypuśćmy, że dla ciała poruszającego się prostoliniowo udało nam się wyznaczyć doświadczalnie drogi $s_0, s_1, \ldots, s_n$ odpowiadające chwilom $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Na podstawie tych wyników, bez przeprowadzania dalszych pomiarów, chcemy znaleźć wartości drogi odpowiadające innym chwilom.

Moglibyśmy znaleźć wielkość drogi odpowiadającą dowolnej wartości pośredniej czasu, gdybyśmy znali prosty wzór s=f(t), wyrażający drogę s jako funkcję czasu t.

Wyznaczenie funkcji f(t) jest zadaniem interpolacji. Aby funkcja f(t) przyjmująca w punktach t_0, t_1,..., t_l wartości s_0, s_1,...,s_n była jednoznacznie wyznaczona, trzeba o niej poczynić dodatkowe założenia, np. założyć, że jest wielomianem możliwie najniższego stopnia.

-Metoda interpolacji Newtona.

Szukamy takiego wielomianu stopnia co najwyżej n, aby w punktach x_0, x_1, x_2,...,x_n przyjmował wartości y_0, y_1, y_2,..., y_n.

Funkcja (*) $f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$, gdzie c_0, c_1, c_n są stałe, jest wielomianem zmiennej x stopnia co najwyżej n. Łatwo się można o tym przekonać wykonując po prawej stronie mnożenia i porządkując wyrazy według potęgi zmiennej x. Stałe c_0, c_1,...,c_n tak dobieramy, aby były spełnione warunki $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$,...,$y_n=f(x_n)$. Ponieważ ze wzoru (*) mamy $f(x_0)=c_0$, więc z pierwszego warunku $c_0=y_0$. Także ze wzoru (*) mamy $f(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)$, więc z drugiego warunku $y_1=c_0+c_1(x_1-x_0)$, a ponieważ $c_0=y_0$, więc stąd ostatecznie

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Postępując dalej w ten sposób obliczamy dalsze stałe c_2, c_3,...c_n. Jasno widać, że podstawiając otrzymane wartości stałych c_i do wzoru (*) otrzymujemy szukany wielomian, który przyjmuje w punktach x_0, x_1,...,x_n wartości y_0, y_1,..., y_n. Wzór (*) nazywamy wzorem interpolacyjnym Newtona.

-Partes proportionales, czyli interpolacja liniowa.

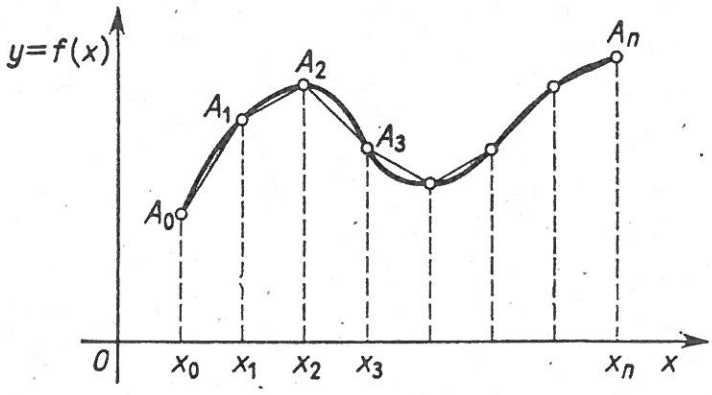
W przypadku gdy n=1, wzór Newtona (*) wyraża się funkcją liniową i wtedy interpolację nazywamy liniową lub partes proportionales.

Wzór Newtona (*) przybiera wówczas postać $y = c_0 + c_1(x - x_0)$ lub, po uwzględnieniu związków $c_0 = y_0$ i $c_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, równanie przyjmuje postać:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Stosowanie interpolacji liniowej oznacza geometryczne zastąpienie wykresu krzywej y=f(x) linią łamaną, gdzie końcami odcinków łamanej są węzły funkcji y=f(x). Przy dostatecznie małym kroku linia łamana różni się od wykresu krzywej y=f(x) wystarczająco mało.

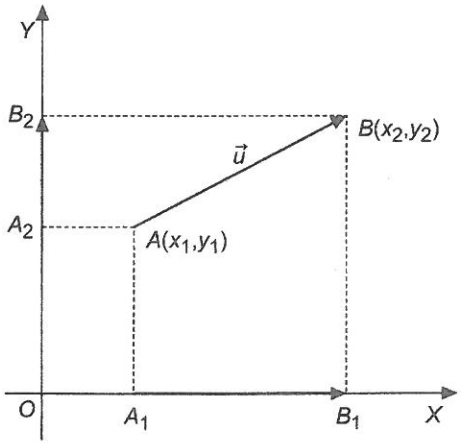
W interpretacji geometrycznej przedstawia to zbiór punktów A na płaszczyźnie: $A_i(x_i,f(x_i))$, gdzie i=1,2,...n (rysunek poniżej). Punkty A_1, A_2,...,A_n nazywamy węzłami funkcji.



13. Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty. Równanie kierunkowe prostej

a) Współrzędne wektora.

Jeżeli $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ oznacza dowolny wektor na płaszczyźnie X0Y a wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$ są jego rzutami prostokątnymi na osie OX i OY, to $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}$ (rysunek poniżej).



Wektory$\overrightarrow{A_1B_1}$ oraz $\overrightarrow{A_2B_2}$ nazywamy składowymi wektora $\overrightarrow{AB}$ w układzie współrzędnych X0Y. Miary wektorów składowych na odpowiednich osiach nazywamy współrzędnymi wektora w danym układzie współrzędnych. Jeżeli $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$ oznaczają wersowy (wektory jednostkowe) odpowiednio osi OX oraz OY, a liczby u_x oraz u_y są miarami wektorów składowych na odpowiednich osiach (współrzędnymi wektora), to:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j},$$

co zapisujemy $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [u_x, u_y]$. Składowe wektorów równych są sobie równe, więc wektory równe mają równe współrzędne. Zapis $\vec{u} = [u_x, u_y]$ oznacza zbiór wektorów równych między sobą, czyli wektor swobodny.

b) Wyznacznik pary wektorów

Niech $\vec{u} = [u_x, u_y]$ oraz $\vec{v} = [v_x, v_y]$

Wyznacznik postaci $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ równy liczbie $u_x v_y - v_x u_y$ nazywamy wyznacznikiem pary wektorów $(\vec{u}, \vec{v})$ i oznaczamy $d(\vec{u}, \vec{v})$

Zatem $d(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$

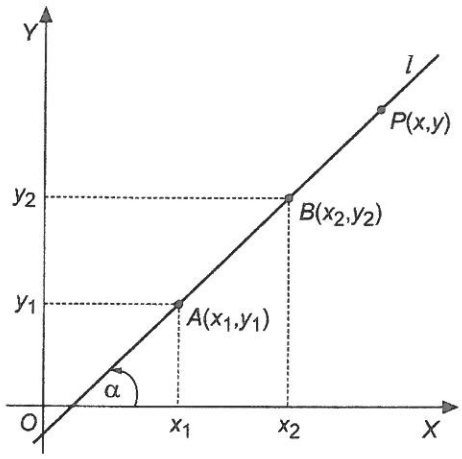
c) Warunek równoległości wektorów

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ to:

$\vec{u} \,||\, \vec{v} <=> d(\vec{u}, \vec{v}) = 0 <=> u_x v_y - u_y v_x = 0$

d) Równanie kierunkowe prostej

Równanie kierunkowe prostej jest jedną z kilku postaci równania prostej.



W układzie współrzędnych X0Y dane są dwa różne punkty $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$. Szukamy równania prostej l wyznaczonej przez zadane punkty, czyli warunku jaki spełnia dowolny punkt $P(x,y) \in l$.

$$P(x,y) \in l <=> \overrightarrow{AP} \,||\, \overrightarrow{AB} <=> d(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\text{Stąd } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Zatem $l: (x-x_1)(y_2-y_1) - (x_2-x_1)(y-y_1) = 0$ jest szukanym równaniem prostej l.

Równanie to można przekształcić do postaci:

$$l: y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \text{gdy } x_2 \neq x_1$$

wprowadzając oznaczenie $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$=tgα=m, (m-współczynnik kierunkowy prostej l), otrzymujemy:

$$l: y-y_1=m(x-x_1) \text{ tzw. równanie kierunkowe.}$$

14. Pochodna funkcji

a) Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0, oraz $x_0+h \in U$, gdzie $h \neq 0$. Jeżeli istnieje skończona granica:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $[f(x)]'_{X=X_0}$.

Zatem:

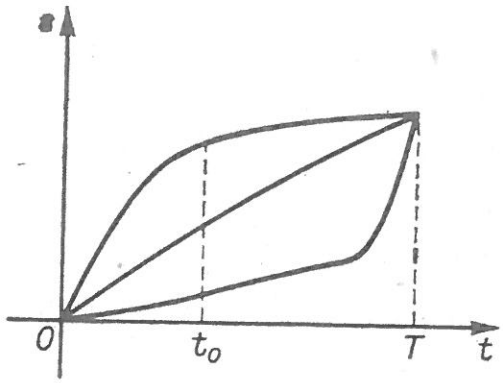
$$[f(x)]'_{X=X_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Iloraz $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0. Jeżeli granica występująca w definicji istnieje przy $h\to 0^+$, to mówimy o pochodnej prawostronnej i oznaczamy ją $[f(x)]'_{X=x_0^+}$,gdy przy $h\to 0^-$ to mówimy o pochodnej lewostronnej i oznaczamy ją $[f(x)]'_{X=x_0^-}$.Pochodna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne jednostronne i są sobie równe.

Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, jeżeli ma pochodną w tym punkcie.

Jeżeli pochodna $[f(x)]'x=x_0$ istnieje w każdym punkcie pewnego zbioru zawartego w dziedzinie funkcji f, to możemy określić na tym zbiorze funkcję $f'(x)=[f(x)]'_x$ dla każdego x z tego zbioru.

b) Interpretacja fizyczna pochodnej – prędkość chwilowa



Powyższy rysunek przedstawia wykresy ruchów trzech ciał. Wszystkie one mają tę samą prędkość średnią w czasie od chwili 0 do chwili T. Prędkość ta jednak nie wystarcza do scharakteryzowania ruchu. Obliczamy prędkości średnie w mniejszych odcinkach czasu. W ten sposób dochodzimy do pojęcia prędkości chwilowej.

Niech droga s poruszającego się ciała będzie dana wzorem s=f(t). Prędkość chwilowa $v(t_0)$ w chwili t_0 jest to granica ciągu prędkości średnich w czasie t_n-t_0, gdy

$$\lim_{h\to\infty}(t_n - t_0) = 0$$

$$v(t_0) = \lim_{t_n\to t_0}\frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0}$$

Z określenia tego wynika, że prędkość $v(t_0)$ ciała w chwili t_0 jest pochodną funkcji f w punkcie t_0. $V(t_0)=f'(t_0)$ Przy oznaczeniu t_n-t_0=h_n mamy t_n=t_0+h_n i:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

Otrzymujemy wzór:

$$v(t_0) = \lim_{h_n\to 0}\frac{f(t_0 + h_n) - f(t_0)}{h_n} = f'(t_0)$$

c) Funkcja pochodna

Definicja:

Niech f będzie dowolną funkcją określoną w zbiorze D_f. Funkcją pochodną funkcji f (lub pochodną funkcji f) nazywamy funkcję, która każdej liczbie x_0 z dziedziny D_f przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ – o ile $f'(x_0)$ istnieje – i oznaczamy ją f' . Zbiór tych liczb x_0, w których funkcja f jest różniczkowalna, stanowi dziedzinę funkcji f', którą oznaczamy $D_{f'}$.

Uwaga: Nie należy mylić terminów: *"pochodna funkcji w punkcie"* i *„pochodna funkcji" („funkcja pochodna")*. *„Pochodna funkcji w punkcie"* jest liczbą (granicą odpowiedniego ilorazu różnicowego), natomiast *„pochodna funkcji"* jest to funkcja, która argumentowi x przyporządkowuje liczbę równą pochodnej funkcji w punkcie x.

d) Związek różniczkowalności z ciągłością

Twierdzenie 1

Jeśli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 ma pochodną w tym punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

Wniosek z twierdzenia 1: jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pewnym przedziale, to jest w tym przedziale ciągła.

