Kolorowanie punktów na płaszczyźnie, czyli kilka słów o geometrii kombinatorycznej.

Paulina Michta
V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
Opiekun: dr Jacek Dymel

1 Wprowadzenie

Niniejsza praca podejmuje tematykę kolorowania punktów na płaszczyźnie, które często pojawia się na olimpiadzie matematycznej. Jest podzielona na kilka działów ze względu na kilka rodzajów zadań z kategorii kolorowania jak określające możliwość kolorowania w zależności od odległości między punktami czy kolorowanie płaszczyzny tak, by wszystkie proste na niej miały określoną ilość kolorów.

2 Odległości między punktami

Zagadnienia z tej kategorii są podstawowymi zagadnieniami z kolorowania punktów na płaszczyźnie, które polegają na udowodnieniu możliwości istnienia punktów o określonej odległości pokolorowanych na różne kolory.
Dowody takich własności bardzo często polegają na użyciu wierzchołków jakiś figur geometrycznych. Poniżej przedstawię kilka problemów z tej kategorii.

2.1 Problemy

Problem 2.1 Płaszczyzna pokolorowana jest 2 kolorami. Wówczas istnieją dwa punkty odległe o 1 pokolorowane na ten sam kolor.

Dowód: Stórzmy trójkąt równoboczny o boku 1. Otrzymujemy sprzeczność.

Problem 2.2 Płaszczyznę kolorujemy dwoma kolorami. Każda liczba rzeczywista dodatnia jest odległością między dwoma punktami o tym samym kolorze.

Dowód: Wybierzmy na płaszczyźnie punkt A, który jest pomalowany na niebiesko. Jeżeli na okręgu o środku A i promieniu d (dowolna liczba rzeczywista dodatnia) znajduje się chociaż jeden niebieski punkt, to istnieją dwa niebieskie punkty odległe o d. W przeciwnym razie okrąg o środku A i promieniu d jest czerwony. Zatem znajdziemy na tym okręgu dwa czerwone punkty, których odległość wynosi d.

3 Kolorowanie płaszczyzny tak, aby wszystkie proste na niej miały określoną ilość kolorów.

Jest to zagadnienie przedstawione w gazetce OMG „Kwadrat” z czerwca 2014 roku. Problemy z tej kategorii polegają na znalezieniu największej liczby kolorów, którą można pokolorować płaszczyznę tak, aby każda prosta na niej była odpowiednio pokolorowana. Dowody problemów tego typu polegają na znalezieniu odpowiedniego kolorowania i udowodnieniu, że to kolorowanie spełnia wszystkie warunki zadania.

3.1 Problemy

Problem 3.1 Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Płaszczyznę za wyjątkiem pewnej prostej k ma pierwszy kolor, prosta k za wyjątkiem pewnego punktu P ma drugi kolor, a punkt P kolor trzeci. Zatem największą możliwą liczbą kolorów spełniającą warunki tego zadania jest 3.

Problem 3.2 Można tak pokolorować płaszczyznę trzema kolorami, by na każdej prostej występowały dokładnie dwa kolory.

Dowód: Aby udowodnić ten problem poprawmy nieznacznie dowód poprzedniego. Wszystkie proste jednokolorowe są równoległe do k. Dorysujmy kolejną prostą przechodzącą przez punkt A i poza tym punktem nadajmy jej kolor drugi (ten co k).

Problem 3.3 Iloma kolorami można pokolorować płaszczyznę tak, aby każda prosta była co najwyżej trójkolorowa?

Spróbujmy wykorzystać 4 kolory: na płaszczyźnie koloru pierwszego namalujmy dwoma kolorami dwie przecinające się proste. Punkt ich przecięcia oznaczmy kolorem czwartym. Na każdej z tych prostych możemy dołożyć po punkcie w dwóch nowych kolorach, wykorzystując już 6 kolorów. Nie jest to jednak największa liczba. Wystarczy zamiast dwóch przecinających się prostych wziąć dwie proste równoległe, a na każdej z nich dwa punkty w różnych kolorach i wówczas wykorzystamy aż 7 kolorów. Jednak w zadaniu jest mowa o maksymalnej liczbie kolorów. Otóż możemy użyć nieskończoność kolorów. Wystarczy na prostej jednego koloru namalować okrąg, którego każdy punkt jest innego koloru.

