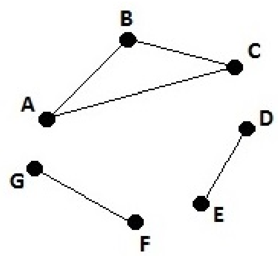
Problem Hadwigera-Nelsona

Agnieszka Maślanka

Spis treści

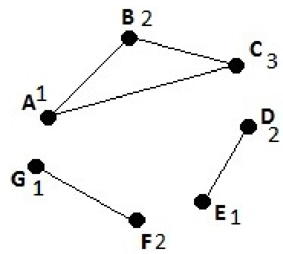
1 Wstęp

Jednym z podstawowych procesów w matematyce jest rozdzielanie zbioru elementów na klasy posługując się pewnymi konkretnymi zasadami. Podążając za tymi zasadami, możemy zdecydować, czy pary elementów mogą zostać przypisane do tej samej klasy. Przykładowo, jeśli mielibyśmy zaplanować dzienny rozkład zajęć na uczelni, musielibyśmy upewnić się, że żaden profesor nie ma udzielać dwóch wykładów w tym samym czasie. Jednocześnie chcemy też, aby plan zajęć był jak najkrótszy. Aby wykonać to zadanie, możemy zakodować konkretną godzinę jako klasę i przypisać do niej wszystkie niekolidujące ze sobą wykłady. Następnie, tworzymy kolejną klasę zawierającą pozostałe niekonfliktujące wykłady. Robimy tak aż do momentu, w którym wszystkie zajęcia są przypisane do jakiejś godziny. Z pomocą przy prezentowaniu takiego problemu przyjdzie nam teoria grafów - przedstawić go można za pomocą grafu, w którym każdy wierzchołek odpowiada jednemu wykładowi, z krawędziami pomiędzy każdą kolidującą parą. Powiedzmy, że mamy siedem wykładów A, B, C, D, E, F, G. Profesor X daje wykłady A, B i C, profesor Y wykłady D i E a profesor Z wykłady F i G. Sytuację tą można przedstawić za pomocą grafu, jak pokazuje Rysunek 1.



Rysunek 1: Przedstawienie przykładowego problemu za pomocą grafu

Klasy mogą być oznaczone zbiorem kolorów C. Przypisujemy teraz kolory w taki sposób, aby żadna para połączonych wierzchołków nie miała tego samego koloru.



Rysunek 2: Przedstawienie przykładowego problemu za pomocą grafu

Na Rysunku 2 widzimy, że potrzeba jedynie trzech kolorów do pokolorowania tego grafu, a co za tym idzie, trzech godzin do rozmieszczenia wszystkich wykładów w taki sposób, aby ze sobą nie kolidowały. Proces opisany wcześniej jest *kolorowaniem wierzchołkowym* tego grafu. *Kolorowanie wierzchołkowe* grafu $G = (V, E)$ to taka funkcja c, że $c : V(G) \to C$, gdzie dla każdego $xy \in E(G)$, $c(x) \neq c(y)$. $V(G)$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków grafu G i $E(G)$ zbiorem wszystkich krawędzi tego grafu. Jeśli $|C| = k$, wtedy funkcja c nazywana jest *k-kolorowaniem G*. Najmniejsze k, dla którego G jest k-kolorowalne nazywane jest *liczbą chromatyczną* grafu G i zapisywane jako $\chi(G)$ (Weisstein, 2005).

Istnieje wiele problemów matematycznych, które związane są z kolorowaniem wierzchołkowym grafów. Jednym z nich jest problem Hadwigera-Nelsona, który po raz pierwszy został sformułowany w 1950 roku przez E.Nelsona i który poniżej podajemy w dwóch wersjach:

Problem 1 *Niech G będzie grafem nieskończonym, w którym wierzchołkami są wszystkie punkty na płaszczyźnie, i w którym xy jest krawędzią tylko jeśli punkty x i y są oddalone od siebie o 1. Jaka jest liczba chromatyczna $\chi(G)$ grafu G? (Jensen i Toft, 1995).*