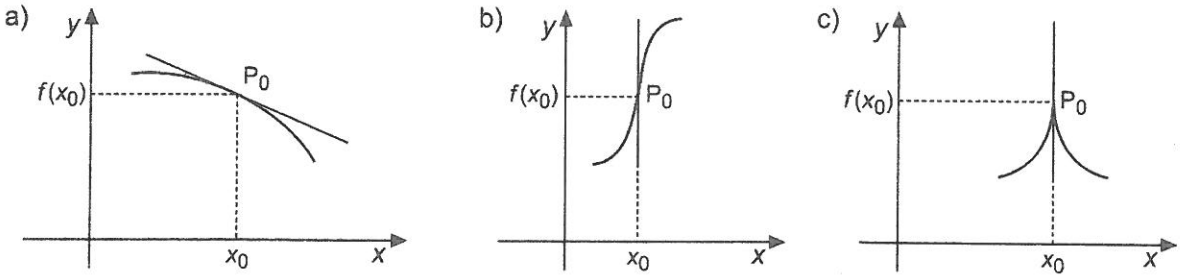
Uwaga: Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, a więc funkcja ciągła w punkcie x_0 nie musi być różniczkowalna w punkcie x_0, tzn. może nie posiadać pochodnej w x_0.

Prawdziwe jest natomiast twierdzenie przeciwstawne (z zaprzeczenia tezy wynika zaprzeczenie założenia)

Twierdzenie 2.

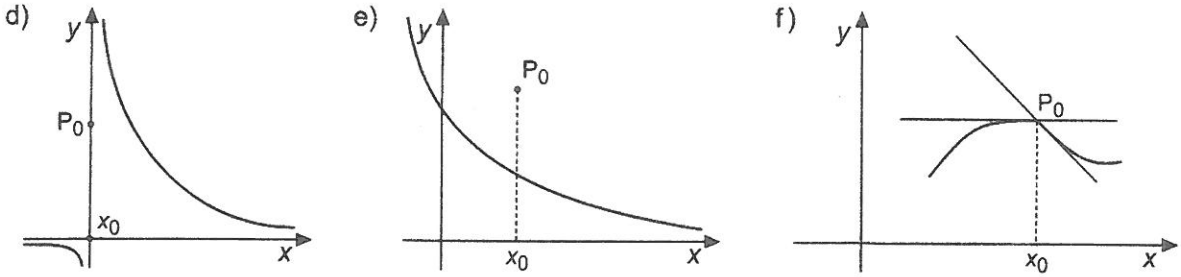
Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w x_0, to nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0, w którym jest ciągła, jeśli wykres *„nie przebiega gładko"* w punkcie $(x_0,f(x_0))$, lecz *„załamuje się"* (występuje tzw. *„ostrze")*. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy funkcji, z których pewne są różniczkowalne w x_0, a pewne nie są różniczkowalne w x_0. Na rysunkach zaznaczono też, które funkcje są ciągłe oraz dla których istnieje prosta styczna do wykresu w punkcie x_0, a dla których ona nie istnieje.



f jest ciągła w x_0,
f posiada pochodną w x_0,
istnieje styczna w x_0.

f jest ciągła w x_0,
f nie posiada pochodnej x_0,
(nie istnieje skończona granica ilorazu różnicowego), istnieje styczna pionowa.

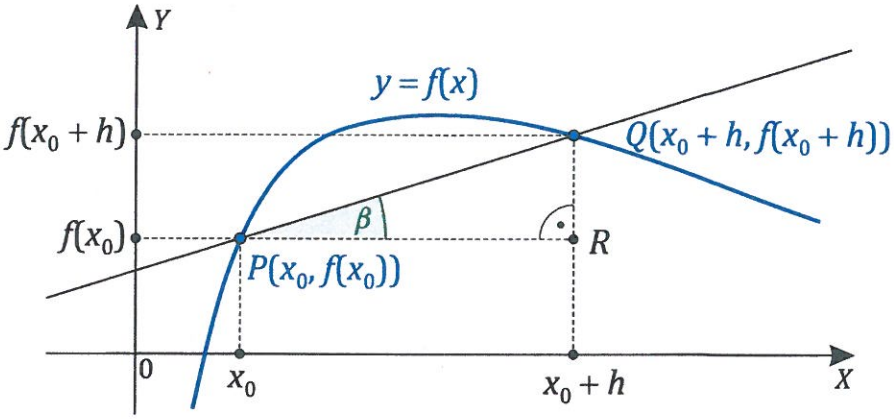


f nie jest ciągła w x_0,
f nie posiada pochodnej w x_0,
nie istnieje styczna w x_0.

f jest ciągła w x_0,
f nie posiada pochodnej w x_0,
nie istnieje styczna w x_0.

15. Interpretacja geometryczna pochodnej w punkcie – styczna do wykresu funkcji (krzywej)

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(x_0)$ oraz niech będzie różniczkowalna w samym punkcie x_0. Ponadto niech h będzie liczbą rzeczywistą, dla której $(x_0+h)\in U(x_0)$. Rozważmy punkty $P(x_0, f(x_0))$ oraz $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ należące do wykresu funkcji f. Przez te punkty prowadzimy prostą (rysunek poniżej przedstawia przypadek h >0).



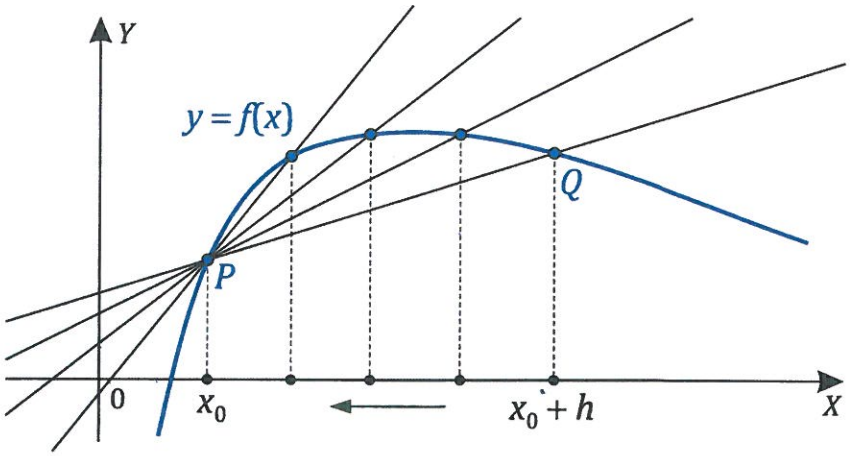
Taką prostą nazywamy sieczną wykresu funkcji f, przechodzącą przez punkty P,Q – równanie kierunkowe siecznej zostało przedstawione w pkt. 13.

Oznaczamy miarę kąta RPQ przez β. Wyznaczamy tgβ:

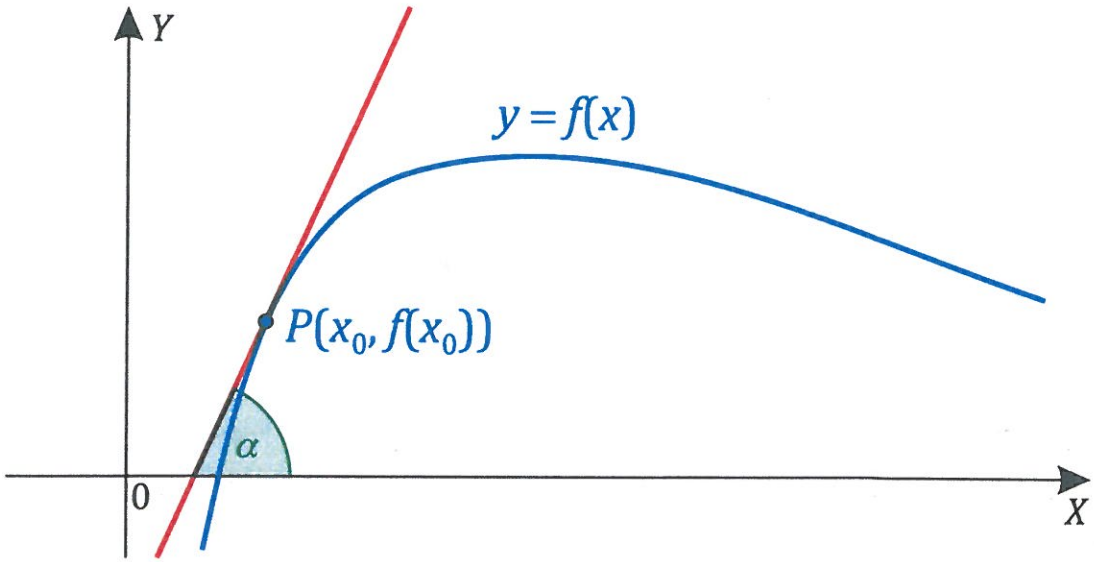
$$\mathrm{tg}\beta=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Okazuje się, że iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0, odpowiadający zmianie argumentu h, jest współczynnikiem kierunkowym rozważanej siecznej – pkt.13.

Zobaczmy co się będzie działo, jeżeli h będzie dążyć do 0. Wówczas punkt Q będzie *„coraz bliżej"* punktu P(rysunek poniżej)



.Jeśli h będzie bardzo blisko 0, to punkty wykresu, przez które przechodzi sieczna, będą prawie się pokrywać. W przypadku granicznym otrzymujemy prostą, którą nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie P (rysunek poniżej).



Oznaczmy kąt nachylenia stycznej do osi OX przez α. Zauważmy, że jeśli $h \to 0$ to $tg\beta \to tg\alpha$, czyli $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$, a to znaczy, że współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu f w punkcie P jest równy $f'(x_0)$: $tg\alpha = f'(x_0)$.

Wyznaczmy zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0. Równanie prostej w postaci kierunkowej to:

$y=ax+b$ (w tym wzorze współczynnik kierunkowy prostej oznaczamy przez a)

Wiemy, że punkt $P(x_0, f(x_0))$ należy do tej prostej oraz $a=f'(x_0)$, wobec tego:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b$$

$$b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x)\cdot x_0,$$

które można przekształcić do postaci:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Uzyskany rezultat uzasadnia celowość przyjęcia następującej definicji:

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie.

Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą opisaną równaniem:

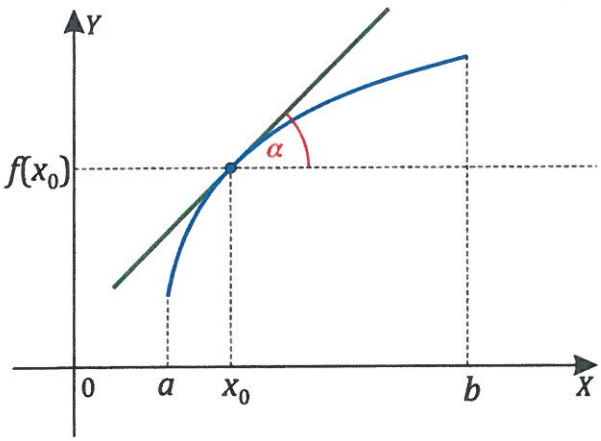
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

16. Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

Wiele procesów fizycznych, chemicznych, ekonomicznych i innych zagadnień można modelować za pomocą funkcji ciągłych (np. funkcji wielomianowych, wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych). Rachunek pochodnych pozwala badać np. w jakich przedziałach dana funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca, czy przyjmuje największą wartość czy też nie. Znajomość takich własności funkcji pozwala dokładnie scharakteryzować proces opisany daną funkcją. Nie zawsze w prosty sposób możemy naszkicować wykres takiej funkcji i na jego podstawie odczytać interesującą nas informację. W tym temacie pomocne nam są związki między pochodną funkcji a monotonicznością, ciągłością (opisaną w pkt. 6,7) tej funkcji, wyznaczeniem rodzaju ekstremum (maksimum, minimum lokalne), największej i najmniejszej wartości funkcji w przedziale domkniętym lub otwartym i w konsekwencji zbadanie przebiegu zmienności funkcji po wykonaniu czynności od wyznaczenia dziedziny funkcji do naszkicowania jej wykresu.