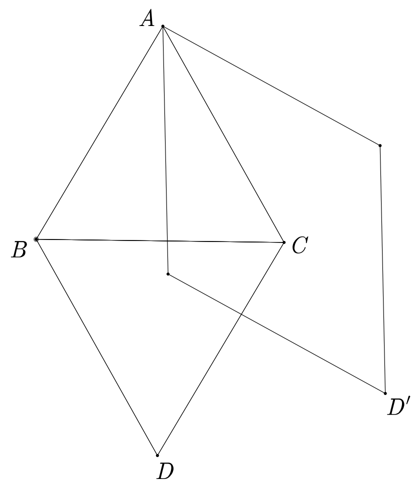
4 Liczba chromatyczna płaszczyzny

Liczba chromatyczna płaszczyzna to minimalna liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania płaszczyzny w ten sposób, by żadne dwa punkty płaszczyzny oddalone o 1 nie były tego samego koloru.
Ten problem postawił w 1950 roku osiemnastoletni student Uniwersytetu w Chicago - Edward Nelson. O postawienia problemu minęło już ponad 65 lat, jednak ten problem nie został jeszcze rozwiązany.Jedyne, co wiadomo to to, że liczba chromatyczna płaszczyzny jest większa od 3 i mniejsza od 8.

4.1 Problemy

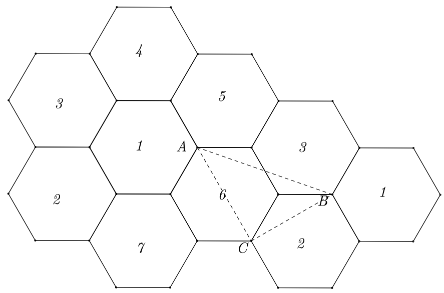
Problem 4.1 Liczba chromatyczna płaszczyzny jest większa niż 3.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Hipoteza: Liczba chromatyczna płaszczyzny może być równa 3. Każdy trójkąt równoboczny o boku 1 ma wierzchołki trzech różnych kolorów. Narysujmy czworokąt $ABCD$ składający się z dwóch trójkątów równobocznych o boku 1: ABC i BCD.Bez utraty ogólności przyjmijmy, że punkt A jest czerwony, B - niebieski, a C - żółty. Zatem punkt D musi być czerwony. Obróćmy czworokąt $ABCD$ o taki kąt względem punkt A, aby odległość DD' wynosiła 1. Rozumując analogicznie w przypadku czworokąta *AB'C'D'* otrzymujemy, że punkt *D'* jest czerwony, czyli otrzymaliśmy dwa punkty odległe o jeden tego samego koloru. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi twierdzenie 1.



Problem 4.2 Liczba chromatyczna płaszczyzny jest mniejsza od 8.

Dowód: Płaszczyznę podzielmy na sześciokąty foremne o boku a, jak na rysunku (każda cyfra od 1 do 7 oznacza inny kolor). Najdłuższa przekątna sześciokąta jest równa $2a$, zaś najkrótszy odcinek łączący dwa sześciokąty tego samego koloru jest równy:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4a^2 + 3a^2 = 7a^2$$

Zatem:

$$2a < 1 < \sqrt{7}a$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} < a < \frac{1}{2}$$

Jest możliwe pokolorowanie płaszczyzny tak 7 kolorami, aby odległość dwóch punktów tego samego koloru była różna od 2. Zatem twierdzenie jest prawdziwe.

