Andrzej Ubik

klasa VI, Szkoła Podstawowa nr 41 im. Jana Kochanowskiego w Krakowie

A czemu nie?!

Opiekun pracy: Martha Łącka

Kraków, luty 2017

Spis treści

Wstęp

Inspiracją do pracy był dla mnie paradoks Monty'ego Halla, którego opis znajdą Państwo w pierwszym teleturnieju. Dotyczy on pewnego programu telewizyjnego. Postanowiłem poszukać innych ciekawych problemów matematycznych w teleturniejach. Jeśli weźmiemy udział w którymś z opisanych programów, to być może więcej wygramy. Omówiłem teleturnieje *Idź na całość!*, *Grasz czy nie grasz?*, *Koło Fortuny* oraz *Duety do mety!*.

Czytelnikowi życzę miłego zagłębiania się w lekturę!

I. Idź na całość!

Bramka nr 1: Zonk

Bramka nr 2: Zonk

Bramka nr 3: Samochód

Uczestniczymy w teleturnieju *Idź na całość!*. Możemy wygrać samochód lub Zonka, czyli maskotkę kota. Na początku gry są przed nami trzy zasłonięte bramki. W jednej z nich jest samochód, a w dwóch pozostałych Zonk. Naszą nagrodą jest to, co znajduje się w bramce, którą wybierzemy.

Załóżmy, że wybraliśmy bramkę nr 3. Następnie prowadzący odsłaniał bramkę nr 2, w której jest Zonk i zapytał, czy pozostajemy przy swoim wyborze. Zastanawiamy się, czy warto zmienić bramkę. Szansa wygranej za pierwszym razem (to znaczy na początku gry, gdy żadna bramka nie była odsłonięta) wynosiła 1:3. Zatem z takim właśnie prawdopodobieństwem wygramy, jeśli nie zmienimy swojego wyboru. Szansa wygranej po zmianie bramki, to prawdopodobieństwo, że na początku samochód znajdował się w którejś z bramek przez nas niewybranych. Jest ona zatem równa 2:3. Oznacza to, że po zmianie bramki nasze prawdopodobieństwo wygranej rośnie, więc opłaca nam się zmienić wybór!

Zauważmy jednak, że w naszym przypadku po zmianie decyzji stracilibyśmy samochód.

Wyżej opisane zjawisko nosi nazwę paradoksu Monty'ego Halla.

II. Grasz czy nie grasz?

W teleturnieju *Grasz czy nie grasz?* stajemy przed problematyką walizek.
Przed nami znajduje się dwadzieścia sześć walizek. W jednej z nich jest 1 grosz, w jednej 2 miliony złotych, a w pozostałych różne kwoty od 20 groszy do 500 000 złotych.

Na początku mamy wybrać jedną walizkę. Spośród pozostałych wybieramy kolejno te, które chcemy otworzyć. W dowolnym momencie gry może zadzwonić bankier i zaproponować odkupienie walizki za zaproponowaną przez niego kwotę.

Do analizy tego teleturnieju przyda nam się pojęcie *wartości oczekiwanej.*
Wartość oczekiwana to średnia wygrana w grze.
Obliczamy ją ze wzoru:

$$m=p_1 x_1+p_2 x_2+\ldots+p_k x_k, \qquad (1)$$

gdzie m to watrość oczekiwana, p_1 to prawdopodobieństwo, że wygramy x_1, p_2 to prawdopodobieństwo, że wygramy x_2, ..., p_k – prawdopodobieństwo, że wygramy x_k.

W pewnym odcinku bohaterem był ksiądz. W ostatniej rundzie gry zadzwonił bankier i zaproponował odkupienie walizki za 220 000 złotych. Gracz przyjął jego ofertę. Ksiądz wiedział, że w dwóch walizkach, które jako jedyne nie zostały odsłonięte jest 500 000 złotych oraz 50 000 złotych. Jak się potem okazało, w jego walizce było 50 000 złotych.

Wartość oczekiwana wygranej księdza, gdyby nie przyjął propozycji bankiera, wynosi 275 000 złotych, czyli więcej niż proponował bankier.