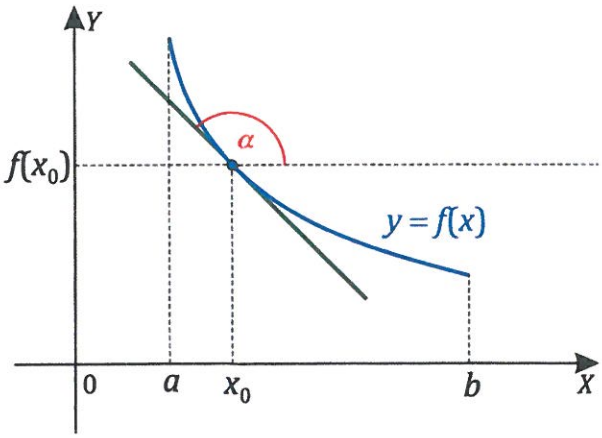
Wiemy już, że pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

a) $f'(x_0) > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha > 0$

b) $f'(x_0) < 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha < 0$

Powyższy rysunek a) ilustruje przypadek $f'(x_0) > 0$. Wtedy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest nachylona do osi OX pod kątem ostrym. Funkcja liniowa, której wykresem jest taka prosta, jest rosnąca. Możemy powiedzieć, że jeśli $f'(x_0) > 0$, to wykres funkcji f wokół punktu $(x_0, f(x_0))$ najlepiej przybliża odcinek prostej będącej wykresem rosnącej funkcji liniowej. Można więc oczekiwać, że jeśli pochodna f jest dodatnia, to funkcja f jest rosnąca. Rzeczywiście, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

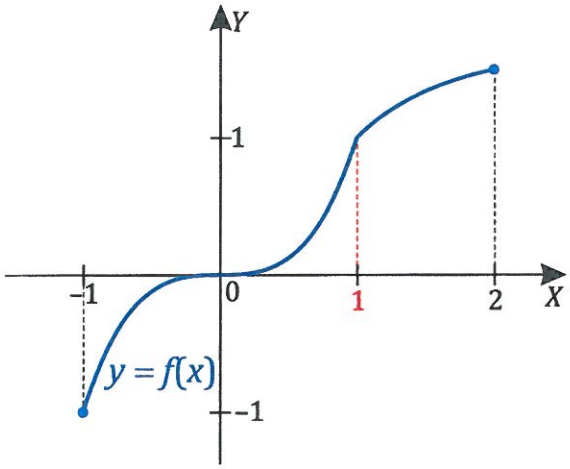
Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a,b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a,b).

Rysunek b) ilustruje przypadek $f'(x_0) < 0$. Wówczas styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest nachylona do osi OX pod kątem rozwartym. Zatem funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, jest funkcją malejącą. W tym przypadku powiemy że wykres funkcji f wokół punktu $(x_0, f(x_0))$ najlepiej przybliża odcinek prostej będącej wykresem funkcji liniowej.

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a,b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a,b).

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1 (odpowiednio do twierdzenia 2) nie jest prawdziwe. Może się zdarzyć, że na przykład funkcja rosnąca w przedziale (a,b) ma pochodną równą 0 w pewnych punktach tego przedziału, albo w ogóle pochodna w pewnych punktach może nie istnieć (ilustruje to przykład poniżej).



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1, 2)$.

$$f(x)=\begin{cases} x^3, jeśli\ x \in (-1,1] \\ \frac{-1}{x}+2, jeśli\ x \in (1,2) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, jeśli\ x \in (-1,1) \\ \frac{1}{x^2},\ jeśli\ x \in (1,2) \end{cases}$$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale (-1,2).

Pochodna funkcji f w punkcie 0 jest równa 0.

Pochodna funkcji f w punkcie 1 nie istnieje.

Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a,b) oraz:

a) funkcja f jest rosnąca w tym przedziale, to $f'(x) \geq 0$ dla każdej liczby x z przedziału (a,b) (przy czym wartość 0 może przyjąć w skończonej ilości punktów (a,b)).
b) funkcja f jest malejąca w tym przedziale, to $f'(x) \leq 0$ dla każdej liczby x z przedziału (a,b) (przy czym wartość 0 może przyjąć w skończonej ilości punktów (a,b)).

Można też udowodnić twierdzenie dotyczące pochodnej funkcji stałej.

Twierdzenie 4

Niech funkcja f ma pochodną w przedziale (a,b). Funkcja f jest stała w przedziale (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x)=0$ dla każdego x z przedziału (a,b).

Uwaga:

1) jeśli funkcja jest rosnąca w dwóch przedziałach, to nie wynika z tego, że jest rosnąca w sumie tych przedziałów.

2) jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale [a,b] oraz:

a) funkcja f jest rosnąca w przedziale (a,b), to jest również rosnąca w przedziale [a,b]

b) funkcja f jest malejąca w przedziale (a,b), to jest również malejąca w przedziale [a,b].

17. Pochodna rzędu drugiego (druga pochodna)

Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej.

W punkcie 14 przedstawiłam pojęcie prędkości chwilowej $v(t_0)$ w chwili t_0 jako pochodną funkcji f w punkcie t_0 ($v(t_0)=f'(t_0)$).

Teraz przedstawię pojęcie przyspieszenia chwilowego ruchu w chwili t_0

Przyśpieszeniem średnim w ruchu zmiennym w okresie od chwili t_0 do chwili t nazywamy stosunek przyrostu prędkości do odpowiedniego przyrostu czasu, tzn.

$$a_{\text{średnie}}=\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \qquad (1)$$

Przyśpieszeniem chwilowym ruchu w chwili t_0 nazywamy granicę przyśpieszenia średniego, gdy przyrost czasu $t-t_0$ dąży do zera, czyli przyśpieszeniem chwilowym jest:

$$a(t) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \qquad (2)$$

Zauważmy, że po prawej stronie wzoru (1) występuje iloraz różnicowy funkcji v, a po prawej stronie wzoru (2) pochodna tej funkcji w punkcie t_0. Wynika to bezpośrednio z określenia pochodnej i z określenia przyśpieszenia w chwili t_0.

Zatem:

Jeżeli funkcja określająca prędkość poruszającego się ciała v=v(t) jest określona i różniczkowalna w przedziale A, to przyśpieszenie tego ruchu równe jest w tym przedziale pochodnej prędkości a(t)=v'(t).

Aby stwierdzić, czy ruch jest opóźniony czy przyśpieszony, należy porównać znaki prędkości i przyśpieszenia: ruch jest opóźniony, gdy te znaki są przeciwne; przyśpieszony, gdy są jednakowe.

Udowodniliśmy, że przyśpieszenie chwilowe jest pochodną prędkości – ale prędkość jest pochodną drogi, możemy więc zapisać:

$$a(t)=v'(t)=[s'(t)]'$$

Mówimy, że a(t) jest drugą pochodną funkcji s(t).

<u>Określenie:</u>

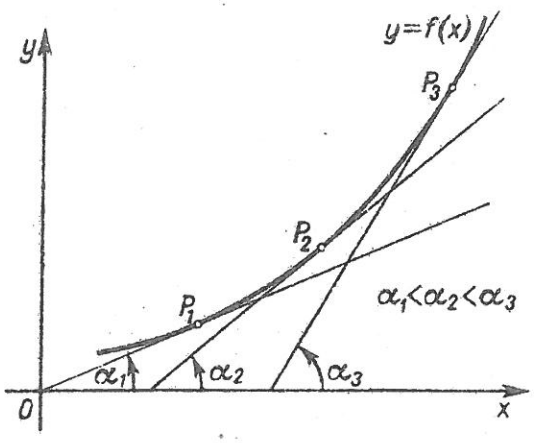
Niech będzie dana funkcja $x\to y=f(x)$, $x\in D$ i jej pochodna $x\to y=f'(x)$, $x\in D_1$. Drugą pochodną funkcji f nazywamy pochodną jej pochodnej, o ile taka pochodna istnieje. Oznaczamy ją symbolem f''.

Druga pochodna ma liczne zastosowanie w fizyce, geometrii, metodach rachunkowych (w tym w metodach przybliżonego obliczania pierwiastków), przy sporządzaniu wykresów funkcji itd.

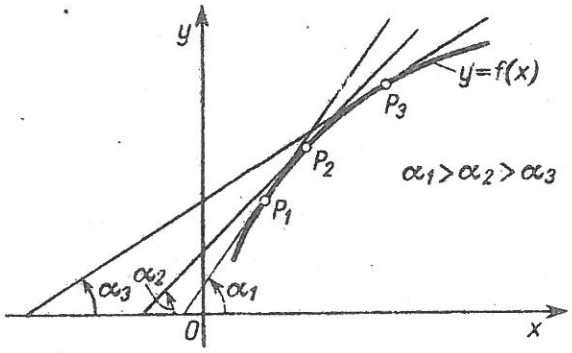
18. Określenie *„funkcja klasy C^2"*

Funkcja f określona na przedziale (a,b) nazywa się funkcją klasy C^2, jeżeli w przedziale (a,b) ma dwie ciągłe pochodne.

19. Wypukłość krzywej



Punkty P_1, P_2, P_3 mają odpowiednio odcięte $x_1<x_2<x_3$. Kąty $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ => $tg\alpha_1<tg\alpha_2<tg\alpha_3$, a więc $f'(x_1)< f'(x_2)< f'(x_3)$. Pochodna $f'(x)$ rośnie – krzywa wypukła od dołu.



Punkty P_1, P_2, P_3 mają odpowiednio odcięte $x_1<x_2<x_3$. Kąty $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$ => $tg\alpha_1>tg\alpha_2>tg\alpha_3$, a więc $f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$. Pochodna $f'(x)$ maleje – krzywa wypukła od góry.

Załóżmy o funkcji f(x), że ma w pewnym przedziale (a,b) drugą pochodną ciągłą. Nawiązując do powyższych rysunków definiujemy:

Krzywa będąca wykresem funkcji (lub sama funkcja) f(x) jest wypukła od dołu w przedziale (a,b), jeżeli pochodna f'(x) jest w tym przedziale funkcją rosnącą, lub że jest wypukła od góry w przedziale (a,b), jeżeli pochodna f'(x) jest w tym przedziale funkcją malejącą.

Ponieważ f''(x) jest pochodną funkcji f'(x), a zatem jeżeli f''(x) >0 w przedziale (a,b), to f'(x) rośnie w (a,b), więc wykres funkcji f(x) jest w przedziale (a,b) krzywą wypukłą od dołu.

Podobnie, jeżeli f''(x)< 0 w przedziale (a,b), to wykres funkcji f(x) jest w przedziale (a,b) krzywą wypukłą od góry.

W tym zagadnieniu pominęłam wyjaśnienie istoty tzw. *„punktu przegięcia"* krzywej (funkcji) jako przypadków, kiedy krzywa na lewo od tego punktu jest wypukła od dołu, a na prawo wypukła od góry lub odwrotnie.

III. Metody przybliżonego obliczania pierwiastków równań nieliniowych

W tej części pracy przedstawię tok postępowania przy obliczaniu pierwiastków równania f(x)=0 metodą *„regula falsi"*, metodą Newtona oraz metodą zestawiającą obie te metody.

W części II pracy przypomniałam wszystkie pojęcia, określenia, definicje, twierdzenia niezbędne do zrozumienia tematu, oznaczając je kolejnymi cyframi od 1 do 19. Oczywiście jest to niewielka część ogólnej wiedzy matematycznej na temat poszczególnych zagadnień. W tekście wyjaśniającym poszczególne metody oraz w części podsumowującej i wnioskach, przy występujących pojęciach i określeniach, które mogą wymagać przypomnienia lub wytłumaczenia, zaznaczyłam odpowiednie odnośniki, np. [6] – oznacza, że to pojęcie, określenie jest wyjaśnione w punkcie 6 części II pracy. Wyjaśnione pojęcia i określenia zachowują pewną hierarchiczność, tzn. może się okazać, że aby przypomnieć sobie np. pojęcie [6], będzie trzeba zapoznać się z wcześniejszymi pojęciami np. [3], [4], [5].