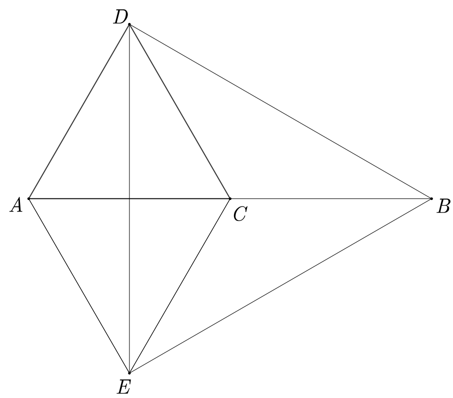
5 Wierzchołki trójkątów

Wierzchołki trójkątów są najczęściej wykorzystywaną metodą w dziedzinie kolorowania. Polegają na udowodnieniu jakiejś zależności w kolorowaniu wierzchołków trójkątów w różnych sytuacjach.
W dowodach tych problemów najczęściej wystarczy rozważyć wszystkie możliwe przypadki kolorowania lub przeprowadzając dowód nie wprost wybrać sobie jeden punkt, kolorować po kolei punkty i dojść do sprzeczności.

5.1 Problemy

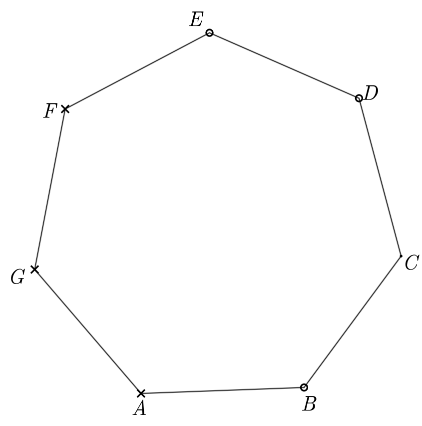
Problem 5.1 Punkty płaszczyzny pokolorowane są dwoma kolorami. Istnieje taki trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

Dowód: Przyjmijmy, że punkty płaszczyzny zostały pokolorowane na czarno i żółto. Na płaszczyźnie wybierzmy czarny punkt A i żółty punkt B w ten sposób, aby odcinek AB miał długość 2 (na podstawie poprzednich zadań wiemy, że taki istnieje). Złóżmy, że punkt C jest środkiem odcinka AB i ma kolor np. czarny. Wybierzmy punkty D i E tak, aby czworokąt $DAEC$ był rombem o boku długości 1. Jeśli przynajmniej jeden z punktów D, E będzie czarny, to otrzymamy czarny trójkąt ACD lub ACE. W przeciwnym wypadku trójkąt DEC będzie żółtym trójkątem równobocznym o boku długości $\sqrt{3}$.



Problem 5.2 Każdy z wierzchołków siedmiokąta foremnego został pomalowany na jeden z dwóch kolorów: biały lub czarny. Wśród nich trzy punkty tego samego koloru, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

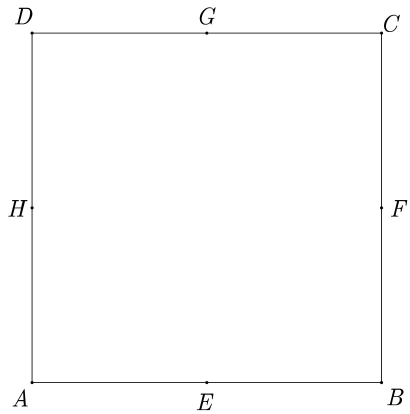
Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Hipoteza: Nie istnieje taki jednokolorowy trójkąt równoramienny. Oznaczmy wierzchołki literami A, B, C, D, E, F, G. Punkt A pomalujmy na czarno, więc jeden z punktów B lub G musi być żółty. Przyjmijmy, że B jest żółty. Jeden z punktów F lub E musi być czarny. Przyjmijmy, że F jest czarny. Aby nie powstały trójkąty równoramienne AFD i AFG malujemy punkt D i G na żółto. Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ trójkąt BDG jest równoramienny i wszystkie jego wierzchołki są żółte.



Problem 5.3 Każdy punkt obwodu kwadratu jest pomalowany jednym kolorem. Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, których trzy wierzchołki leżą na obwodzie kwadratu. Jaka jest najmniejsza liczba kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie kwadratu, że żaden z rozważanych trójkątów nie ma wszystkich wierzchołków w jednym kolorze?