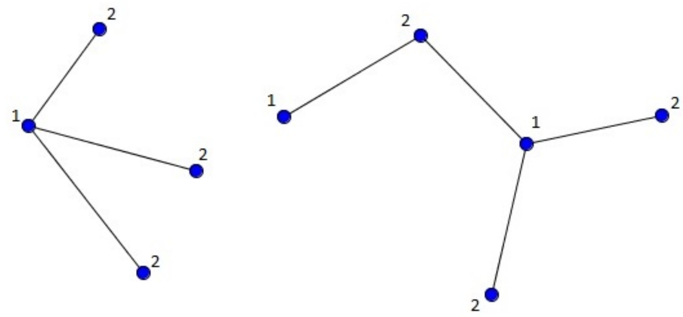
Jaka jest minimanla liczba kolorów, którymi musi być pokolorowana płaszczyzna, aby istniało kolorowanie takie, że nie istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach? (Pitera, 2014).

Powyższy problem pojawił się na warsztatach Uniwersytetu Jagiellońskiego dla licealistów i przykuł wtedy moją uwagę. Podczas zajęć wspomniane zostało również twierdzenie o czterech barwach i różnorodne zastosowania teorii grafów, co skłoniło mnie do zainteresowania się zagadnieniami kolorowania. Dlatego też zdecydowałam się poświęcić tę pracę problemowi Hadwigera-Nelsona. W dalszej części pracy przedstawione zostaną podstawy kolorowania grafów, kolorowania zbiorów $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, a następnie oszacowanie dolne i górne dla $\chi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, czyli dla rozwiązań problemu Hadwigera-Nelsona.

2 Liczba chromatyczna grafów o różnych typach

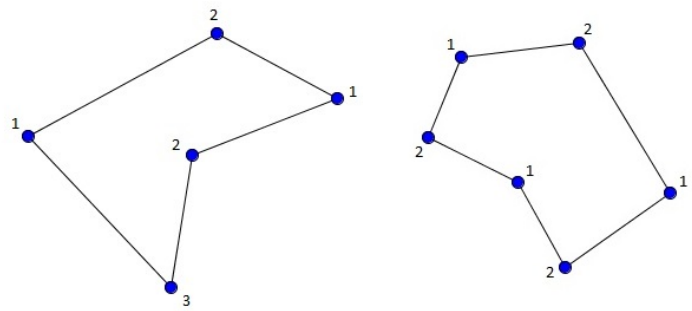
Zanim przejdziemy bezpośrednio do analizy problemu Hadwigera-Nelsona, warto przyjrzeć się wartościom liczby chromatycznej dla różnych typów grafów. Dzięki temu sprawdzimy, czy rozwiązanie problemu Hadwigera-Nelsona mogłoby opierać się o strukturę podobną podstawowym grafom. Po znalezieniu liczb chromatycznych kilku grafów danego typu, zauważyć można było powtarzalny wzór dla rozwiązań.
Jako pierwsze rozważmy drzewo, czyli graf spójny bez cykli (Gorgol, 2007). Z samej jego definicji wynika, że do pokolorwania go wystarczą nam dwa kolory - po pokolorowaniu jednego wierzchołka kolorem 1 kolorujemy wszystkie połączone z nim wierchołki kolorem 2, następnie wszystkie wierzchołki połączone z wierzchołkami o kolorze 2 kolorujemy kolorem 1 i tak dalej. Brak cykli w grafie oznacza, że dwa wierzchołki o tym samym kolorze nie będą ze sobą połą-

czone w wypadku takiego kolorowania. Rysunek 3 przedstawia dwa przykłady pokolorowanych drzew.



Rysunek 3: Kolorowanie wierzchołkowe drzew

W grafach cyklicznych o liczbie wierzchołków większej niż jeden, liczba chromatyczna zależy od tego, czy liczba wierzchołków jest parzysta czy nieparzysta. W pierwszym przypadku liczba chromatyczna wynosi dwa, natomiast w drugim przypadku jest to trzy. Wynika to z faktu, że w grafie cyklicznym z parzystą liczbą wierzchołków możemy kolorować wierzchołki na zmianę dwoma kolorami i żadne dwa wierzchołki o tym samym kolorze nie spotkają się. W grafach o nieparzystej liczbie wierzchołków jest to niemożliwe, ponieważ pierwszy i ostatni wierzchołek, które są ze sobą połączone, miałyby ten sam kolor. Przykłady grafów cyklicznych o parzystej i nieparzystej liczbie wierzchołków przedstawione są na Rysunku 4.