Jest to uzależnione od indywidualnej wiedzy osoby chętnej do zapoznania się z tym tematem. Autorzy książki *„Metody numeryczne"*, Panowie Fortuna, Macukow i Wąsowski w części 3 pt. *„Przybliżone rozwiązywanie równań nieliniowych i ich układów"*, przedstawiają poza wyżej wymienionymi, również inne metody (np. metodę połowienia opisaną w części V pracy, zmodyfikowaną metodę *„regula falsi"* zwaną *„metodą siecznych"*, metody zmodyfikowane dla pierwiastków wielokrotnych, metody poszukiwania zer wielomianów, metody rozwiązywania układów równań nieliniowych).

Z uwagi na konieczność posiadania już sporej wiedzy matematycznej zagadnienia te zostały pominięte. Z tego samego powodu pominęłam również kwestię oszacowania błędu obliczeń oraz tzw. wskaźnika efektywności.

Wspomniałam, że w tej części pracy zajmiemy się rozwiązywaniem równań nieliniowych. Jak wiadomo, nie każde równanie można rozwiązać dokładnie. Przede wszystkim dotyczy to większości równań przestępnych [11]. Wiadomo również, że nie można podać metody na rozwiązanie dowolnego równania algebraicznego [10] stopnia wyższego niż czwarty [8]. Dokładne rozwiązanie równania nie zawsze jest też konieczne, ponieważ w równaniach często mamy jedynie przybliżone wartości współczynników i zadanie dokładnego wyznaczania wartości pierwiastków traci sens. Stąd wynika duże znaczenie metod przybliżonego rozwiązywania równania, w których zadanie wyznaczenia pierwiastków uważamy za praktycznie rozwiązane, jeśli potrafimy określić je z żądaną dokładnością i podać oszacowanie błędu. Większość metod przybliżonego rozwiązywania równań polega na poprawianiu kolejnych przybliżeń pierwiastków. Ponadto większość metod można stosować jedynie wtedy, gdy znamy przedział, w którym znajduje się pojedynczy pierwiastek rozwiązywanego równania (o takim przedziale mówi się, że jest *przedziałem izolacji pierwiastka*). Do wyznaczenia przedziałów izolacji można wykorzystać wykres funkcji y=f(x) albo, jeżeli jest to trudne, równanie wyjściowe f(x)=0 należy przekształcić do równoważnej mu postaci $f_1(x)=f_2(x)$ [3,5].

Proces obliczania pierwiastków składa się z dwóch części:

1. Odnalezienia z grubsza przybliżonej wartości pierwiastków.

2. Uściślenia odnalezionych przybliżeń.

Ad1. Jeżeli f(x) [3,5] jest funkcją ciągłą [6,7] i określoną w przedziale domkniętym [a,b] [2], a f(a) i f(b) mają różne znaki, to na podstawie twierdzenia Darboux [7], wewnątrz przedziału [a,b], istnieje co najmniej jeden taki punkt x_0, że $f(x_0)=0$, czyli przy podanych założeniach w przedziale otwartym (a,b) [2], znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania f(x)=0.

Biorąc różne wartości a i b można zawsze otrzymać wystarczająco wąski przedział, w którym będzie tylko jeden pierwiastek rozpatrywanego równania. Metodę graficzną stosuje się, jeżeli równanie można przedstawić w postaci $f_1(x)=f_2(x)$, przy czym wykresy funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ mogą być łatwo sporządzone. Wtedy pierwiastki rzeczywiste [8,9] równania są równe odciętym punktów przecięcia krzywych $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$. O współczynnikach występujących w równaniu zakładamy, że są rzeczywiste [1].

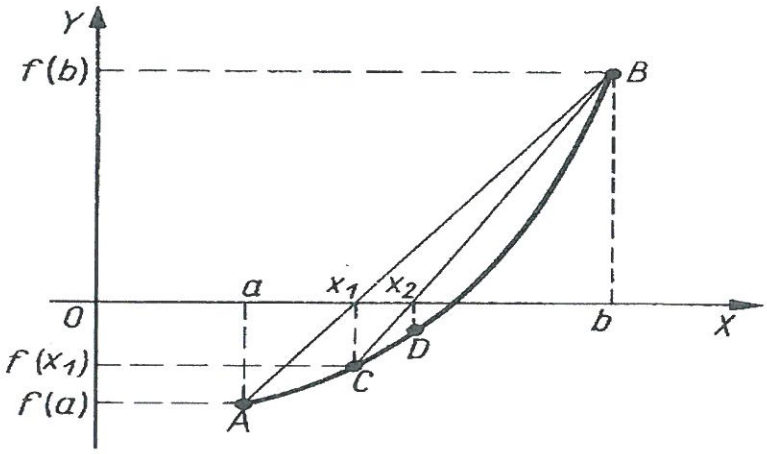
Można również pozostając przy rozważaniu równania w postaci f(x)=0 badać przebieg funkcji y=f(x) i na tej podstawie starać się określić, w ilu punktach funkcja ma miejsce zerowe [4] i gdzie się one w przybliżeniu znajdują. Przypomnę, że podstawą naszego rozważania jest przy tym twierdzenie o funkcji ciągłej [6,7], która przybierając w punkcie a wartość ujemną, w punkcie b wartość dodatnią (b>a) albo odwrotnie, przyjąć musi w przedziale (a,b) wartość zero. Oznacza to, że w tym przedziale równanie f(x)=0 ma co najmniej jeden pierwiastek.

Reasumując, metody przybliżonego rozwiązywania równania f(x)=0 w istocie swej polegają na znalezieniu przedziału [a,b], wewnątrz którego leży dokładnie jeden pierwiastek równania, a następnie na stopniowym zacieśnianiu tego przedziału. Początkowy przedział, w którym znajduje się pierwiastek, określamy zwykle na podstawie wykresu lub tablicy wartości funkcji.

Ad2.

1. Metoda *„regula falsi"*

Nazwa metody pochodzi od łacińskich słów: regula – linia i falsus – fałszywy; jest to zatem metoda fałszywego założenia liniowości funkcji. Przyjmijmy, że w rozpatrywanym przedziale [a,b] równanie f(x)=0 ma dokładnie jeden pierwiastek, że jest to pierwiastek pojedynczy i że f(a)< 0, f(b) >0 (f(a)·f(b)< 0). Mamy wyznaczyć przybliżoną wartość pierwiastka x.



rys. A

Oznaczmy przez A,B punkty wykresu funkcji y=f(x) o odciętych odpowiednio a,b i połączmy te punkty (rysunek powyżej), tzn. przez punkty A(a, f(a)) i B(b, f(b)) prowadzimy cięciwę o równaniu [13]:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$$

Odciętą x_1 punktu, w którym cięciwa AB przecina oś 0X, przyjmujemy za pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka równania f(x)=0 (przybliżenie polega zatem na przyjęciu *„fałszywego założenia"*, że krzywa jest w przedziale [a,b] prostą, stąd nazwa łacińska *„regula falsi"*.

Z powyższej zależności wynika, że:

$$x_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(a)-f(b)} \qquad (1)$$

Jeżeli $f(x_1)=0$, to oczywiście x_1 jest szukanym pierwiastkiem x i zadanie zostało zakończone.

Załóżmy, że $f(x_1)\neq 0$. Jeżeli będzie (tak jak na rysunku) $f(x_1)< 0$, $f(b) >0$, to powyższy wzór stosujemy w dalszym ciągu do przedziału $[x_1, b]$ i obliczamy x_2, czyli jeżeli przybliżenie x_1 nie jest wystarczająco dokładne, to przez punkt C $(x_1, f(x_1))$ oraz B prowadzimy następną cięciwę. Odcięta x_2 punktu, w którym ta cięciwa przetnie oś OX da nam drugie przybliżenie pierwiastka x. Jeżeli przybliżenie x_2 jest nadal niewystarczające, to przez punkty B i $D(x_2, f(x_2))$ prowadzimy trzecią cięciwę, co daje nam trzecie przybliżenie x_3 itd.

W ten sposób otrzymujemy kolejne wyrazy ciągu [6] przybliżeń pierwiastka x_1, x_2, $x_3,\ldots,x_n$.

W przypadku przedstawionym na rysunku prowadziliśmy drugą cięciwę przez punkt $C(x_1, f(x_1))$ oraz punkt B, ponieważ rzędna punktu B ma przeciwny znak niż $f(x_1)$.

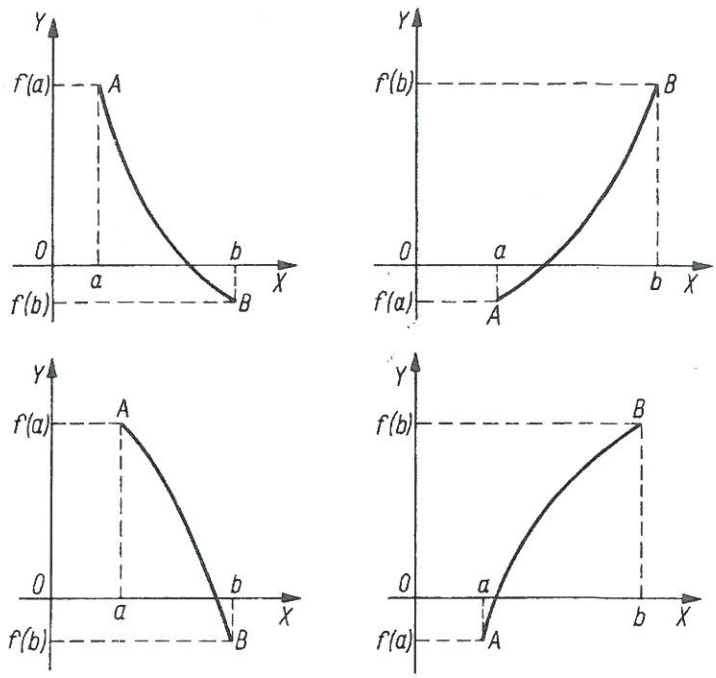
W metodzie *„regula falsi"* należy przyjąć dodatkowe założenia tj.:

a) funkcja f(x) na przedziale [a,b] jest funkcją klasy C^2 [18],

b) pierwsza [14, 16] i druga [17] pochodna mają stały znak na tym przedziale.

Założenia te są potrzebne między innymi do ustalenia stałego punktu iteracji (tzn. czy *„nieruchomy"* będzie punkt A, czy punkt B).

Wobec tych założeń wykres funkcji y=f(x) może być tylko jednym z czterech rodzajów przedstawionych na poniższym rysunku.



W naszym rozpatrywanym przypadku na przedziale [a,b] pochodne f'(x) i f''(x) są dodatnie (dla pozostałych przypadków rozumowanie jest analogiczne). Przy w/w przyjętych założeniach krzywa y=f(x) jest skierowana wypukłością w dół [19], zatem w kolejnych przybliżeniach punkt B pozostaje nieruchomy (gdyby np. f'(x) >0 i f''(x)< 0 na przedziale [a,b], wówczas nieruchomy byłby punkt A).

Podsumowując, metoda *„regula falsi"* jest zbieżna [6] dla dowolnej funkcji ciągłej na przedziale [a,b] (oczywiście f(a)f(b)< 0), jeżeli tylko pierwsza pochodna tej funkcji jest ograniczona i różna od zera w otoczeniu pierwiastka. Jeżeli druga pochodna nie zmienia znaku w rozpatrywanym przedziale, to ten koniec przedziału, w którym f''·f >0, jest stałym punktem iteracji- wszystkie cięciwy przechodzą przez ten punkt. Wyznaczenie kolejnych przybliżeń x_0, x_1,...x_n pierwiastka równania f(x)=0 w przedziale [a, b] dokonuje się według zależności:

1. gdy f'(x) f''(x) >0 dla x∈[a,b], wtedy:

$$x_0 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}$$

i x_n jest ciągiem rosnącym [6].

2. gdy f''(x) f''(x)< 0 dla x∈[a,b], wtedy:

$$x_0 = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)}$$

i (x_n) jest ciągiem malejącym [6].