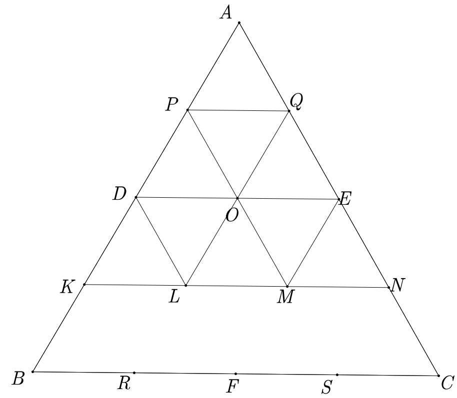
Najpierw pokażmy, że dwa kolory: niebieski i czerwony nie wystarczą do pokolorowania kwadratu. Oznaczmy wierzchołki kwadratu $ABCD$. Punkty E, F, G, H są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA. Spośród punktów A, B, E przynajmniej dwa są tego samego koloru. Przypuśćmy, że A i B są niebieskie. Punkty: H, D, C, F muszą być czerwone. Powstaje trójkąt prostokątny HDC, którego wierzchołki są czerwone. Przypuśćmy teraz, że punkty A i E są pomalowane na niebiesko. Punkty: D, G, H muszą być czerwone, czyli tworzą niedozwolony trójkąt prostokątny GDH.

Zatem dwa kolory nie wystarczają, ale trzy - tak. Pomalujmy odcinek AB bez końców kolorem czerwonym. Bok AD bez końca D oraz bok DC bez końców malujemy na niebiesko. Bok BC bez końca malujemy na żółto. Wierzchołki D i C pomalujmy na czerwono. Przedstawione pokolorowanie spełnia warunki zadania.



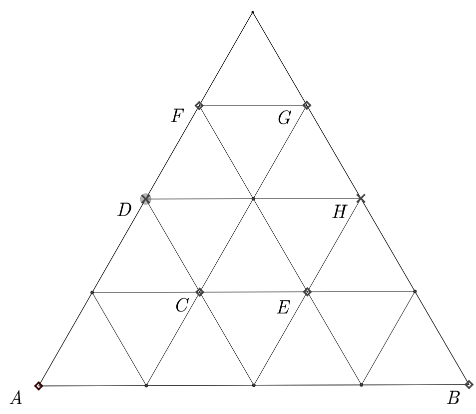
Problem 5.4 Linie środkowe trójkąta równobocznego ABC dzielą go na cztery trójkąty ADE, BDF, DEF i CEF, na bokach których zaznaczono środki - są nimi punkty K, L, M, N, O, P, Q, R, S. Każdy z piętnastu otrzymanych punktów pomalowano jednym z dwóch kolorów. Można wybrać 3 punkty tego samego koloru, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Hipoteza: Nie istnieją takie trzy punkty tego samego koloru, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Załóżmy, że punkt O jest czerwony. Przynajmniej jeden z punktów P, E, L jest czerwony - bez utraty ogólności przyjmijmy, że jest to punkt P i choć jeden z punktów Q, D, M jest czerwony. Zatem punkty Q i D są niebieskie, a M czerwony. Analogicznie otrzymujemy, że punkty E i L są niebieskie. Rozpatrując ostatecznie trójkąty DEA, QLN *i* DLK otrzymujemy, że wierzchołki trójkąta AKN są czerwone. Otrzymujemy sprzeczność, czyli teza jest prawdziwa.



