Niezmienniki i półniezmienniki

Weronika Kołodziejczykyg
V Liceum Ogólnokształcące w Krakowie
Opiekun pracy: dr Jacek Dymel

1 Wprowadzenie

Niniejsza praca jest zbiorem problemów związanych z tematem niezmienników. Metoda ta znajduje zastosowanie w wielu rodzajach zadań, głównie kombinatorycznych.

2 Teoria

Niezmiennik to własność pewnego obiektu (np. liczba, kolor, reszta z dzielenia), która podczas zdefiniowanej operacji nie zmienia się, natomiast półniezmiennik jest własnością, która zmienia się w ściśle określony sposób (np. stale rośnie lub stale maleje) w trakcie wykonywania pewnego procesu. Wiele problemów ma następującą postać:

Znajdujemy się w sytuacji A. Czy po wykonaniu serii określonych ruchów możemy dojść do sytuacji B?

Rozwiązanie takich zadań często polega na znalezieniu niezmiennika lub półniezmiennika i pokazaniu, że wychodząc z wartości w A nie osiągnie on takiej wartości jak w B.

3 Problemy

Problem 3.1 Na stole leży pięć kawałków papieru. Dowolnie wybrany kawałek rozrywamy na cztery części. Proces ten kontynuujemy, tzn. za każdym razem wybieramy jakiś kawałek i rozrywamy go na cztery części. Zastanówmy się, czy w ten sposób, po pewnej liczbie kroków naszego procesu, możemy uzyskać dokładnie 1996 kawałków papieru.

Rozwiązanie: Kluczem do rozwiązania tego zadania jest znalezienie odpowiedniego niezmiennika. Przeanalizujmy najpierw, jak zmienia się liczba kawałków w kolejnych krokach. Liczba kawałków wynosi kolejno: 5, 8, 11, 14, 17, itd. Nietrudno więc dostrzec, że po każdym ruchu liczba kawałków wzrasta o 3., a więc reszta z dzielenia liczby kawałków przez 3 nie zmienia się – otrzymujemy niezmiennik. Liczba 5 daje resztę z dzielenia przez 3 równą 2, natomiast dzieląc liczbę 1996 przez 3 otrzymujemy 1, z czego wynika, że po pewnej liczbie kroków nie możemy uzyskać dokładnie 1996 kawałków papieru.

Problem 3.2 Na tablicy zostało napisanych 10 plusów i 15 minusów. Dozwolony ruch polega na wymazaniu 2 dowolnych znaków i wpisaniu zamiast nich plusa, jeśli były jednakowe lub minusa, w przeciwnym przypadku. Zastanówmy się, jaki znak zostanie na tablicy po wykonaniu dwudziestu czterech takich działań.

Rozwiązanie: Rozpocznijmy od przeanalizowania, jak zmieniają się znaki po wykonaniu kolejnych kroków. Można zauważyć, że liczba minusów nie zmienia się (gdy zetrzemy plus i minus) lub zmniejsza się o 2 (gdy zetrzemy 2 minusy). Niezmiennikiem jest więc tutaj parzystość liczby minusów. Na początku liczba minusów była nieparzysta, więc na końcu na tablicy postanie minus.

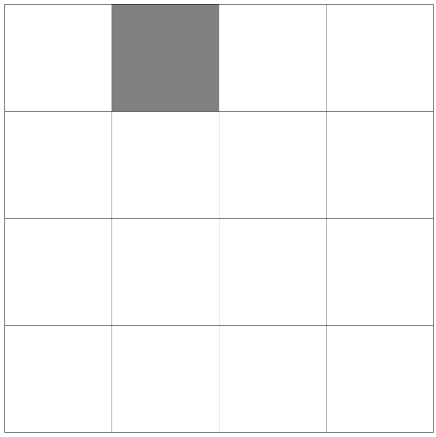
Problem 3.3 Na tarczy zegara w miejsce liczb wkręcono żarówki. Żarówka na godzinie 12 jest zapalona, pozostałe są zgaszone. Możemy wybierać dowolne pół tarczy zegara (6 kolejnych żarówek) i jednocześnie zmieniać stan wszystkich żarówek z tej połówki. Czy można w ten sposób doprowadzić do tego, by świeciła tylko żarówka na godzinie 11?

Rozwiązanie: Rozważmy żarówki umieszczone na godzinach: 12, 3, 6, 9. Wykonując dowolny ruch opisany w zadaniu zmieniamy stan 2 żarówek z tego zbioru. Parzystość liczby zapalonych żarówek w tym zbiorze jest więc niezmiennikiem. Na początku liczba ta wynosiła 1, więc niemożliwe jest zgaszenie wszystkich żarówek z tego zbioru.