Rysunek 4: Kolorowanie wierzchołkowe grafów cyklicznych

Dla grafów pełnych K_n, gdzie $n \geqslant 1$, liczba chromatyczna równa jest n, jako że w grafie tego typu każdy wierzchołek połączony jest ze wszystkimi innymi. Zostało to dowiedzione przez Rowlanda L. Brooksa w 1941 roku i nazywane jest Twierdzeniem Brooksa. Mówi ono, że jeśli graf jest pełny, jego liczba chromatyczna wynosi $\Delta(G) + 1$, gdzie $\Delta(G)$ jest maksymalnym stopniem wierzchołka w tym grafie (Cranston and Rabern, 2014).

W wypadku grafów planarnych, największą możliwą liczbą chromatyczną jest 4, co wynika z twierdzenia o czterech barwach. Twierdzenie to zostało udowodnione przy użyciu programu komputerowego w roku 1976 przez K.Appela i W.Hakena, chociaż nie wszyscy matematycy zgadzają się co do wiarygodności tego dowodu. W roku 2009, Limin Xiang przedstawił propozycję formalnego dowodu na prawdziwość twierdzenia o czterech barwach (Xiang, 2009).

Niestety, rozważania te raczej nie doprowadzą nas do ostatecznej odpowiedzi na problem Hadwigera-Nelsona. Bierzemy tam pod uwagę grafy punktów oddalonych o 1 (z ang. *unit distance graphs*). Wraz ze wzrostem liczby wierzchołków, grafy rozważane powyżej stają się zbyt złożone, aby mogły być przedstawione w postaci grafów punktów oddalonych o 1, dlatego ich liczby chromatyczne nie pomogą nam w szukaniu rozwiązania dla problemu Hadwigera-Nelsona. Przykładowo, K_n już dla $n = 4$ nie spełnia warunku o odległości 1, jako że ma on wtedy postać kwadratu - nawet jeśli jego boki będą miały długość 1, to dwie pary wierzchołków połączonych ze sobą przekątnymi znajdować się będą w odległości $\sqrt{2}$ od siebie. Odpowiednio złożone grafy punktów oddalonych o 1 nie są także ani drzewami, ani grafami planarnymi, co zobaczymy na rozważanym w dalszej części pracy grafie nazywanym wrzecionem Moserów.

3 Liczba chromatyczna różnych obiektów matematycznych

Jaka byłaby liczba chromatyczna $\chi(\mathbb{N})$? Rozważmy oś z zaznaczonymi punktami o wartościach naturalnych - punkty te oddalone są od siebie o 1. Czy do pokolorowania ich wystarczy jeden kolor? Odpowiedź jest dość oczywista - mając jeden kolor, możemy pokolorować wyłącznie jeden wierzchołek. Jeśli natomiast do dyspozycji mamy dwa kolory, zadanie wydaje się bardziej wykonalne, jako że możemy pokolorować jeden wierzchołek jednym kolorem, wierzchołek sąsiadujący z nim drugim kolorem, a następny wierzchołek znowu pierwszym. Tak samo dzieje się w przypadku $\chi(\mathbb{Z})$, gdzie jedyną różnicą jest to, że bierzemy pod uwagę również liczby ujemne. Podobnie jest w wypadku $\chi(\mathbb{Q})$. Wreszcie, liczba chromatyczna $\chi(\mathbb{R})$ jest również równa dwa, pomimo tego, że składa się z o wiele większej ilości punktów. Wynika to z faktu, że zasada którą posługujemy się przy tworzeniu krawędzi się nie zmienia, niezależnie od tego, jakie punkty bierzemy pod uwagę.

Problem Hadwigera-Nelsona rozważany jest na płaszczyźnie składającej się z punktów o współrzędnych będących liczbami rzeczywistymi. Taki zbiór punktów będziemi oznaczać $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, co jest iloczynem kartezjańskim tych dwóch zbiorów. Jak zmieniłyby się te rozważania, gdybyśmy brali pod uwagę wyłącznie punkty o współrzędnych będących liczbami naturalnymi? Wynikające ułożenie punktów byłoby kratownicą $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, w której każdy punkt byłby odległy o 1 od dokładnie czterech innych punktów. Po stworzeniu krawędzi pomiędzy wszystkimi punktami odległymi od siebie o 1, otrzymalibyśmy unit distance graph składający się z przyległych kwadratów. Liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania takiego grafu to dwa, ponieważ do pokolorowania pojedynczego kwadratu potrzebujemy dwóch kolorów. Sytuacja wygląda podobnie, jeśli rozważamy punkty, których współrzędne są liczbami całkowitymi - różnicę stanowi fakt, że bierzemy teraz pod uwagę punkty o ujemnych współrzędnych.