Problem 5.5 Boki trójkąta równobocznego pomalowano używając dwóch kolorów. Wśród pomalowanych punktów istnieją trzy jednokolorowe, które są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

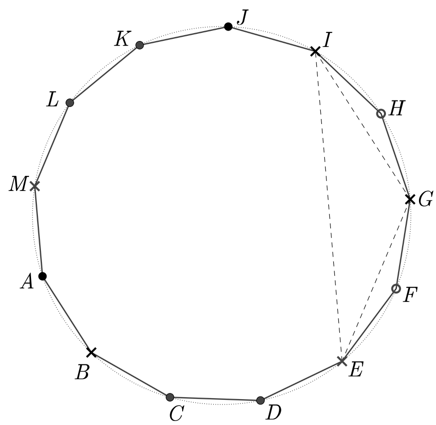
Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Hipoteza: Wśród pomalowanych punktów nie istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Podzielmy trójkąt na trójkąty równoboczne jak na rysunku. Przynajmniej dwa wierzchołki największego trójkąta muszą być tego samego koloru. Bez utraty ogólności przyjmijmy, że punkty A *i* B są zielone. Aby nie powstały monochromatyczne trójkąty prostokątne punkty D *i* H muszą być czerwone. Postępując analogicznie otrzymujemy, że punkty C, E, F *i* G muszą być zielone. Trójkąt CEF jest prostokątny i wszystkie jego wierzchołki są zielone. Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli teza jest prawdziwa.



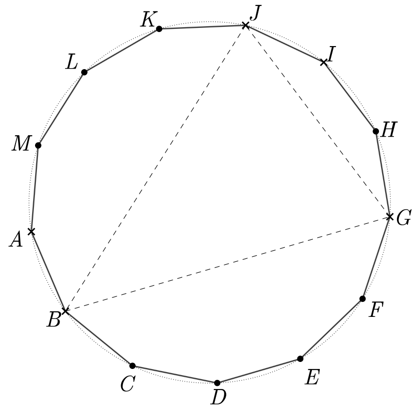
Problem 5.6 Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów . Pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Dowód: A, B, ..., M są wierzchołkami 13-kąta foremnego wpisanego w okrąg. Wykażemy, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków tego 13-kąta znajdą się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Jeśli wśród dowolnych trzynastu punktów danego okręgu znajdzie się pięć pomalowanych tym samym kolorem, zadanie zostanie rozwiązane.

Przypuśćmy, że udało się wybrać tak pięć wierzchołków, że żadne trzy spośród wybranych punktów nie tworzą trójkąta równoramiennego. Załóżmy, że wśród wybranych punktów nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków 13-kąta. Wówczas wśród wybranych punktów znajdziemy dwa oddzielone dokładnie jednym wierzchołkiem, który nie został wybrany. Bez utraty ogólności przyjmijmy, że są to B i M. Ponieważ żadne trzy wybrane wierzchołki nie tworzą trójkąta równoramiennego, więc nie został wybrany żaden z punktów: A, B, C, K, L. Trójkąt BEJ jest równoramienny, więc co najmniej jeden z punktów E, J nie został wybrany. Bez utraty ogólności przyjmijmy, że jest to punkt J. Zatem spośród punktów: E, F, G, H, I trzy zostały wybrane, ale żadne dwa z nich nie są kolejnymi wierzchołkami 13-kąta, więc musiały zostać wybrane punkty E, G, I. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ te punkty tworzą trójkąt równoramienny.



Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym wśród wybranych wierzchołków znajdują się dwa sąsiednie, bez utraty ogólności A i B. Oznacza to, że nie został wybrany żaden z wierzchołków: C, H, M. Trójkąty AJL, BEJ, BEL są równoramienne, więc został wybrany najwyżej jeden z punktów D, F, K. Analogicznej stwierdzamy, że został wybrany co najmniej jeden z punktów G, I. Bez utraty ogólności przyjmijmy, że jest to punkt I. Zatem nie wybrano punktów D, E, F, L.
Wśród wybranych pięciu punktów muszą być dwa spośród G, J, K. Ze względu na trójkąty równoramienne wybranym punktem jest punkt G. To oznacza, że nie został wybrany punkt K. Zatem piątym wybranym punktem jest punkt J. Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ trójkąt BGJ jest równoramienny.



6 Zbiory punktów

Zagadnienia z tej kategorii są bardzo często pojawiają się na olimpiadzie matematycznej. Punkty należy połączyć by otrzymać odcinki, które mają spełniać odpowiednie warunki.
W dowodach nie wystarczy już tylko użycie kredek, ale potrzeba różnych zależności wynikających z założeń.