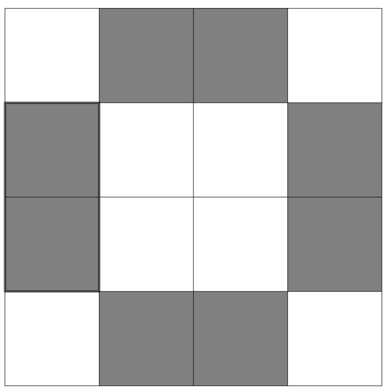
Problem 3.4 Dana jest szachownica 2010×2010. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól. Rozstrzygnijmy, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

Rozwiązanie: Na początku powinniśmy zauważyć, że wykonując ruch nie zmieniamy położenia środka ciężkości danego układu. Aby osiągnąć końcowy cel, wszystkie kamienie musiałyby się znajdować na polu, w którym jest środek ciężkości. Środek ten dla szachownicy o wymiarach 2010x2010 ma współrzędne (1005,5;1005,5), więc nie jest żadnym z pól szachownicy.

Problem 3.5 Dana jest szachownica 4×4, z polami jak na rysunku poniżej. Dozwolony ruch polega na zmianie koloru na przeciwny jednocześnie na wszystkich polach rozmieszczonych w jednym wierszu, kolumnie lub wzdłuż prostej równoległej do jednej z przekątnych (w szczególności w polu narożnym). Czy wykonując skończoną liczbę takich działań otrzymamy szachownicę z samymi białymi polami?



Rozwiązanie: Zwróćmy uwagę na pola zaznaczone na rysunku poniżej. Możemy zauważyć, że wykonując opisane w zadaniu działanie zmieniamy stan 0 lub 2 pól. Parzystość liczby czarnych pól w tym zbiorze nie będzie się więc zmieniać. Na początku jedno z zaznaczonych pól jest czarne, więc nie otrzymamy szachownicy z samymi białymi polami.

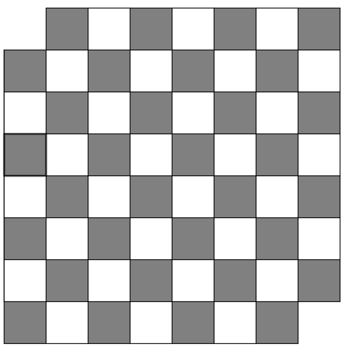


Problem 3.6 W tablicę o wymiarach 8×8 wpisano 64 liczby rzeczywiste. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb stojących w pewnej kolumnie lub w pewnym wierszu. Udowodnić, że wykonując tylko takie ruchy można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne.

Rozwiązanie: Wybieramy wiersz lub kolumnę o ujemnej sumie liczb (jeśli jest to niemożliwe – zadanie jest rozwiązane). Zmieniamy wszystkie liczby tam umieszczone na przeciwne, przez co otrzymujemy dodatnią sumę liczb w wybranej kolumnie lub wierszu. Jeśli po tym ruchu nie osiągnęliśmy celu, czynność powtarzamy. Możemy zauważyć, że po każdym ruchu suma wszystkich liczb stojących na tablicy wzrasta. Suma ta może przybierać jedynie skończenie wiele różnych wartości, nie więcej niż 2^{64}. Oznacza to, że proces musi się zakończyć. Udowodniliśmy więc, że można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne. W rozwiązaniu tego zadania zastosowaliśmy półniezmiennik, którym była suma wszystkich liczb na tablicy. Wielkość ta zmieniała się w określony sposób, co doprowadziło do rozwiązania.

Problem 3.7 Mamy szachownicę o wymiarach 8×8 z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1×2?

Rozwiązanie: Pokolorujmy szachownicę standardowo, jak na rysunku poniżej. Każda płytka 1x2 zakrywa 1 białe i 1 szare pole. Szachownica z wyciętymi 2 przeciwległymi rogami posiada 32 pola szare i 30 pól białych. Nie można więc pokryć jej tymi płytkami .



Problem 3.8 Mamy 15 kart, każda jest z jednej strony biała, a z drugiej strony czarna. Rozkładamy je białą stroną do góry. Ruch polega na jednoczesnym odwróceniu dowolnych dwóch kart. Czy można, wykonując pewną liczbę ruchów, doprowadzić do tego, by wszystkie karty leżały czarną stroną do góry?

Rozwiązanie: Rozważmy, jak zmienia się liczba kart odwróconych czarną stroną do góry. Gdy odwracamy 2 karty ustawione białą stroną do góry, liczba kart odwróconych czarną stroną do góry zwiększa się o 2, natomiast gdy odwracamy 2 różne karty, liczba kart odwróconych czarną stroną do góry nie zmienia się. Niezmiennikiem jest więc tutaj parzystość liczby tych kart. Ponieważ na początku ich liczba wynosi 0, nie możemy otrzymać układu złożonego z 15 kart leżących czarną stroną do góry.