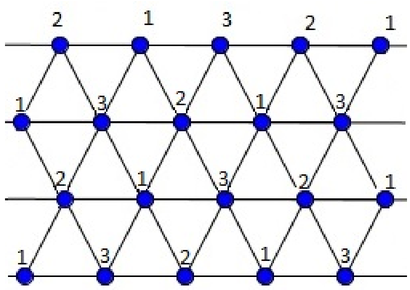
Liczba chromatyczna $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ także jest równa 2. Dokładny dowód tego stwierdzenia został podany w roku 1973 przez Woodalla (Jensen, 2010). Opiera się on na fakcie, iż punkt o współrzędnych wymiernych nieskracalnych przez 2 ($\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$), gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, będzie w odległości 1 od środka układu współrzędnych jedynie, gdy oba mianowniki b i d będą nieparzyste. Następnie można pokazać, że jeśli dane są dwa punkty $R(r_1, r_2)$ oraz $P(p_1, p_2)$ o współrzędnych wymiernych oddalone od siebie o 1, to współrzędne punktu $(r_1 - p_1, r_2 - p_2)$ będą liczbami wymiernymi o nieparzystych mianownikach. To pozwala stworzyć relację na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, w której dwa punkty $R(r_1, r_2)$ oraz $P(p_1, p_2)$ będą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne punktu $(r_1 - p_1, r_2 - p_2)$ będą liczbami wymiernymi o nieparzystych mianownikach. Łatwo sprawdzić, że taka relacja będzie relacją równoważności. Wtedy powstałym klasom równoważności możemy przypisać ten sam kolor. Rozważmy kolorowanie podane wzorem:

$$\phi(\tfrac{a}{b}, \tfrac{c}{d}) = \begin{cases} \mathit{czerwony}, & \text{jeśli } a + c \text{ jest parzyste} \\ \mathit{niebieski}, & \text{jeśli } a + c \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Takie kolorowanie zapewnia, że każde dwa punkty o współrzędnych wymiernych nie będą mieć przypisanego takiego samego koloru. W wypadku $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nie da się stworzyć takiej relacji w podobny sposób jak dla $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

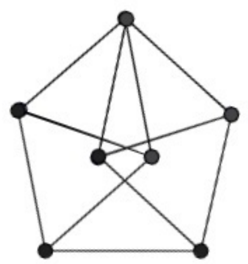
4 Oszacowanie dolne dla rozwiązań problemu

Kilka akapitów wyżej rozważaliśmy sytuacje, takie jak $\chi(\mathbb{R})$, w których użyć można było dwóch kolorów do pokolorowania danej konfiguracji punktów, jednak były to kolorowania konkretnych ułożeń i niekoniecznie muszą być prawdziwe dla wszystkich ułożeń punktów. Najprostszym wyjaśnieniem tego faktu jest sytuacja, w której trzy wierzchołki na płaszczyźnie tworzą trójkąt równoboczny o boku długości 1 - nie jest możliwym pokolorowanie go za pomocą dwóch kolorów. To prowadzi nas do rozważań na temat 3-kolorowania płaszczyzny, którego przykład przedstawiony jest w Rysunku 5.



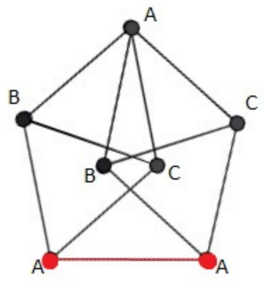
Rysunek 5: Propozycja 3-kolorowania płaszczyzny