Innym razem grała pani Małgorzata. W finale w jednej walizce był 1 grosz a w drugiej 1 000 000 złotych. Zadzwonił bankier i oferował za jej walizkę 400 000 złotych. Pani Małgorzata zgodziła się. Jak się potem okazało w jej walizce był 1 grosz.

Wartość oczekiwana wygranej pani Małgorzaty, gdyby nie przyjęła propozycji bankiera, wynosi 500 000, 005 złotych, czyli znowu więcej niż zaproponował bankier!

Zastanówmy się, co kierowało graczami, skoro zdecydowali się na opcję z mniejszą wartością oczekiwaną wygranej. Myślę, że dokonali oni **mniej ryzykownego** wyboru.

Matematycznym pojęciem mierzącym ryzyko jest *wariancja*.
Wzór na wyliczenie wariancji V to

$$V = p_1(x_1-m)^2 + p_2(x_2-m)^2 + \ldots + p_k(x_k-m)^2,$$

gdzie z prawdopodobieństwem p_1 możemy wygrać x_1, z prawdopodobieństwem p_2 możemy wygrać x_2, …, z prawdopodobieństwem p_k możemy wygrać x_k, a m to wartość oczekiwana w grze. Jeśli wariancja jest duża, to gra jest ryzykowna. Jeśli nie ma żadnego ryzyka, wariancja się zeruje.

Obliczmy teraz wariancje uczestników.

Wariancja Księdza

W naszym przypadku (zakładając, że ksiądz nie przyjmie propozycji bankiera) $k = 2$, $p_1=p_2=1/2$, $x_1=500\ 000$, $x_2=50\ 000$, $m= 275\ 000$.
Wariancja wyniosła 50625000000 (czyli dużo!).

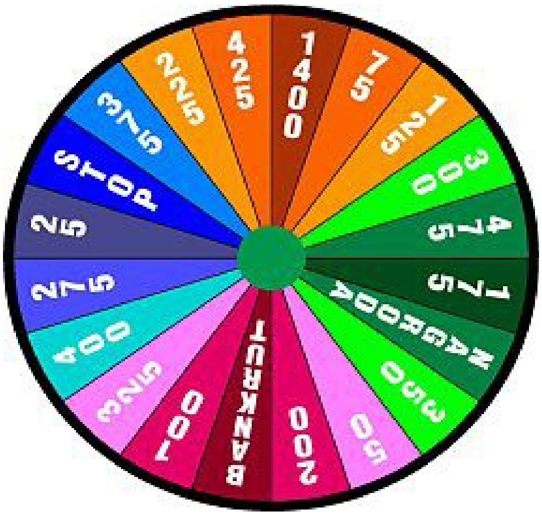
Wariancja księdza przy przyjęciu propozycji bankiera wynosi 0.

Wariancja pani Małgorzaty

W przypadku, gdy pani Małgorzata nie przyjmie propozycji bankiera, mamy:
$k=2$, $p_1=p_2=1/2$, $x_1=1000000$, $x_2=0{,}01$, $m =500000{,}005$.
Wariancja pani Małogorzaty wyniosła 249999995000 (czyli dużo).

Jednak jeśli pani Małgorzata przyjmie propozycję bankiera, to wariancja wyniesie po raz kolejny 0.

Wykazaliśmy zatem, że nasza hipoteza była słuszna – gracze dokonali mniej ryzykownych wyborów.



Rys. Koło Fortuny z lat 1995 - 1998

III. Koło Fortuny

Jak po powyższym obrazku można się domyśleć ten rozdział dotyczy teleturnieju *Koło Fortuny*. Uczestnicząc w nim możemy postawić sobie następując pytanie.
Na kole pól z wygraną pieniężną jest siedemnaście. Są też trzy pola specjalne: bankrut (powodujące, że gracz traci wszystkie pieniądze), nagroda (przyjmuję, że jej wartość to 5 tysięcy złotych) oraz stop, czyli strata kolejki. Po zakręceniu tytułowym Kołem Fortuny gracz miał odgadnąć jedną z liter hasła. Jeśli mu się to udało, to dostawał tyle pieniędzy, ile było na jego polu (chyba że jego pole było specjalne - wtedy się stosował do odpowiedniej reguły). Zastanówmy się, **przy jakiej ilości pieniędzy przestaje nam się opłacać kręcić kołem.** Oczywiście jest to pytanie mocno teoretyczne, gdyż gracz nie miał wyboru, czy chcę dalej kręcić...