6.1 Problemy

Problem 6.1 Dany jest takt skończony zbiór B punktów przestrzeni, że każde dwie odległości między punktami tego zbioru są różne. Każdy punkt zbioru B łączymy odcinkiem z najbliższym mu punktem zbioru B. Otrzymamy w ten sposób zbiór odcinków, z których jeden (dowolnie wybrany) malujemy na czerwono, wszystkie pozostałe odcinki malujemy na zielono. Istnieją takie dwa punkty zbioru B, których nie można połączyć łamaną złożoną z odcinków pomalowanych na zielono.

Dowód: Bez utraty ogólności załóżmy, że odcinek A_1A_2 jest czerwony. Jeśli istniałaby łamana złożona z odcinków zielonych łącząca punkt A_1 i A_2 to

istniałyby punkty $A_3, ..., A_n$ będące kolejnymi końcami odcinków tworzących łamaną. Narysujmy odcinek A_iA_j, więc A_i jest najbliższym elementem zbioru dla A_j lub A_j jest najbliższym elementem dla A_i. Każde dwie odległości między punktami zbioru są różne, więc nie może równocześnie dla $k \neq j$ A_j być najbliższym elementem zbioru dla A_i oraz A_k być najbliższym elementem zbioru dla A_j. Zatem A_2 jest najbliższym elementem zbioru dla A_1, A_3 dla A_2,...,A_1 dla A_n albo A_n dla A_1, A_{n-1} dla A_n,...,A_1 dla A_2.
W obu przypadkach odległości kolejnych punktów spełniałyby odpowiednio sprzeczne nierówności.

$$A_1A_2 > A_2A_3 > ... > A_nA_1 > A_1A_2$$

albo

$$A_1A_2 < A_2A_3 < ... < A_nA_1 < A_1A_2$$

Wobec tego punkty A_1 i A_2 nie mogą być połaczone łamaną złożoną z odcinków zielonych.

Problem 6.2 Dany jest zbiór n punktów ($n \geq 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory. Jaka jest najmniejsza liczba kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

Przyjmijmy, że dane punkty są wierzchołkami n-kąta (jeśli $n = 2$ wystarczy jeden kolor). Wszystkie odcinki o jednakowym kolorze wyznaczają rozłączne pary wierzchołków wielokąta. Maksymalna liczba rozłącznych podzbiorów dwuelementowych zbioru wynosi $\frac{n}{2}$. Zatem liczba kolorów jest nie mniejsza niż

$$(\frac{n}{k})(\frac{n}{2})^{-1} = \begin{cases} n & \text{dla n nieparzystych.} \\ n-1 & \text{dla n parzystych.} \end{cases}$$

Wykażmy, że ta liczba kolorów wystarcza do spełnienia żądanego warunku. Gdy n jest liczbą nieparzystą, bierzemy zbiór wierzchołków n-kąta foremnego i malujemy jednakowym kolorem bok i wszystkie równoległe do niego przekątne; inne odcinki malujemy różnymi kolorami. Użyliśmy n kolorów. Gdy n jest liczbą parzystą, bierzemy zbiór wierzchołków $(n-1)$-kąta foremnego oraz jeden punkt P. Kolorujemy boki i przekątne wielokąta w sposób taki sam jak powyżej, używając $n-1$ kolorów. Dla każdego zbioru równoległych odcinków jednakowego koloru k_i, pozostaje jeden wierzchołek P_i wielokąta nie będący końcem żadnego z tych odcinków. Malujemy odcinek P_0P_i kolorem k_i. Użyliśmy n-1 kolorów, spełniając wymagany warunek.

6.2 Bibliografia

6.1 Gabriel Jakóbczak - Podziały i kolorowanie

6.2 Adam Dzedzej - Gazetka OMG "Kwadrat"

6.3 Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne

6.4 Środowiskowe Koło Matematyczne, Piotrków Trybunalski

6.5 artykuł "Barwy walki"

6.6 Zadania z Olimpiad Matematycznych i Olimpiad Matematycznych dla gimnazjalistów