Wydawać by się mogło, że jest to ostateczne rozwiązanie problemu Hadwigera-Nelsona. Jednak graf ten nie jest jedynym, jaki może powstać na płaszczyźnie. Możemy na przykład stworzyć graf składający się z dwóch rombów z bokami o długości równej 1. Romby te umieszczone są na płaszczyźnie w taki sposób, że mają wspólny wierzchołek przy kącie ostrym, a pomiędzy pozostałymi wierzchołkami przy kątach ostrych jest odległość równa 1, tak przedstawione zostało to w Rysunku 6. Takie ułożenie zostało opublikowane po raz pierwszy w 1961 roku przez Leo i Williama Moserów i nazywane jest *wrzecionem Moserów.*



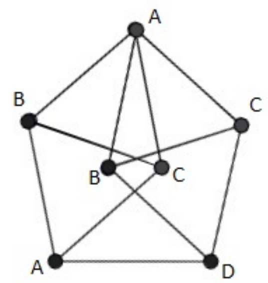
Rysunek 6: Wrzeciono Moserów

Jeśli przypiszemy kolor A wierzchołkowi należącemu do obu rombów, wtedy te dwa wierzchołki, które z nim sąsiadują w rombie musiałyby zostać pokolorowane dwoma innymi kolorami, odpowiednio B i C. W takiej sytuacji, wierzchołki przy kątach ostrych obu rombów, które nie są wspólne, miałyby ten sam kolor A (Rys. 7).



Rysunek 7: Wrzeciono Moserów

Jest to sprzeczne z wymaganiem, aby żadna para wierzchołków odległych od siebie o 1 nie miała tego samego koloru. Pokazuje to, że potrzebujemy co najmniej czterech kolorów, aby pokolorować ten graf, tak jak jest to pokazane na Rysunku 8. Graf ten zadaje nam ograniczenie dolne na $\chi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, ponieważ do tej pory nie znaleziono grafu punktów oddalonych o 1, który wymagałby pięciu kolorów do wykonania poprawnego kolorowania.

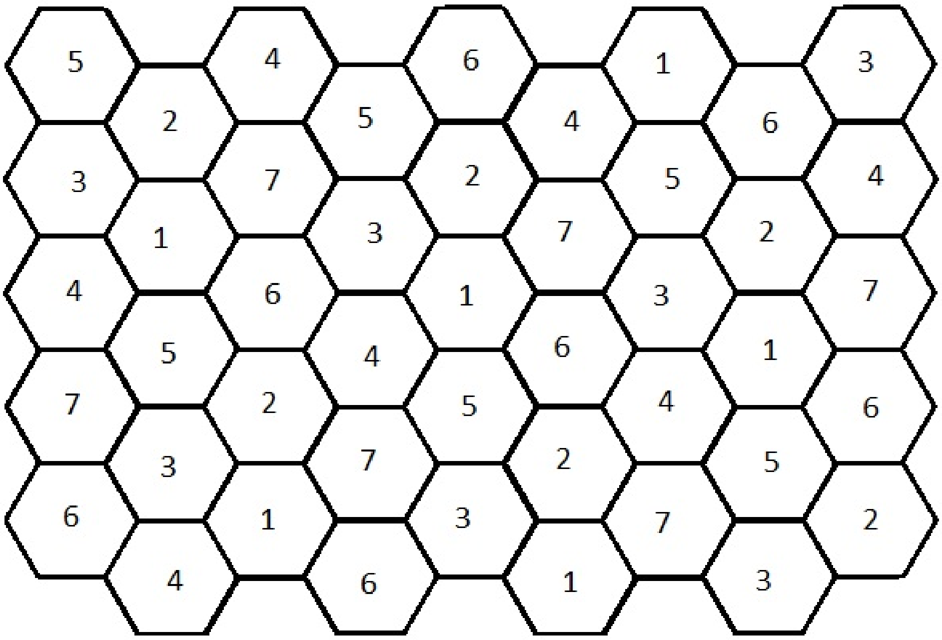


Rysunek 8: Poprawne kolorowanie wrzeciona Moserów

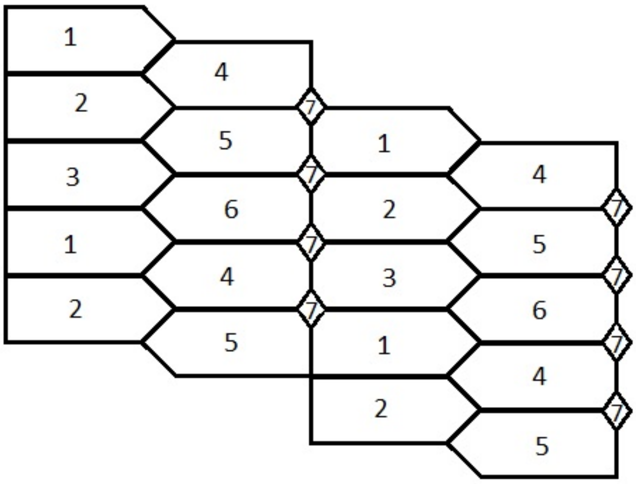
5 Oszacowanie górne dla rozwiązań problemu