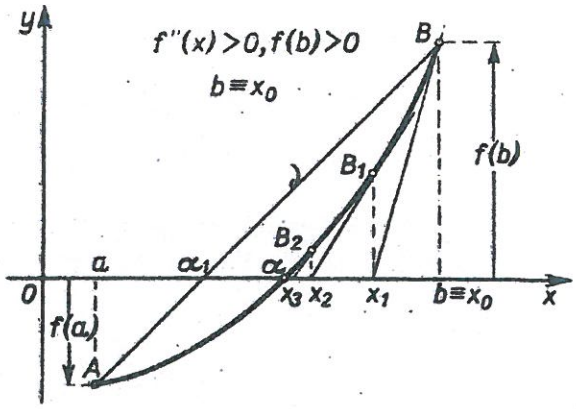
Metoda ta (zwana też metodą interpolacji liniowej [12]) dotyczy równań algebraicznych, jak i niealgebraicznych o jednaj niewiadomej. Metoda nie daje od razu dużych przybliżeń i mniej nadaje się do zastosowań. Jej wadą jest stosunkowo powolna zbieżność.

2.Meoda Newtona

Metoda *„regula falsi"* polega na interpolacji liniowej funkcji [12], tj. na zastępowaniu jej wykresu przez linię prostą. Wykres funkcji y=f(x) miedzy punktami A, B zastępowaliśmy cięciwą AB, a pierwiastek x równania f(x)=0 jego wartością przybliżoną x_1 otrzymaną jako punkt przecięcia cięciwy z osią OX.

Przybliżoną wartość pierwiastka równania f(x)=0 przy założeniu, że na przedziale [a,b], w którym położony jest pierwiastek, funkcja f(x) ma w końcach różne znaki oraz pierwsza i druga pochodna maja stały znak, można wyznaczyć też metodą Newtona, zwaną także metodą stycznych.

W interpretacji geometrycznej metoda Newtona polega na zastąpieniu pierwiastka α punktem przecięcia z osią OX stycznej [15] do krzywej y= f(x) w punkcie określonym pewną wartością x dostatecznie bliską pierwiastka α (rysunek poniżej).



rys. B

O funkcji f(x) zakładać będziemy, że f(a)·f(b)< 0 oraz, że ma ona w całym przedziale [a,b] drugą pochodną [17], albo wszędzie dodatnią, albo wszędzie ujemną. Przy tym założeniu, jak można dowieść, funkcja f(x) ma dokładnie jedno miejsce zerowe w przedziale [a,b].

Metoda Newtona polega na następującym postępowaniu:

Kreśląc styczne w punktach A, B krzywej y=f(x), w których odcięte są końcami przedziału [a,b], zauważmy biorąc za podstawę powyższy rysunek, że z dwóch stycznych tylko jedna (w punkcie B) przecina oś OX dostatecznie blisko pierwiastka α. Oznaczmy punkt przecięcia się tej stycznej z osią OX przez x_1, a punkt krzywej y=f(x) o odciętej x_1 przez B_1. Rysunek orientuje, że przez przecięcie się z osią OX stycznej przeprowadzonej w punkcie B_1otrzymujemy x_2, które jest dokładniejszym niż x_1 przybliżeniem pierwiastka α. Oznaczając punkt krzywej o odciętej x_2 przez B_2 i kreśląc w nim styczną, możemy otrzymać z kolei x_3, które jest dokładniejszym niż x_2 przybliżeniem pierwiastka α, itd. Tą drogą wyznaczamy ciąg przybliżeń (x_n) [6] pierwiastka α. Oznaczmy przez x_0 ten koniec przedziału [a,b], który przyjmiemy jako odciętą punktu styczności pierwszej z narysowanych stycznych i napiszmy równanie stycznej [15] o tym punkcie styczności. Ma ono postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Przyjmując w powyższym równaniu y=0 znajdziemy:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (2)$$

Jako punkt przecięcia stycznej z osią OX. Zastępując we wzorze x_0 przez x_1, otrzymamy:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ogólnie

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n=0,1,2,3\ldots) \qquad (3)$$

Otrzymaliśmy wzór na podstawie którego będzie można wyznaczyć przybliżenia pierwiastka α równania f(x)=0 w przedziale [a,b]. Należy jednak zbadać, który z dwóch końców przedziału [a,b] można przyjąć we wzorze (2) jako x_0 oraz po ustaleniu tego wykazać, że wyrazy ciągu (x_n) przedstawiają zgodnie z rysunkiem coraz to dokładniejsze przybliżenia pierwiastka α. Wyjaśnia to sformułowane poniżej twierdzenie:

Twierdzenie:

Załóżmy, że funkcja f(x) ma drugą pochodną dodatnią (ewentualnie ujemną) w całym przedziale [a,b] i że jest f(a)·f(b)< 0. Oznaczmy przez α jedyny pierwiastek równania f(x)=0 w przedziale [a,b], a przez x_0 ten z końców przedziału [a,b], w którym funkcja f(x) ma znak zgodny ze znakiem jej drugiej pochodnej. W takim przypadku ciąg (x_n) określony wzorem (3) jest rosnący, jeżeli x_0=b. W każdym przypadku:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \text{ [6]} (patrz\ rys. B)$$

Reasumując, metoda Newtona polega na wyznaczaniu kolejnych przybliżeń $x_0, x_1, \ldots x_n$ pierwiastka równania f(x)=0 w przedziale [a,b] z następujących zależności:

- gdy f'(x)·f''(x)< 0 dla x∈[a,b], wtedy:

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

i (x_n) jest ciągiem rosnącym [6].

- gdy f'(x) · f''(x) > 0 dla x∈[a,b], wtedy:

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

i (x_n) jest ciągiem malejącym [6].

3. Metoda zestawiająca metody *„regula falsi"* i Newtona

Zestawmy obie metody przybliżonego rozwiązywania równań (porównajmy rysunki A i B). Zauważmy, że jeżeli w zależności od znaku drugiej pochodnej obierzemy dla zastosowania wzoru (2) prawy koniec przedziału [a,b], tzn. przyjmiemy we wzorze (2) $x_0 = b$, to stosując jednocześnie metodę *„regula falsi"*, tj, wzór (1) dla wyznaczenia przybliżenia α, otrzymamy nierówność $\alpha_1 < \alpha < x_1$ (patrz rys. B). Wynika to z kształtu krzywej o równaniu y= f(x) i z tego, że w przypadku metody *„regula falsi"* posługujemy się cięciwą, a w przypadku metody Newtona styczną. Otrzymując liczby znajdujemy dwie wartości przybliżone pierwiastka jedną z niedomiarem, a drugą z nadmiarem, co umożliwia ustalenie dokładności wyniku. Postępowanie można powtórzyć zastępując przedział [a,b] przedziałem $[\alpha_1, x_1]$ (gdzie α_1 jest przybliżeniem obliczonym metodą *„regula falsi"*, a x_1 metodą Newtona), itd. Otrzymujemy w ten sposób ciąg przedziałów zawierających pierwiastek α.

IV. *„Regula falsi"* przez wieki

Zadania, które dzięki współczesnej symbolice zapisuje się zwięźle w postaci: ax+b=c i w konsekwencji łatwo dziś rozwiązuje, pojawiają się od zarania matematyki. W dawnych czasach sprawiały jednak duże trudności. W najstarszych tekstach historycznych, np. na tabliczce babilońskiej YBC 4669, znajdujemy takie zadania źle rozwiązane. Nie powinno to jednak dziwić. Techniki rachunkowe starożytnych nie radziły sobie dobrze z niektórymi działaniami, a nadto nie mieli oni żadnej ogólnej symboliki i nie potrafili wypracowanych przez siebie sposobów postępowania wyrazić w sposób ogólny. Mogli jedynie liczyć na konkretnych liczbach, ogólne zaś sposoby postępowania wdrażali swoim uczniom wyłącznie przez przerabianie przez nich dużej liczby odpowiednich ćwiczeń. Nawet proste równanie typu ax=c mogło im sprawiać trudności rachunkowe w przypadku, gdy a było ułamkiem lub liczbą złożoną z części całkowitej i ułamka. Zdumienie i podziw budzi raczej to, że już jakieś cztery tysiące lat temu pojawiła się oryginalna metoda, która pozwalała radzić sobie z takimi i podobnymi zadaniami. Pod nadaną jej później łacińską nazwą *„regula falsi"* (po polsku: reguła / metoda fałszywej wartości lub reguła / metoda fałszywego położenia) przetrwała ponad trzy tysiące lat, niemal do czasów nam współczesnych, dopiero bowiem poczynając od XVIII wieku zaczęła tracić na danym znaczeniu. Istota tej metody polega na przyjęciu najpierw niepoprawnej odpowiedzi, a następnie stosownej do warunków zadania jej modyfikacji. Celem autora artykułu jest przedstawienie metody fałszywej wartości na kilku historycznych przypadkach.

Najstarsze znane teksty matematyczne pochodzą z XVIII wieku a.Ch.n. z dwóch odległych kręgów kulturowych, Egiptu i Babilonii. Z Egiptu dotarły do nas z tamtych czasów fragmenty papirusów z Kahun, moskiewski papirus matematyczny i papirus Rhinda (ten ostatni pochodzi wprawdzie z 1650r a.Ch.n., ale jest kopią tekstu o dwieście lat starszego). W każdym z nich znajdujemy ślady stosowania metody *„regula falsi"* (np. w papirusach z Kahun w zadaniu K3 prowadzącym do równania $(^1/_2 - ^1/_4) \cdot x = 19$, a w papirusie moskiewskim w bardziej złożonym zadaniu M19 prowadzącym do równania $(1+^1/_2)\cdot x+4=10$), najwięcej ich jednak w najobszerniejszym papirusie Rhinda i stamtąd Pan Roman Duda zaczerpnął przykłady, które omawia szerzej. W przytaczanych oryginalnych tekstach słowa pogrubione pochodzą z oryginału, natomiast słowa w nawiasach stanowią uzupełnienie autora artykułu, ułatwiające zrozumienie tekstu. Zastosowaną w niektórych zadaniach przez starożytnych metodę *„regula falsi"* można sformułować w następujący sposób: mając równanie liniowe z jedną niewiadomą, przyjmowali najpierw za tę niewiadomą odpowiednio dobraną i dogodną rachunkowo *„fałszywą"* wartość, a następnie przez porównanie otrzymanego wyniku z wynikiem podanym w zadaniu i znalezienie współczynnika proporcjonalności obliczali wartość *„prawdziwą"*. Zdawali sobie sprawę z ogólności stosowanych przez siebie metod, w niektórych bowiem zadaniach papirusu Rhinda znajduje się wskazówka: *„i czyń tak samo z każdym zadaniem jak to"*.

Z tego samego okresu, co tekst papirusa Rhinda, a więc z XVIII wieku a.Ch.n., pochodzą także liczne babilońskie tabliczki klinowe, wykazujące wyraźne ślady stosowania tej samej metody *„regula falsi"*.

Matematyka grecka była zdominowana przez geometrię, ale i w niej, a ściślej u Diofantosa, znajdujemy metodę *„regula falsi"*.

Pewna odmiana metody *„regula falsi"* pojawia się także w matematyce chińskiej za czasów dynastii Han. Świadczy o tym pochodzące prawdopodobnie z II wieku a.Ch.n. jedno z najstarszych dzieł matematycznych Chin, składające się z siedmiu rozdziałów i obejmujące 246 zadań z rozwiązaniami. Rozdział VII tego dzieła nosi tytuł *„Yong buzu"*, czyli *„nadmiar – niedomiar"* i jest poświęcony rozwiązywaniu zadań za pomocą metody, której podstawowa idea jest taka sama jak w metodzie *„regula falsi"*. W chińskim traktacie stosuje się ona mianowicie do rozwiązywania równań (najczęściej liniowych, najprostszej postaci ax=c) i polega na tym, że przyjmowane są dwa fałszywe rozwiązania, na podstawie których oblicza się prawdziwe.

Poświęcenie tej metodzie całego rozdziału i 19 w nim zadań może świadczyć o znaczeniu, jakie autor jej przypisywał, biorąc zaś pod uwagę brak żywszych kontaktów cywilizacji chińskiej ze światem zewnętrznym, opisana w tym rozdziale metoda (na 19 przykładowych zadaniach) była zapewne osiągnięciem niezależnym. Później Fibonacci nazwał ją regułą dwóch fałszywych pozycji.