Problem 3.9 W parlamencie każdy członek ma co najwyżej 3 wrogów. Udowodnij, że izbę można podzielić na dwie części w taki sposób, że każdy członek będzie miał co najwyżej jednego wroga w swojej izbie.

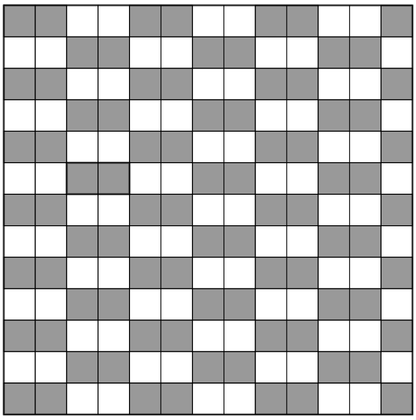
Rozwiązanie: Na początku podzielmy członków parlamentu losowo na dwie grupy tworzące oddzielne izby. Załóżmy, że istnieje członek, który ma co najmniej 2 wrogów w swojej izbie (jeśli nie, zadanie jest rozwiązane). Oznacza to, że ma co najwyżej 1 wroga w drugiej izbie. Jeśli osoba ta zmieni izbę, całkowita suma wszystkich wrogów każdego członka w jego własnej izbie zmaleje. Liczba ta będzie się zmniejszać, aż osiągnie absolutne minimum. Właśnie wtedy każdy członek będzie miał co najwyżej jednego wroga w swojej izbie.

Problem 3.10 Kilka kamieni jest umieszczonych na pasie złożonym z nieskończonej liczby kwadratów. Dopóki istnieją dwa kamienie umieszczone na jednym kwadracie, można je przenieść na dwa kwadraty sąsiadujące z kwadratem, na którym się znajdowały tak, aby były umieszczone na różnych kwadratach. Czy można powrócić do konfiguracji początkowej po skończonej liczbie ruchów?

Rozwiązanie: Oznaczmy kolejne kwadraty kolejnymi liczbami całkowitymi. Niech n_i oznacza numer kwadratu zawierającego kamień i. Niech $X = \sum {n_i}^2$. Zobaczmy, jak zmienia się X po wykonaniu ruchu. Początkowo, dla 2 kamieni umieszczonych na kwadracie t, $X = 2t^2$. Następnie, zgodnie z zasadą, jeden z kamieni umieszczamy w polu o numerze $(t-1)$, a drugi – w polu o numerze $(t+1)$. Wtedy $X = (t-1)^2+(t+1)^2 = 2t^2+2$. Możemy więc zauważyć, że każdy ruch powoduje zwiększanie się wartości X o 2, z czego wynika, że po pewnej ilości ruchów, zawsze będzie ona większa od początkowej, więc niemożliwe jest uzyskanie konfiguracji początkowej.

Problem 3.11 Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 1×4 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie niezakryte?

Rozwiązanie: Najpierw kolorujemy szachownicę jak na rys. poniżej. Pól szarych jest 85, a białych 84. Każdy klocek o wymiarach 1x4 pokrywa 2 szare i 2 białe pola, więc gdyby pokrycie było możliwe, liczba pól szarych musiałaby być równa liczbie pól białych. Pole środkowe jest białe, więc gdy je usuniemy, liczba pól szarych będzie wynosić 85, a białych 83,czyli takie pokrycie jest niemożliwe.

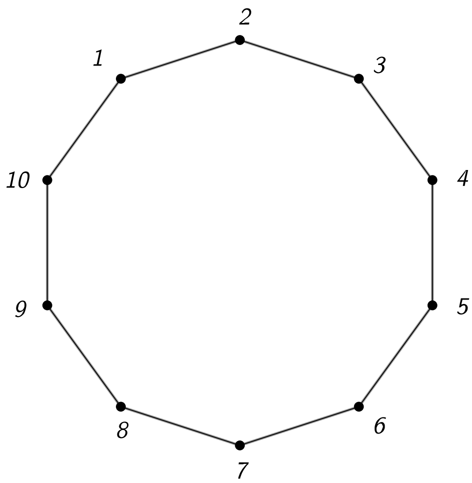


Problem 3.12 Na tablicy napisano liczby od 1 do 2012. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Postępujemy tak do momentu, gdy zostanie nam jedna liczba. Czy może nią być liczba 33?

Rozwiązanie: Zauważmy, że ścierając sumę dwóch liczb i dopisując ich różnicę nie zmieniamy parzystości sumy liczb napisanych na tablicy. Suma liczb od 1 do 2012 jest parzysta, więc liczba, która pozostanie jako ostatnia na tablicy również musi być parzysta. Liczba 33 nie spełnia tego warunku.

Problem 3.13 Rysujemy dziesięciokąt foremny i w każdym wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów i przełożeniu każdego z nich do dowolnego wierzchołka sąsiadującego z tym, w którym leżał. Czy można doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żetony leżą w jednym wierzchołku?

Rozwiązanie: Ponumerujmy wierzchołki dziesięciokąta numerami 1-10, jak na rysunku poniżej. Rozważmy liczbę żetonów znajdujących się w wierzchołkach o numerach nieparzystych. Początkowo wynosi ona 5. Po wykonaniu ruchu opisanego w zadaniu zmienia się ona o 2 (gdy przekładamy 2 żetony z wierzchołków o numerach nieparzystych na parzyste lub na odwrót) lub nie zmienia się (gdy przekładamy 1 żeton z wierzchołka o numerze nieparzystym i 1 z wierzchołka o numerze parzystym). Wobec tego parzystość liczby żetonów znajdujących się w wierzchołkach o numerach nieparzystych pozostaje stała. Ponieważ początkowa jej wartość jest nieparzysta, nie możemy uzyskać konfiguracji, w której będzie ona równa 10.

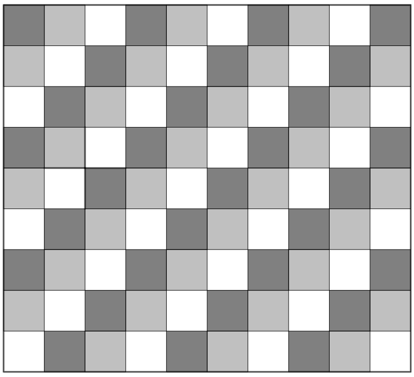


Problem 3.14 Na szachownicy 2011×2013 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Czy można je tak poprzestawiać, aby każdy pionek stał na polu sąsiadującym bokiem z polem, które zajmował i żeby wciąż na każdym polu stał dokładnie jeden pionek?

Rozwiązanie: Pomalujmy tradycyjnie szachownicę. Chcemy, aby każdy pionek stał na polu o innym kolorze niż wyjściowy. Ponieważ liczba pól szachownicy jest nieparzysta, liczba pól białych jest inna niż liczba pól szarych. Wobec tego niemożliwe jest otrzymanie sytuacji opisanej w zadaniu.

Problem 3.15 Dana jest szachownica o nieskończonej ilości pól. Wyróżniamy na tej szachownicy prosokąt 9×10, na którym ustawiono 90 pionków. Dozwolone ruchy to bicie pionka w pionie, lub w poziomie przeskakując go. Pionek zbity zostaje zdjęty z szachownicy. Czy można doprowadzić do sytuacji, w której na szachownicy pozostanie tylko jeden pionek?

Rozwiązanie: Pokolorujmy szachownicę jak poniżej. W prostokącie mamy po 30 pól danego koloru. Można zauważyć, że podczas każdego ruchu liczba pionków na polach poszczególnego koloru zmienia się o 1, gdyż trzy sąsiadujące pola są 3 różnych kolorów. Z tego wynika więc, że reszty z dzielenia liczb pionków na polach poszczególnych kolorów przez 2 są sobie zawsze równe. Nie można więc uzyskać układu z tylko jednym pionkiem na szachownicy.



Problem 3.16 Każda z liczb $a_1, \ldots, a_n$ jest równa 1 lub -1 oraz:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

Udowodnij, że $4|n$.

Rozwiązanie: Przeanalizujmy, jak zmienia się reszta z dzielenia S przez 4, gdy zamiast a_i podstawimy $-a_i$. Zauważmy, że cztery kolejne składniki sumy zmieniają wtedy znak na przeciwny. Każdy z tych składników jest równy 1 lub -1. Gdy dwa składniki są dodatnie, a dwa ujemne – po podstawieniu nic się nie zmienia. Jeśli jeden albo trzy składniki mają ten sam znak, wtedy S zmienia się o 4. Jeśli wszystkie cztery składniki mają ten sam znak, wartość S zmienia się o 8. Początkowo reszta z dzielenia S przez 4 wynosi 0. Jej wartość nie zmienia się również, gdy zmienimy a_i o ujemnych wartościach na przeciwne. Otrzymujemy wtedy $S = n$. Na podstawie powyższej analizy ($S \equiv 0 (mod 4)$ oraz $S = n$) można stwierdzić, że $4|n$.

4 Bibliografia

1. Miesięcznik Delta, Kącik olimpijski(17), Niezmienniki i półniezmienniki (I), Krzysztof Chełmiński i Waldemar Pompe
2. Warsztaty V LO w Krakowie, Niezmienniki, Rafał Klimczak, 2009
3. Matematyczne seminarium olimpijskie, cz. 1, Metoda niezmienników, Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew, SEM, Warszawa, 2014
4. Problem-Solving Strategies, Arthur Engel, Springer, New York, 1991