Wiemy teraz jaka jest dolna granica dla rozwiązań problemu Hadwigera-Nelsona - a co z górną? Według Pritikina, znalezienie 5-kolorowalnego unit distance graph jest możliwe, jednak obecne rezultaty są niesatysfakcjonujące (Pritikin, 1998). Szukanie takiego grafu może zakończyć się sukcesem przy użyciu nowoczesnej technologii. Pritikin twierdzi też, że każdy unit distance graph zawierający 6197 lub mniej wierzchołków jest 6-kolorowalny (Pritikin, 1998). Nie jest to jednak odpowiedzią na pytanie dotyczące górnej granicy dla rozwiązań problemu Hadwigera-Nelsona. Przedstawiona może być za pomocą parkietażu płaszczyzny sześciokątami foremnymi o przekątnej długości 1 lub trochę krótszej niż 1, i 7-kolorowania, w którym każdy punkt znajdujący się wewnątrz jednego sześciokąta ma ten sam kolor. Parkietaż powstaje, kiedy za pomocą konkretnego kształtu zakrywamy płaszczyznę, nie pozwalając powtarzającym się kształtom nachodzić na siebie ani zostawiać pustych przestrzeni. Parkietaż płaszczyzny sześciokątami foremnymi ukazuje Rysunek 9.

Lepiej jest nadać sześciokątom przekątną odrobinę krótszą niż 1, jako że pozwala to uniknąć sytuacji w której dwa punkty leżące na krawędziach tego samego sześciokąta mają różne kolory. Kiedy wybierzemy dowolny punkt na płaszczyźnie, wszystkie punkty odległe od niego o 1 znajdować się będą poza obszarem sześciokąta, do którego należy wybrany przez nas punkt. Oznacza to, że jeśli przypiszemy jakiś kolor jednemu sześciokątowi, potrzebujemy jeszcze sześciu innych kolorów aby pokolorować pozostałe sześciokąty.
Parkietaż płaszczyzny sześciokątami foremnymi sugeruje górną granicę problemu Hadwigera-Nelsona, ale może wydawać się niewystarczającym dowodem. Inne, bardziej dokładne 7-kolorowanie płaszczyzny zostało zademonstrowane przez Dana Pritikina. Jest ono okresowe i składa się z kolumn pięciokątów pokolorowanych na sześć kolorów z dodatkowymi rejonami w kształcie romba, pokolorowanymi za pomocą siódmego koloru. 7-kolorowanie zaproponowane przez Pritikina przedstawione jest w Rysunku 10. Rejony pokolorowane siódmym kolorem stanowią niewielką część całego parkietażu, ponieważ kolor ten przypisywany jest wyłącznie wierzchołkom, które nie mogą być pokolorowane za pomocą pierwszych sześciu kolorów. Ukazuje to, że górną granicą może okazać się 6, a nie 7. Dodatkowo, Pritikin pokazał, że dowolne 6179 punktów w 7-kolorowaniu płaszczyzny może być poddanych translacji w taki sposób, że siódmy kolor nie jest już potrzebny do pokolorowania ich (Axenovich et al., 2011).