Aby na nie odpowiedzieć, skorzystamy ze wzoru (1). W naszym przypadku $k=20$ a $p_1=p_2=...=p_{20}=1/20$. Ponadto:

$x_1=425,$

$x_2=1400,$

$x_3=75,$

$x_4=125,$

$x_5=300,$

$x_6=475,$

$x_7=175,$

x_8=*nagroda (5000),*

$x_9=350,$

$x_{10}=50,$

$x_{11}=200,$

x_{12}= - kwota, którą zarobiliśmy,

$x_{13}=100,$

$x_{14}=325,$

$x_{15}=400,$

$x_{16}=275,$

$x_{17}=25,$

x_{18}= *0 (STOP),*

$x_{19}=375,$

$x_{20}=225.$

Zatem:

$$m= (10300 - \text{kwotę którą zarobiliśmy}): 20$$

Wynika stąd, że *m* jest większe od 0, jeśli zarobiliśmy mniej niż 10 300 złotych.

Zastanówmy się więc, kiedy to nastąpi. Niech m_n oznacza wartość oczekiwaną kwoty, którą mamy po *n*-tym zakręceniu kołem. Wtedy:

$m_1 = (10300-0) : 20= 515$

$m_2=m_1+(10300-m_1):20= 515+(10300-515):20= 1004,25$

$m_3= m_2+(10300-m_2):20= 1004,25+(10300-1004,25):20=1469,0375$

$m_4=m_3+(10300-m_3):20= 1469,0375+(10300-1469,0375):20= 1910,58562$

$m_5= m_4+(10300-m_4):20=1910,58562 +(10300-1910,58562):20=2330,056339$

Zauważyłem że wyniki bardzo wolno rosną i dlatego postanowiełem wesprzeć się programem. Poniżej przedstawiam jego kod.

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<set>
#include<vector>
```

```
#include <limits>
#include<iterator>
#include<algorithm>
using namespace std;


int main() {
 double m;
  m=0;
  int i;
  i=0;
 while(m<10300){m=m+(10300-m)/20; i=i+1; cout<< i<<" "<< m<<" ";}