Poczynając od IX wieku regułę dwóch fałszywych pozycji znajdujemy u Arabów, a w XII wieku u Bhaskara w Indiach w jego *„Lilavati"*. Arabowie nazwali tę metodę *„regułą dwóch fałszów"* i od nich poznali ją Europejczycy. Jednym z pierwszych był Leonardo Fibonacci a następnie Luca Pacioli. Termin ten utrzymywał się do XVI wieku. W swojej książce *„Liber abaci"* Fibonacci podjął pierwszą próbę ogólnego sformułowania metody fałszywej pozycji. W starożytności i później, jak o tym świadczą dawniejsze teksty, metodę przyswajano sobie drogą przerabiania dużej ilości zadań. Fibonacci dokonał zasadniczej zmiany pod tym względem, polegającą na podaniu ogólnego sformułowania i objaśniającego je przykładu. Był to nowy rodzaj dydaktyki, dobrze zresztą współgrający z charakterystycznym dla matematyki europejskiej dążeniem do ogólności.

„Regula falsi" oraz jej odmiana długo służyły matematykom do rozwiązywania różnych zadań. Przykładem są zadania Clawiusa z 1583r. Podręcznik ten traktuje o rachowaniu na liczbach całkowitych i ułamkach, często z użyciem jednej z tych reguł, prostej lub złożonej.

W XVI wieku ciągle jeszcze nie było notacji algebraicznej i Clawius posługiwał się opisem słownym, zarówno w sformułowaniu zadania, jak i późniejszego postępowania, wspierając się czytelnymi tylko dla wtajemniczonych rysunkami, pozbawionymi zresztą ogólniejszej wartości.

Wiek XVII przyniósł już przełom (geometria Kartezjusza, rachunek różniczkowy i całkowy Newtona i Leibniza), po którym matematyka rozwinęła się tak dynamicznie, że wiele z tych wcześniejszych metod odeszło w niepamięć. *„Regula falsi"* broniła się jednak długo, bo w podręcznikach szkolnych można ją było spotkać jeszcze całkiem niedawno.

Z uwagi na obszerność materiału pozwalającego zrozumieć metody rozwiązywania przykładowych zadań podanych przez autora artykułu, nie cytowałam ich treści. Zainteresowanym koleżankom i kolegom polecam w/w artykuł, który przedstawia metody, tok myślenia starożytnych w rozwiązywaniu prostych równań liniowych jak również układów dwóch i trzech równań odpowiednio z dwoma i trzema niewiadomymi z dodatkowym elementem postępu arytmetycznego. Ten bardzo ciekawy artykuł w pewnych momentach wprowadza duży uśmiech, zaskoczenie i podziw.

Na zakończenie jako ciekawostkę zacytuję treść zadania oznaczonego CCVII, 19 z matematyki chińskiej za czasów dynastii Han, w którym mamy do czynienia z postępami arytmetycznymi, co rzuca ciekawe historyczne światło na to pojęcie: cyt.: *„Są dwa konie, jeden mocny, drugi słaby. Oba wyruszają w drogę z Czanganu do Ki, która wynosi 3000 li. Mocny koń przechodzi pierwszego dnia 193 li i każdego następnego dnia zwiększa dystans dzienny o 13 li. Słaby koń przechodzi pierwszego dnia 97 li i każdego następnego dnia zmniejsza dystans dzienny o* $^1/_2$ *li. Mocny koń dochodzi do Ki pierwszy a następnie wraca, by spotkać słabego konia. Ile dni upłynie, nim się spotkają i jaką odległość każdy z nich przejdzie?"*.

Autor artykułu Pan Roman Duda przedstawia tok myślenia i sposób rozwiązania zadania metodą dwóch fałszywych pozycji, której podstawowa idea jest taka sama jak w metodzie „regula falsi".

V. *„Regula falsi"* i metoda Newtona jako metody numeryczne

W tej części pracy korzystając z książki Zenona Fortuny, Bohdana Macukowa i Janusza Wąsowskiego *„Metody numeryczne"* przedstawiłam kilka informacji ogólnych dotyczących w/w zagadnienia. Z uwagi na temat wymagający sporej wiedzy matematycznej i informatycznej skupiłam się wyłącznie na kwestiach będących w zakresie materiału szkoły średniej.

Metody numeryczne są działem matematyki stosowanej. Gwałtowny rozwój techniki obliczeniowej spowodował pojawienie się istnej lawiny metod, umożliwiających rozwiązywanie różnorodnych problemów z dziedziny techniki, medycyny, ekonomii itp. przy użyciu komputerów. Zdecydowana większość bardziej złożonych zagadnień wymaga opracowania indywidualnych metod ich rozwiązywania na komputerze. Niekiedy różnica użytej metody w stosunku do metody standardowej polega na drobnych pozornie zmianach (np. nietypowe operowanie pamięcią operacyjną, zastosowanie przy pewnych pomocniczych obliczeniach tzw. podwójnej precyzji). Zmiany takie mogą przesądzić np. o możliwości rozwiązania danego zagadnienia za pomocą aktualnie dostępnego komputera. Bywają jednak zagadnienia, do których rozwiązania należy opracować nową metodę. Powyższe względy powodują, iż stosowanie metod numerycznych w niezbędnym zakresie jest pewnego rodzaju sztuką, wymagającą dużej wprawy (znajomością podstawowych działów matematyki jak algebra, teoria funkcji, rachunek różniczkowy i całkowy), a ponadto do właściwego zrozumienia istoty algorytmów postępowania, umiejętność programowania w języku Pascal (lub Fortran). Rewolucja w sprzęcie komputerowym oraz dostępnym oprogramowaniu ostatnich latach spowodowała, iż obecnie programuje się w zdecydowanej większości w języku Pascal. Przy obliczeniach wykonywanych na maszynach cyfrowych bardzo ważnym elementem są występujące błędy: danych wejściowych, obcięcia i zaokrągleń. Błędy danych wejściowych występują, gdy dane liczbowe wprowadzane do pamięci maszyny cyfrowej odbiegają od dokładnych wartości tych danych, np. gdy dane wejściowe są wynikiem pomiarów wielkości fizycznych, mierzonych z pewnymi błędami pomiarów. Błędy obcięcia powstają podczas obliczeń na skutek zmniejszania liczby działań np. zastąpienie wartości pochodnej funkcji jej ilorazem różnicowym. W trakcie obliczeń pojawiają się błędy zaokrągleń, których na ogół nie da się uniknąć, chociaż można je zmniejszyć ustalając umiejętnie sposób i kolejność wykonywanych działań. Działami metod numerycznych są np. metody interpolacyjne i aproksymacyjne, metody rozwiązywania równań liniowych i nieliniowych oraz ich układów (wśród nich metoda *„regula falsi"*, metoda Newtona) oraz inne bardziej wyspecjalizowane, wymagające już bardzo obszernej wiedzy matematycznej.

W swoich książkach Panowie Włodzimierz Wrona i Zenon Fortuna, Bohdan Macukow, Janusz Wąsowski przedstawiają najprostszą z metod przybliżonego rozwiązywania równań z jedną niewiadomą nazwaną *„metodą połowienia"* lub *„metodą równego podziału"* albo *„metodą bisekcji"*.

Mamy dane równania f(x)=0, przy czym o funkcji f(x) zakładamy, że jest ciągła na przedziale domkniętym [a,b], wewnątrz którego znajduje się dokładnie jeden pierwiastek i na którego końcach wartości funkcji f(x) mają przeciwne znaki ($f(a)\cdot f(b)< 0$). Zadanie polega na znalezieniu przybliżonej wartości pierwiastka równania f(x)=0.

Aby go znaleźć, dzielimy przedział [a,b] na połowy punktem $x_1=\frac{b+a}{2}$

Jeżeli $f(x_1)=0$, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem, jeśli zaś $f(x_1)\neq 0$, to z otrzymanych dwóch przedziałów $[a,x_1]$ i $[x_1,b]$ wybieramy ten, na końcach którego funkcja f(x) ma przeciwne znaki. Z kolei ten przedział dzielimy na dwie połowy, ponownie badamy wartość funkcji f(x) w punkcie x_2 i znaki funkcji f(x) na końcach otrzymanych przedziałów itd. W wyniku takiego postępowania po pewnej liczbie kroków albo otrzymamy pierwiastek dokładny $f(x_n)=0$, albo ciąg przedziałów takich, że $f(x_i)\cdot f(x_{i+1})< 0$, przy czym x_i oraz x_{i+1} są odpowiednio początkiem i końcem i tego przedziału, a jego długość:

$$|x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{2^i}(b-a)$$

Ponieważ lewe końce ciągu przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry, a prawe końce ciąg nierosnący i ograniczony z dołu, więc z powyższej zależności wynika, że istnieje ich wspólna granica g.

Podstawową zaletą metody połowienia oprócz jej dużej prostoty jest pewność, że w każdym kolejnym kroku szukany pierwiastek leży między dwiema wartościami zmiennej x, w których funkcja f(x) zmienia znak. Wielokrotne powtarzanie obliczeń musi doprowadzić zatem do uzyskania wyniku z żądaną dokładnością.

W pozostałych metodach przybliżonego rozwiązywania równań sprawa dokładności otrzymanych przybliżeń nie jest tak oczywista, a jej określenie jest znacznie trudniejsze.

Na zakończenie tej części pracy chcę przedstawić przykładowo, wyłącznie w celu poglądowym jak przedstawia się tekst programu obliczania przybliżonej wartości pierwiastka równania f(x)= 0 z zastosowaniem metody Newtona.

Znanym przykładem zastosowania tej metody jest algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego. Pierwiastek kwadratowy z liczby dodatniej c jest dodatnim pierwiastkiem równania $x^2-c=0$

Tekst programu:

```
PROCEDURE NEWTON(VAR x:real; eps:real; n:integer; VAR err:byte);
VAR t,fx,fxx,dx,delta: real;
                       i: integer;
BEGIN
   err:=0;
   F(x,fx,fxx);
{ poczatek procedury iteracyjnej }
FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   IF fx = 0 THEN EXIT;
   IF (ABS(fxx) - 1.E-6) < = 0 THEN
      BEGIN
      err := 2;
      EXIT;
      END;
   dx := fx/fxx;
   t := x;


    x := x - dx;
    F(x,fx,fxx);
{ badanie dokladnosci }
    delta := ABS(x - t);
    IF ABS(x) > 1 THEN delta := delta/ABS(x);
    IF ABS(delta) <= eps THEN
    IF ABS(fx) <= 100*eps THEN EXIT;
    END;
err := 1;
END;
```

VI. Rozwiązanie przykładowego zadania

W tej części pracy w ramach ćwiczeń, przedstawię proponowane do rozwiązania zadanie przez Pana Włodzimierza Wronę w swojej książce *„Matematyka – część I"*. Wybrałam to zadanie, ponieważ dotyczy wielomianu o najwyższym stopniu spośród zadań proponowanych przez autora.

Przedstawię rozwiązanie zadania:

A. Metodą *„regula falsi"*,
B. Metodą Newtona,
C. Metodą zestawiającą obie w/w metody.

Treść zadania:

Obliczyć leżący między 0 i 1 pierwiastek równania: $x^7-2x^5-10x^2+1=0$

Oznaczmy $f(x)=x^7-2x^5-10x^2+1$
Sporządźmy tabelę wartości tej funkcji.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-14495	-1790	-103	-8	1	-10	25	1612	14177

1. Z twierdzenia wiemy, że wielomiany są funkcjami ciągłymi, a więc pierwszy warunek jest spełniony. Funkcja w przedziale [0,1] jest ciągła.

2. Warunek $f(a)f(b)<0$ jest spełniony w przedziale [0,1] (na końcach przedziału, wartości funkcji mają przeciwne znaki). Zauważmy, że warunek ten spełniony jest również na przedziale [-1,0] i [1.2].

3. Z powyższego warunku wynika, że nasza funkcja w tych przedziałach ma przynajmniej jedno miejsce zerowe, tzn. nasze równanie ma przynajmniej jeden pierwiastek.

4. Pierwsza pochodna naszej funkcji $f'(x)= 7x^6-10x^4-20x$. Na końcach naszego przedziału [0,1] wartość $f'(x)$ wynosi: $f'(0)=0$, $f'(1)= -23< 0$, więc w całym przedziale $f'(x)< 0$.