Rysunek 9: Fragment parkietażu płaszczyzny sześciokątami foremnymi



Rysunek 10: 7-kolorowanie zaproponowane przez Pritikina

6 Wnioski

Celem tej pracy było zbadanie problemu Hadwigera-Nelsona i przedstawienie dolnych i górnych oszacowań dla $\chi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Pokazane zostało, że ani jeden ani dwa kolory nie wystarczą do pokolorowania płaszczyzny. Trzy kolory wydawały się być lepszą odpowiedzią, jednak nie każdy unit distance graph może być pokolorowany za pomocą trzech kolorów, co prowadziło do wniosku, że potrzeba co najmniej czterech kolorów do pokolorowania płaszczyzny. Dowód na to przedstawiony został za pomocą wrzeciona Moserów, który jest skończonym podgrafem nieskończonego unit distance graph płaszczyzny i którego liczba chromatyczna wynosi cztery. Górna granica została pokazana za pomocą parkietażu płaszczyzny sześciokątami foremnymi i 7-kolorowaniem powstałego obiektu. Nie jest to jedyny dowód na górny limit rozwiązań - Dan Pritikin przedstawił podobne 7-kolorowanie, które jednak było bardziej dokładne niż parkietaż sześciokątami. Chociaż przedział w którym mieszczą się rozwiązania problemu Hadwigera-Nelsona jest niewielki, probolem pozostaje nierozwiązany od jego publikacji, od której minęło ponad 50 lat. Pomimo tego, że za górny limit dla rozwiązań uznajemy siedem, kolorowanie zaproponowane przez Pritikina daje nam podstawy sądzić, że sześć kolorów wystarczy do pokolorwania płaszczyzny. Niestety, jako że ilość wierzchołków użytych przez Pritikina jest bardzo duża, nie jest łatwo wykorzystać tę wiedzę w dalszej eksploracji. Problem Hadwigera-Nelsona możemy także rozważyć w przestrzeni, zamiast na płaszczyźnie. W 3-wymiarowej przestrzeni, dolny limit dla rozwiązań jest większy bądź równy 5, co zostało udowodnione w roku 1970 przez Raiskii'ego (Jensen i Toft, 1995). Dolny limit można udowodnić także za pomocą trójwymiarowego odpowiednika wrzeciona Moserów. Górna granica jest mniejsza bądź równa 18 i znajduje się ją za pomocą kolorowania krat i podkrat (Coulson, 2002). Problem może być jeszcze bardziej uogólniony, jeśli rozważymy go w n-wymiarowej przestrzeni, dla którego to przypadku dolny limit został udowodniony przez Frankla i Wilsona w roku 1981 a górny przez Larmana i Rogersa w roku 1972.

7 Wykaz źródeł

1. Axenovich, M., Choi, J., Lastrina, M., McKay, T., Smith, J., i Stanton, B. (2011) *On the chromatic number of subsets of the Euclidean plane*, [online] p.6-7. Dostępne na: http://www.math.kit.edu/iag6/ axenovich/media/euclid-submitted-4-2011.pdf [Dostęp: 26.01.17].

2. Coulson, D. (2002). A 15-colouring of 3-space omitting distance one. *Discrete Mathematics*, 256(1), p.84.

3. Cranston, D.W. i Rabern, L. (2014). *Brooks' Theorem and Beyond* [online] Dostępne na: https://arxiv.org/abs/1403.0479v1 [Dostęp: 24.02.17]

4. Gorgol, I. (2007). *Wstęp do teorii grafów. Drzewa.* [online] Dostępne na: http://antenor.pol.lublin.pl/users/gorgol/grafy-druk.pdf [Dostęp: 22.02.17]

5. Jensen, T. (2010). *Problem of Coloring the Plane* [online] Dostępne na: http://webbuild.knu.ac.kr/ trj/HN.pdf [Dostęp: 25.02.17]

6. Jensen, T.R. i Toft, B. (1995). Graph Coloring Problems. New York: Wiley-Interscience, p.150.

7. Jensen, T.R. i Toft, B. (1995). Graph Coloring Problems. New York: Wiley-Interscience, p.151-152.

8. Pitera, M. (2014). *Kolorowe kwadraty*, [online] Dostępne na: http://sem.edu.pl/konferencja-2014/materialy/Marcin_Pitera.pdf [Dostęp: 23.02.17].

9. Pritikin, D. (1998). All Unit-Distance Graphs of Order 6197 Are 6-Colorable. *Journal of Combinatorial Theory*, 73(2), p.159-163.

10. Weisstein, E.W. (2005). *Chromatic Number* [online] Dostępne na: http://mathworld.wolfram.com/Chrom [Dostęp: 25.01.17]

11. Xiang, L. (2009).*A formal proof of the four color theorem* [online] Dostępne na: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0905/0905.3713.pdf [Dostęp: 24.02.17]