  return 0;
 }
```

Zauważyłem, że program bardzo długo działa. **Postawiłem hipotezę, że zawsze opłaca się kręcić kołem.** Spróbujmy to udowodnić.

Nie opłaca się kręcić kołem, kiedy mamy więcej pieniędzy niż 10 300 złotych. Oznaczmy przez d_n różnicę pomiędzy 10 300 a wartością oczekiwaną, którą mamy przed *n*-tym zakręceniem kołem. Innymi słowy, $d_n=10300-m_{n-1}$. Jak obliczyć m_n? Nic prostszego: użyjemy wzoru

$$m_n=m_{n-1}+(10300-m_{n-1}):20.$$

Zauważmy, że $d_1=10\ 300.$ Spróbuję teraz wyznaczyć zależność między d_n a d_{n+1}..

$d_{n+1}=10300-m_n$
$d_{n+1} = 10300- (m_{n-1}+(10300-m_{n-1}) : 20)$
$d_{n+1} = 10300-m_{n-1}-10300:20 + m_{n-1} : 20$
$d_{n+1} = 10300 * (1-1:20)-m_{n-1}*(1-1:20)$
$d_{n+1}= 10300* 0,95- m_{n-1}*0,95$
$d_{n+1}= 0,95*(10300-m_{n-1})$
$d_{n+1}= 0,95*d_n$

Skoro d_1 jest dodatnie a d_2 to jest $0,95*d_1$ to d_2 też jest dodatnie...i tak dalej, wreszcie d_{699} też jest dodatnie, ... **Pokazaliśmy, że d_n jest dodatnie dla każdego *n*.**

IV. Duety do mety

W grze brały udział dw duety rywalizujące ze sobą. Właściwie to gra przypominała chińczyka (chociaż plansza była w innym kształcie i każdy duet miał tylko jeden pionek), tylko żeby rzucić kostką należało odpowiedzieć poprawnie na podane pytanie. Jeśli liczba oczek przekroczyła liczbę pól do mety, to należało się cofnąć o ich różnicę (po dojściu do mety), czyli żeby wygrać należało wyrzucić dokładnie taką liczbę oczek, ile pól mamy do mety.

Skłoniło mnie to do rozwiązania następującego problemu: **która z pozycji w grze spośród tych, które dają nam szanse do wygrania w pierwszym ruchu (a więc gdy stoimy 1,2...,6 pól do mety), daje nam szanse na najszybszą wygraną?**

Aby odpowiedzieć na to pytanie, oznaczmy:

m_1 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 1 pole do mety,
m_2 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 2 pola do mety,
m_3 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 3 pola do mety,
m_4 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 4 pola do mety,
m_5 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 5 pól do mety,
m_6 = wartość oczekiwana liczby ruchów do końca gry, kiedy stoimy 6 pól do mety.

Zatem pytanie, które sobie zadałem, można przeformułować jako: *Która spośród liczb $m_1,m_2,...,m_6$ jest najmniejsza?*

Zauważmy, że:

$$m_1= 1/6 *1+1/6 * (1+m_1)+1/6* (1+m_2)+1/6*(1+m_3)+1/6*(1+m_4)+1/6*(1+m_5),$$

$$m_2=1/6*(1+m_1)+1/6*1+1/6*(1+m_1)+1/6*(1+m_2)+1/6*(1+m_3)+1/6*(1+m_4),$$

$$m_3=1/6*(1+m_2)+1/6*(1+m_1)+1/6*1+1/6*(1+m_1)+1/6*(1+m_2)+1/6*(1+m_3),$$

$$m_4=1/6*(1+m_3)+1/6*(1+m_2)+1/6*(1+m_1)+1/6*1+1/6*(1+m_1)+1/6*(1+m_2),$$

$$m_5=1/6*(1+m_4)+1/6*(1+m_3)+1/6*(1+m_2)++1/6*(1+m_1)+1/6*1+1/6*(1+m_1),$$

$$m_6=1/6*(1+m_5)+1/6*(1+m_4)+1/6*(1+m_3)+1/6*(1+m_2)+1/6*(1+m_1)+1/6*1.$$

Z powyższych rachunków wynika że: $m_1=m_6$, $m_2=m_5$ oraz $m_3=m_4$

Oznaczmy: $x_1=m_1=m_6$, $x_2=m_2=m_5$, $x_3=m_3=m_4$.

Wówczas:

$x_1=1/6(6+x_1+2(x_2+x_3))$

$x_2=1/6(6+x_2+2(x_1+x_3))$

$x_3=1/6(6+x_3+2(x_1+x_2))$

Odejmując pierwsze i drugie równanie stronami otrzymujemy że $x_1=x_2$.
Analogicznie, odejmując drugie i trzecie, wnioskujemy, że $x_2=x_3$.
Z powyższych wyników wychodzi nam szokująca rzecz: to, na jakim polu (od 1 do 6) staniemy, nie ma kompletnie żadnego wpływu na wartość oczekiwaną liczby ruchów które zostały do wygranej!

Źródła obrazków:

[**1**] http://vignette4.wikia.nocookie.net/nonsensopedia/images/f/fa/Zonk.jpg/revision/latest?cb=20130801184556 z dnia 10.01.2017 r.

[2] http://www.wykop.pl/tag/blokekipa/ z dnia 10.01.2017 r.

[3] https://pl.wikipedia.org/wiki/Koło_Fortuny_(teleturniej) z dnia 12.01.2017 r.