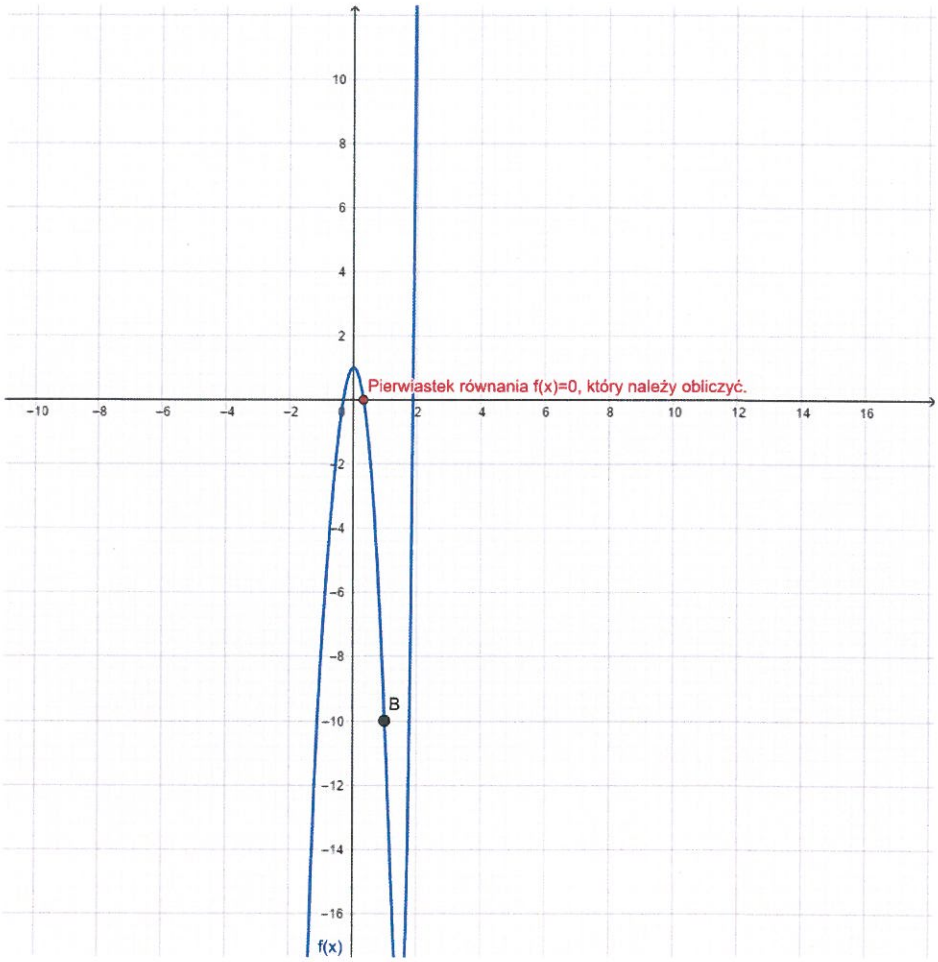
5. Jeżeli $f'(x)< 0$ to nasza funkcja w przedziale [0,1] jest malejąca.

6. Jeżeli jest malejąca tzn., że w naszym przedziale [0,1] przetnie oś 0X tylko jeden raz (będzie miała jedno miejsce zerowe), a to oznacza, że nasze równanie w tym punkcie będzie miało jeden pierwiastek.

7. Druga pochodna naszej funkcji $f''(x)=42x^5-40x^3-20$. Na końcach naszego przedziału [0,1] przyjmuje wartości: $f''(0)= -20< 0$, $f''(1)= -18< 0$, więc w całym przedziale $f''(x)< 0$.

8. Jeżeli $f''(x)< 0$ w naszym przedziale [0,1], to wykres funkcji jest w tym przedziale krzywą wypukłą od góry.

Powyższe warunki i założenia ilustruje poniższy rysunek.



9. W naszym zadaniu f'(x)< 0 oraz f''(x)< 0, krzywa jest wypukła od góry, więc znajduje się powyżej cięciwy AB, a ponieważ f(a)> 0, zatem w kolejnych przybliżeniach w metodzie *„regula falsi"* punkt B pozostaje nieruchomy. Wszystkie kolejne cięciwy będą przechodziły przez ten punkt.

10. Nasza funkcja f(x) jest klasy C^2 na przedziale [0,1]. Ma dwie ciągłe pochodne w tym przedziale.

11. Pierwsza i druga pochodna mają stały znak w tym przedziale.

12. W metodzie Newtona przez x_0 oznaczamy ten z końców naszego przedziału [a,b]=[0,1], w którym zgodnie z twierdzeniem funkcja f(x) ma znak zgodny ze znakiem jej drugiej pochodnej. Ponieważ f''(x)< 0 oraz wartość funkcji f(x) jest w tym punkcie również mniejsza od 0, (f(b)=f(1)= -10), więc jako x_0 przyjmujemy wartość równą b (b_0=1). Ciąg kolejnych przybliżeń (x_n) jest malejący.

13. Dla przejrzystości tekstu kolejne przybliżenia w metodzie *„regula falsi"* oznaczyłam jako x_{nF}, a w metodzie Newtona x_{nN} , gdzie $n \in N$.

14. W rozwiązaniach zadania, aby nie rozbudowywać ich objętości prostymi przeliczeniami podałam końcowe ich wyniki.

A. Metoda *„regula falsi"*

$f(x) = x^7-2x^5-10x^2+1=0$ $\qquad$ $x_{0F} = a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

1. Mamy przedział [a,b] = [0,1]

a=0, b=1, f(a)=1, f(b)= -10
x_{0F} = 0,09(09)

Mamy przedziały [0; 0,09(09)], [0,09(09); 1]. Dla ułatwienia obliczeń weźmy przedziały [0; 0,01], [0,1; 1]f(0,1)=0,9 >0, f(1)= -10< 0

a więc pierwiastek znajduje się w przedziale [0,1; 1]

2. Mamy x_{0F}= 0,1; b=1; $f(x_{0F})$ = f(0,1) = 0,9; f(b)= f(1)= -10

$x_{1F} = x_{0F} - f(x_{0F})\frac{b-x_{0F}}{f(b)-f(x_{0F})}$; $\underline{x_{1F}}$ = 0,17431; $f(x_{1F})$ = f(0,17431)= 0,69588 >0; f(b) = -10< 0
a więc pierwiastek będzie w przedziale [0,17431; 1]

W dalszej kolejności stosując powyższą metodę możemy obliczać kolejne przybliżenia pierwiastka x_{2F}, x_{3F},..., x_{nF} do momentu uzyskania wyniku z żądaną dokładnością.

Pan Eustachy Tarnawski w swojej książce pisze, że porównując wartości funkcji w punktach skrajnych przedziału, można łatwo dostrzec, do którego z tych punktów będzie bardziej zbliżony szukany pierwiastek równania. W wyniku takiej analizy zmniejszamy ilość dokonywanych obliczeń, a tym samym zwiększamy szybkość uzyskania żądanego rozwiązania zadania tą metodą. W naszym przypadku pierwiastek równania 0,17431< x_F < 1. Skoro f(0,17431)= 0,69588, a f(1)= -10, więc szukany pierwiastek x_F leży bliżej wartości 0,17431.

3. W związku z powyższym w obliczeniu kolejnego przybliżenia pierwiastka przyjmijmy przedział [0,3; 0.4].

Mamy teraz a = 0.3; b = 0,4; f(a) = 0,09536; f(b) = -0,61884
f(a) = f(0,3) = 0,09536 >0; f(b) = f(0,4) = -0,61884< 0

a więc pierwiastek faktycznie będzie znajdował się w przedziale [0,3, 0,4]

$x_{2F} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$; x_{2F} = 0,31334

4. Przyjmijmy kolejny przedział jako [0,31; 0,32]

Mamy a=0,31; b = 0,32; f(a)= 0,033(5); f(b) = -0,03036
f(a)= f(0,31) = 0,033(5) >0; f(b)= f(0,32) = -0,03036< 0

więc pierwiastek równania będzie znajdował się w przedziale [0,31; 0,32]

$x_{3F} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = 0{,}31525$

5. Przyjmijmy kolejny przedział jako [0,31525; 0,31530]

Mamy a= 0,31525; b= 0,31530, f(a)= 0,00029, f(b)= -0,0000625

f(a)= f(0,31525)= 0,00029 >0; f(b)= f(0,31530)= -0,0000625< 0

więc pierwiastek równania znajduje się w przedziale [0,31525; 0,31530]

$x_{4F} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = 0{,}31529$; f(0,31529)= 0,0000015

Pierwiastek równania wynosi 0,31529

Zauważmy, że:
1. Po kolejnych przybliżeniach otrzymaliśmy wartości:
$x_{0F} = 0{,}09(09)$; $x_{1F} = 0{,}17431$; $x_{2F} = 0{,}31334$; $x_{3F} = 0{,}31525$; $x_{4F} = 0{,}31529$

Ciąg (x_{0F}, x_{1F}, x_{2F}, x_{3F}, x_{4F}) jest ciągiem rosnącym, zgodnie z zależnością przedstawioną w części III pracy cyt. *„Gdy $f'(x)\cdot f''(x) > 0$ dla $x \in [a,b]$, wtedy (x_n) jest ciągiem rosnącym"*

2. Przy obliczaniu drugiego przybliżenia skorzystaliśmy z założenia Pana Eustachego Tarnawskiego. Przyspieszyliśmy zbieżność ciągu (x_{nF}) do wartości pierwiastka równania z $x_{1F} = 0{,}17431$ do $x_{2F}= 0{,}31334$.

Nie korzystając z tego założenia ilość kroków przybliżeń byłaby większa.

Od przybliżenia x_{2F} do x_{4F} nie korzystaliśmy z zawężania przedziału [a,b]. Zbieżność ciągu (x_{nF}) – od x_{2F} do x_{4F} (do rozwiązania zadania) uległa spowolnieniu.

B. Metoda Newtona

$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f\prime(x_0)}$ $f(x)=x^7-2x^5-10x^2+1=0$ $f'(x)=7x^6-10x^4-20x$ $f''(x)=42x^5-40x^3-20$

$f'(0)=0$ $f''(0)=-20;$ $f'(1)=-23;$ $f''(1)=-18$

Więc $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ w naszym rozważanym przedziale $[a,b]=[0,1]$.

W zadaniu jako punkt x_0 przyjmujemy zgodnie z twierdzeniem ten z końców przedziału [a,b], w którym funkcja f(x) ma znak zgodny ze znakiem jej drugiej pochodnej. Druga pochodna $f''(x)<0$ w przedziale [a,b], nasza funkcja f(x) ma wartość ujemną w punkcie b, a więc nasze $x_0=1$. Ciąg (x_{nN}) zgodnie z tym twierdzeniem będzie ciągiem malejącym.

W związku z powyższym pierwsze przybliżenie wynosi:

1. $x_{1N}=b-\frac{f(b)}{f'(b)}=0{,}56522;\ f(b)=f(1)=-10;\ f'(b)=f'(1)=-23$

2. Przyjmijmy $x_{1N}=0{,}56$

$x_{2N}=x_{1N}-\frac{f(x_{1N})}{f\prime(x_{1N})}=0{,}37376;\ f(x_{1N})=f(0{,}56)=-2{,}22887;\ f'(x_{1N})=f'(0{,}56=-11{,}96752$

3. Przyjmijmy $x_{2N}=0{,}37$

$x_{3N}=x_{2N}-\frac{f(x_{2N})}{f\prime(x_{2N})}=0{,}31954;\ f(x_{2N})=f(0{,}37)=-0{,}38195;\ f'(x_{2N})=f'(0{,}37)=-7{,}56948$

4. Przyjmijmy $x_{3N}=0{,}319$

$x_{4N}=x_{3N}-\frac{f(x_{3N})}{f\prime(x_{3N})}=0{,}31531;\ f(x_{3N})=f(0{,}319)=-0{,}02387;\ f'(x_{3N})=f'(0{,}319)=-6{,}4765$

5. Przyjmijmy $x_{4N}=0{,}31531$

$x_{5N}=x_{4N}-\frac{f(x_{4N})}{f\prime(x_{4N})}=0{,}31529;\ f(x_{4N})=f(0{,}31531)=-0{,}00013;\ f'(x_{4N})=f'(0{,}31531)=-6{,}39814$

$f(0{,}31529)=0{,}0000015$

Pierwiastek równania wynosi 0,31529

C. Metoda zestawiająca obie metody

$f(x)=x^7-2x^5-10x^2+1=0$ $\quad$ $f'(x)=7x^6-10x^4-20x$ $\quad$ $f''(x)=42x^5-40x^3-20$

$x_{0F} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ $\quad$ $x_{n+1F} = x_n - f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}$ $\quad$ (x_{nF}) jest ciągiem rosnącym

$x_{0N} = b - \frac{f(b)}{f\prime(b)}$ $\quad$ $x_{n+1N} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$ $\quad$ (x_{nN}) jest ciągiem malejącym

1. Mamy przedział [a,b]= [0,1], $f'(x)< 0$, $f''(x)< 0$, $f'(x)f''(x) >0$,

$$a=0;\ b=1;\ f(a)=1;\ f(b)= -10;\ x_{0F}=0{,}09(09);\ x_{0N}=0{,}56522;\ f'(b)= -23$$

2. Przyjmijmy dla ułatwienia $x_{0F}=0{,}1$; $x_{0N}=0{,}5$. Mamy przedział $[x_{0F}, x_{0N}]=[0{,}1;0{,}5]$

$$x_{1F} = x_{0F} - f(x_{0F})\frac{x_{0N}-x_{0F}}{f(x_{0N})-f(x_{0F})},\ f(x_{0F})=f(0{,}1)=0{,}89998=0{,}9 >0;$$

$$f(x_{0N})=f(0{,}5)= -1{,}44531\approx -1{,}44<0$$

$x_{1F}=0{,}25385$. Przyjmijmy $x_{1F}= 0{,}26$, $x_{1N}=x_{0N} - \frac{f(x_{0N})}{f'(x_{0N})} =0{,}36306.$; $f'(x_{0N})= f'(0{,}5)= -10{,}51566$

3. Mamy teraz przedział $[x_{1F}, x_{1N}]= [0{,}25385;\ 0{,}36306]$

$$x_{2F}=x_{1F} - f(x_{1F})\frac{x_{1N}-x_{1F}}{f(x_{1N})-f(x_{1F})},\ f(x_{1F}) = f(0{,}26) = 0{,}3217 >0;\ f(x_{1N}) =f(0{,}35) = -0{,}23486< 0$$

$$x_{2F} = 0{,}31202,\ x_{2N} = x_{1N} - \frac{f(x_{1N})}{f\prime(x_{1N})} = 0{,}31709;\ f'(x_{1N}) = f'(0{,}35) = -7{,}13712$$

4. Mamy przedział $[x_{2F}, x_{2N}]= [0{,}31202;\ 0{,}31709]$

$$x_{3F}=x_{2F} - f(x_{2F})\frac{x_{2N}-x_{2F}}{f(x_{2N})-f(x_{2F})},\ f(x_{2F}) = f(0{,}31202) =0{,}02087 >0;$$

$$f(x_{2N}) = f(0{,}31709) = -0{,}01158<0$$

$$x_{3F} = 0{,}31528,\ x_{3N} = x_{2N} - \frac{f(x_{2N})}{f'(x_{2N})} = 0{,}31529,\ f'(x_{2N}) = f'(0{,}31709) = -6{,}43569$$

$f(0{,}31529)= 0{,}0000015$

Pierwiastek równania wynosi 0,31529

W każdej z 3 zastosowanych metod uzyskaliśmy ten sam wynik.

Odpowiedź do zadania:

Pierwiastek równania $x^7-2x^5-10x^2+1=0$ w przedziale między 0 i 1 wynosi **0,31529**.

Prawidłowość uzyskanego rozwiązania zadania sprawdzimy obliczając wartość funkcji $f(x)= x^7-2x^5-10x^2+1$ w tym punkcie:

$$\mathbf{f(0{,}31529) = 0{,}0000015}$$

VII. Podsumowanie i wnioski

1. Pan Włodzimierz Wrona w swojej książce *„Matematyka – część I"* zadał dwa pytania, na które czytelnik w ramach ćwiczeń ma udzielić odpowiedzi:

a) Czy dla rozwiązania równania f(x)=0 metodą *„regula falsi"* konieczne jest istnienie pierwszej pochodnej funkcji f(x)? Dlaczego badamy znak pierwszej pochodnej w odpowiednim przedziale?

b) Czy z tego, że f''(x) >0 w [a,b] wynika już, że f'(x) jest stałego znaku w [a,b]?

Ad a) Moja odpowiedź jest przecząca – nie jest konieczne.

W metodzie *„regula falsi"* koniecznymi założeniami są, aby funkcja f(x) w przedziale [a,b] była: określona, ciągła, monotoniczna i na krańcach przedziału [a,b] przyjmowała wartości różnych znaków (f(a)· f(b)< 0).

Znak pierwszej pochodnej w odpowiednim przedziale badamy w następujących celach:

- ustalenia, czy w rozpatrywanym przedziale [a,b] równanie posiada tylko jeden pierwiastek,

- ustalenia, czy krzywa jest wypukła od góry, czy od dołu (to ustalenie dokonuje się wspólnie z określeniem znaku drugiej pochodnej),

- ustalenia w metodzie *„regula falsi"*, który z punktów A czy B pozostaje nieruchomy (to ustalenie dokonuje się wspólnie z określeniem znaku wartości funkcji w tym punkcie oraz znaku jej drugiej pochodnej),

- oszacowania błędu uzyskiwanych przybliżeń.

Ad b) Moja odpowiedz jest przecząca – nie wynika.

Zadane pytanie należy rozpatrzyć w dwóch przypadkach:
- jeżeli f''(x) >0 w [a,b] => f'(x) >0 w [a,b] lub jeżeli f''(x) >0 w [a,b] => f'(x)< 0 w [a,b].

Mamy więc wykazać, że <u>może</u> zaistnieć następujący przypadek:
- jeżeli f''(x) >0 w [a,b] => f'(x) >0 i f'(x)< 0 w [a,b].

Potwierdzenie takiej sytuacji przedstawię na prostym przykładzie równania f(x)=0.

Niech $f(x)=x^2$

Miejscem zerowym tej funkcji jest $x_0=0$

Pierwiastek równania $x^2=0$ wynosi 0

f'(x) =2x; f''(x) =2

Przyjmijmy, że rozpatrujemy przedział [a,b] =[1,-1], w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji $f(x)= x^2$ i zarazem pierwiastek równania $x^2= 0$.

Druga pochodna funkcji f'(x)= 2 jest w przedziale [a,b]>0.

Pierwsza pochodna funkcji f'(x) w przedziale [-1,0] jest < 0, a w przedziale [0,1] >0.

2. Analizując rozwiązania przykładowego zadania trzema metodami stwierdzam, że zbieżność do wartości pierwiastka równania z żądaną dokładnością w metodzie *„regula falsi"* jest najwolniejsza. Najszybszą zbieżność i zarazem wynik zadania uzyskaliśmy w metodzie zestawiającej metodę *„regula falsi"* i metodę Newtona.

3. Zauważmy, że w praktyce rozwiązanie zadania polegającego na obliczeniu pierwiastka równania f(x)=0 metodami przybliżonymi *„regula falsi"* i Newtona, nie stanowi większego problemu. Na podstawie np. wykresu funkcji, tabelki wartości funkcji lub przekształcania do równoważnej postaci, wyznaczamy przedział, w którym znajduje się pierwiastek równania. Następnie korzystając z jednego wzoru wynikającego z równania siecznej (w metodzie *„regula falsi"*) oraz równania stycznej (w metodzie Newtona), podczas kolejnych iteracji poprawiamy przybliżenie pierwiastka. Obliczenia kończymy, jeżeli uzyskamy wartość pierwiastka z satysfakcjonującą nas dokładnością. Zadanie więc można rozwiązać w tzw. *„sposób mechaniczny"*. Nie w tym jest jednak cel i sens. Matematyka jest nauką, która nie opiera się na *„mechanicznym sposobie myślenia"*, lecz na pełnym zrozumienia tematu od początku do końca, nie ma mowy o żadnych tzw. *„brakach wiedzy"* w etapach pośrednich.

4. Temat pracy wykracza co prawda poza zakres nauczania matematyki w szkole średniej. Powody wyboru wyjaśniłam w części wstępnej. Zarówno w matematyce jak i innych dziedzinach nauki poruszane są zagadnienia, które w początkowej fazie przerażają skalą trudności w ich zrozumieniu. Jednak po większym skupieniu i ponownej analizie okazuje się, że praktycznie zdecydowana większość pojęć i określeń jest nam znana z nauki w szkole lub jest kwestią przypomnienia materiału z lat wcześniejszych. Taka sytuacja miała miejsce w moim przypadku. W efekcie stwierdziłam, że *„nie taki diabeł straszny"*. A takich zagadnień w matematyce i tematów prac godnych zainteresowania i zaprezentowania jest jeszcze mnóstwo.

5. Praca w swojej treści jest obszerna. Najwięcej informacji poświęciłam na przypomnieniu pojęć i określeń niezbędnych do zrozumienia zagadnienia. Tylko takie rozwiązanie według mnie gwarantuje osiągnięcie zamierzonych celów:

- skumulować wszystkie niezbędne informacje w jednym opracowaniu (uniknąć konieczności korzystania z 16 pozycji literaturowych),

- uniknąć *„mechanicznego toku myślenia"*,

- skierować pracę do koleżanek i kolegów, nie tylko tych, którzy interesują się matematyką, ale również takich, którzy chociaż w pewnym stopniu *„czują sympatię do tej nauki"*.

Literatura

1. Włodzimierz Wrona *„Matematyka – Podstawowy wykład politechniczny – część I"*, PWN, Warszawa 1965.

2. Włodzimierz Wrona *„Matematyka – Funkcje, granice i pochodne – część II"*, PWN, Łódź-Warszawa 1962.

3. Zenon Fortuna, Bohdan Macukow, Janusz Wąsowski – *„Metody numeryczne"*, PWN SA, Warszawa 2017.

4. Eustachy Tarnawski - *„Matematyka dla studiów technicznych"*, PWN, Warszawa 1977.

5. I. Dziubiński, T. Świątkowski - *„Poradnik matematyczny"*, PWN, Warszawa 1980.

6. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew - *„Matematyka – Poradnik encyklopedyczny – część 1-4"*, PWN, Warszawa 1986.

7. Antoni Chronowski, Henryk Kąkol, Zbigniew Powązka - *„Granica i ciągłość funkcji"*, Wydawnictwo *Dla szkoły*, Bielsko-Biała 1998.

8. Henryk Kąkol, Zbigniew Powązka - *„Pojęcie funkcji – część 1"*, Wydawnictwo *Dla szkoły*, Bielsko-Biała 1994.

9. Aniela Ehrenfeucht, Olga Stande - *„Algebra dla klasy II Liceum Ogólnokształcącego"*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1983.

10. Maria Potępa - *„Kurs przygotowawczy na studia techniczne – Liczby rzeczywiste, funkcje, funkcje liniowe, wektory, prosta – Zeszyt 1."*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Kraków 2017.

11. Magdalena Sękowska - *„Kurs przygotowawczy na studia techniczne – Funkcje kwadratowe, wielomiany – Zeszyt 2"*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Kraków 2017.

12. Janina Niedoba - *„Kurs przygotowawczy na studia techniczne – Ciągi, granica i ciągłość funkcji – Zeszyt 5"*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Kraków 2017.

13. Jadwiga Jegier - *„Kurs przygotowawczy na studia techniczne – Pochodna i jej zastosowania – Zeszyt 6"*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Kraków 2017.

14. Andrzej Szlachtowski - *„Kurs przygotowawczy na studia techniczne – Geometria analityczna na płaszczyźnie – Zeszyt 10"*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Kraków 2017.

15. Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda - *„Matematyka – Podręcznik do liceów i techników – klasa 3 – zakres rozszerzony"*, Oficyna Edukacyjna *Krzysztof Pazdro* Sp. z.o.o., Warszawa 2015.

16. Roman Duda - *„Regula falsi przez wieki"*, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego.