ZADZIWIAJĄCY TRÓJKĄT PASCALA

Autorzy: **Jan Dąbrowski**
Jan Wierzbicki

Gimnazjum im. Jana Matejki w Zabierzowie
2016/2017

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Z trójkątem Pascala zetknęliśmy się po raz pierwszy czytając projekt kolegów z naszej szkoły. Temat bardzo nas zainteresował i zainspirował do napisania własnej pracy. Naszym celem jest zapoznanie czytelnika nie tylko z definicją i ogólnie znanymi faktami na temat wspomnianego trójkąta. Przedstawimy przede wszystkim związki trójkąta Pascala z innymi zagadnieniami geometrycznymi i algebraicznymi. Niektóre własności odkryliśmy sami i z nich jesteśmy najbardziej dumni. Opisaliśmy je jako *spostrzeżenia*. Znalezione w różnych źródłach opisaliśmy jako *związki*.

W naszej pracy przytaczamy osiągnięcia wielu znanych i mniej znanych gimnazjalistom naukowców. Zaspokajając naturalną ciekawość podajemy krótkie notki biograficzne, które mogą być inspiracją do kolejnych projektów naszych kolegów i koleżanek.

Trójkąt Pascala

Blaise Pascal (1623 – 1662) był francuskim filozofem, matematykiem, pisarzem i fizykiem. Tematem jego badań były m. in. prawdopodobieństwo, próżnia i ciśnienie atmosferyczne. Na jego cześć nazwano jednostkę ciśnienia (*paskal*) oraz język programowania (*Pascal*). Wymyślił pierwszą ruletkę oraz tzw. Pascalinę, pierwszą maszynę liczącą, która potrafiła dodawać. Odkrył tzw. Prawo Pascala. Wybudował w 1662 roku pierwszą linię komunikacji miejskiej, po której kursował omnibus projektu Blaise Pascala. Do matematyki wprowadził obiekty nazwane potem ślimakiem Pascala i trójkątem Pascala.

Definicja
Trójkąt Pascala to trójkątna tablica składająca się z liczb ułożonych według następującego schematu: w wierzchołku trójkąta oraz na jego dwóch bokach są jedynki. Reszta liczb powstaje w ten sposób, że liczba będąca w kolejnym rzędzie jest sumą dwóch liczb, które znajdują się bezpośrednio nad nią.

1

1 1

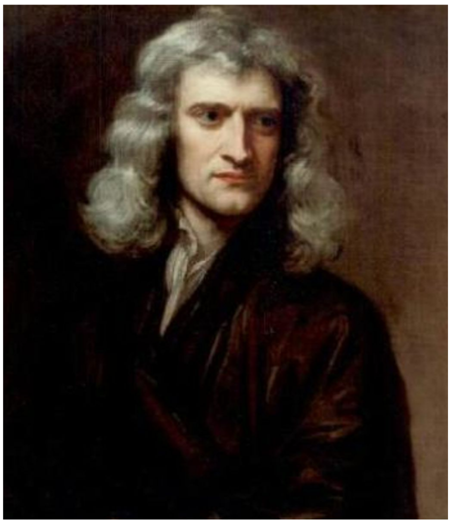
1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Dwumian Newtona



Isaac Newton (1642-1727) był angielskim fizykiem, matematykiem, astronomem, filozofem oraz historykiem i badaczem Biblii. Znany jest przede wszystkim z odkrytych trzech zasad dynamiki, zasady zachowania pędu oraz momentu pędu. Na jego cześć nazwano jednostkę siły (*Niuton*). Głosił, że światło ma naturę korpuskularną. Zajmował się też pomiarami prędkości dźwięku. Jako pierwszy matematycznie opisał zjawisko pływów morskich. Do matematyki wprowadził rachunek różniczkowy i całkowy co dało możliwości do tworzenia nowych teorii naukowych w analizie matematycznej. Sformułował twierdzenie o dwumianie.

Symbol $\binom{n}{k}$ (czytamy *n nad k* lub *k pod n*), nazywany jest **współczynnikiem dwumianowym** lub **dwumianem Newtona**, jest to funkcja dwóch argumentów całkowitych nieujemnych takich, że:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zapis *n!* (czytamy *n silnia*) jest równy iloczynowi liczb naturalnych od 1 do n, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Gdy n=0, 0!=1.

Przykład: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10,$

***Związek 0** z Trójkątem Pascala*

Zapis $\binom{5}{2}$ oznacza, że druga liczba piątego wiersza, gdzie jedynki na lewym boku są uznawane jako zerowa liczba danego wersu, równa się *10*, czyli wartości współczynnika $\binom{5}{2}$. Ogólnie zachodzi związek $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, że *k*-ta liczba *n*-tego wiersza, gdzie jedynki na lewym boku są uznawane jako zerowa liczba danego wersu, równa się $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Oprócz rachunku prawdopodobieństwa Dwumian Newtona znajduje ciekawe zastosowanie w algebrze. W szkole poznajemy tzw. wzory skróconego mnożenia na kwadrat sumy i różnicy dwóch wyrażeń. Jednak co wtedy gdy chcielibyśmy wyprowadzić wzór na $(x+y)^7$? Wtedy przydają się następujące wzory:

$$(x+y)^n = \binom{n}{o} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \ldots + \binom{n}{n} y^n$$

$$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}(-y) + \binom{n}{2} x^{n-2}(-y)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + \binom{n}{n} (-y)^n$$

Powyższe związki można zapisać za pomocą jednego wzoru:

$$(x+y)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Związek 1 *z Trójkątem Pascala*

Wskazana tutaj zależność podobnie jak Związek 0 dotyczy położenia liczb w trójkącie Pascala. Najlepiej jak pokażemy to na przykładzie. Zaznaczyliśmy odpowiednimi kolorami liczby, które występują w wielomianie i w trójkącie Pascala.

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

0.						1						
1.					1		1					
2.				1		2		1				
3.			1		3		3		1			
4.		1		4		6		4		1		
5.	1		5		10		10		5		1	

Dzięki rozpisaniu liczb w trójkącie Pascala możemy szybko i poprawnie podać wielomian odpowiadający wspomnianemu powyżej $(x+y)^7$.

Ciekawostka

Symbol Newtona określa ilość **kombinacji**, czyli ilość podzbiorów k-elementowych stworzonych w n-elementowym zbiorze. Po polsku zapisujemy $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, po angielsku ${}^nC_k$, po amerykańsku ${}_nC_k$ (*n brane pod k*).

Przykład:

Policzmy ile jest kombinacji *3*-elementowych w zbiorze *4*-elementowym.

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Mając dany zbiór 4-elementowy {a,b,c,d} możemy ułożyć następujące 3-elementowe podzbiory: {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}. Jeżeli kolejność elementów w podzbiorach ma dla nas znaczenie, wtedy taką kombinację k-elementową ze zbioru n-elementowego określa się **wariacją bez powtórzeń** i oblicza ze wzoru:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ilość wariacji jest większa od kombinacji tylokrotnie, ile jest różnych **permutacji**, czyli kombinacji *k*-elementowych ze zbioru *k*-elementowego, określanej wzorem $P_k = k!$ Zatem:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

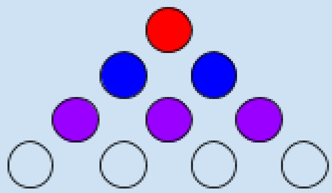
Możemy jeszcze obliczyć **wariację z powtórzeniami** *k*-elementów ze zbioru *n*-elementowego ze wzoru

$$\overline{V_k^n} = n^k$$

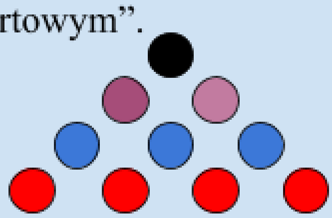
Liczby geometryczne

Trzy punkty można ułożyć w trójkąt, cztery w kwadrat, pięć w pięciokąt itd. Można więc 3 uważać za liczbę trójkątną, 4 za czworokątną, 5 za pięciokątną itd. Rysunki poniżej pokazują, jak można, rysując kropki, określić inne **liczby geometryczne** inaczej wielokątne. W podobny sposób można układać z punktów wielościany. Wtedy otrzymalibyśmy liczby wielościenne.

Punkt startowy, czyli 1
Do punktu 1 dokładamy 2 punkty i otrzymujemy razem 3
W następnym wierszu dokładamy 3 punkty i razem otrzymujemy ich 6 , itd.

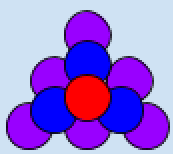


Liczby trójkątne powstają przy dodaniu punktów z danego i poprzednich wierszy, kończąc na wierszu 1, czyli "punkcie startowym".

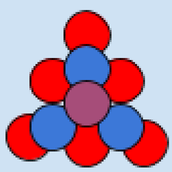


Czwarta liczba trójkątna to:
4+3+2+1=10

Punkt startowy, czyli 1
Do punktu 1 dokładamy 3 punkty i otrzymujemy razem 4
W następnej warstwie dokładamy 6 punkty i razem otrzymujemy ich 10 , itd.



Liczby czworościenne powstają przy dodaniu punktów z danej i poprzedniej warstwy, kończąc na warstwie 1, czyli "punkcie startowym".



Trzecia liczba czworościenna to:
6+3+1=10

***Związek 2** z Trójkątem Pascala*

W Trójkącie Pascala mamy następujące rzędy liczb:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- boki trójkąta tworzą jedynki,
- drugimi rzędami są kolejne liczby naturalne - 1,2,3,4,5,6,... (n)
- następny rząd tworzą liczby trójkątne - 1,3,6,10,15… (n?)
- kolejny rząd to liczby czworościenne - 1,4,10,20,35… (1?+...+(n-1)?+n?)

Spostrzeżenie 1

W trójkącie Pascala nie ma rzędu liczb kwadratowych.

Stosując wcześniejsze wzory na Dwumian Newtona można wprowadzić wzór:

$$n^2 = \binom{n+2}{n-1} - \binom{n}{n-3}$$

Dowód:

$$\binom{n+2}{n-1} - \binom{n}{n-3} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!\cdot(n+2-n+1)!} - \frac{n!}{(n-3)!\cdot(n-n+3)!} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3!} - \frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3!} = n^2$$

Spostrzeżenie 1

Obserwując liczby w trójkącie Pascala zauważyliśmy następującą własność $\binom{n}{2}$ = (n-1)?, gdzie "?" oznacza słabnię zdefiniowaną jako *n?=1+ 2+ +3+...+n.*

Co dało nam możliwość odkrycia następującego wzoru:

$$n? = \binom{n+1}{n-1}$$

Dowód:

$$\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot(n+1-n+1)!} = \frac{n\cdot(n+1)}{2!} = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = 1 + 2 + ... + n$$

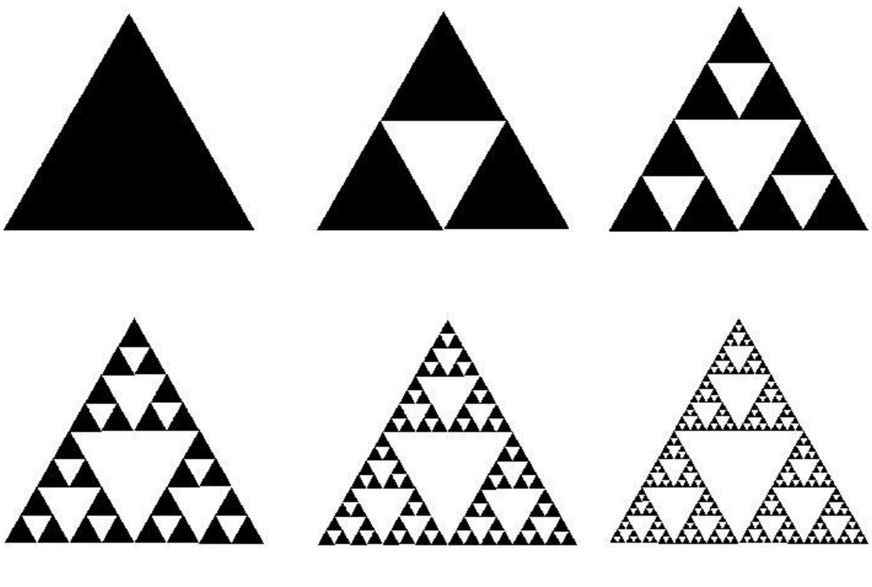
Trójkąt Sierpińskiego

Wacław Sierpiński (1882-1969) polski matematyk, jeden z czołowych przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej i twórców tzw. *Polskiej Szkoły Matematycznej*. Pozostawił olbrzymi dorobek naukowy, obejmujący wiele książek, 724 prace i komunikaty, 113 artykułów i 13 skryptów. Prace te dotyczyły teorii liczb, analizy matematycznej, ogólnej i opisowej teorii mnogości, topologii mnogościowej, teorii miary i kategorii oraz teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

Definicja

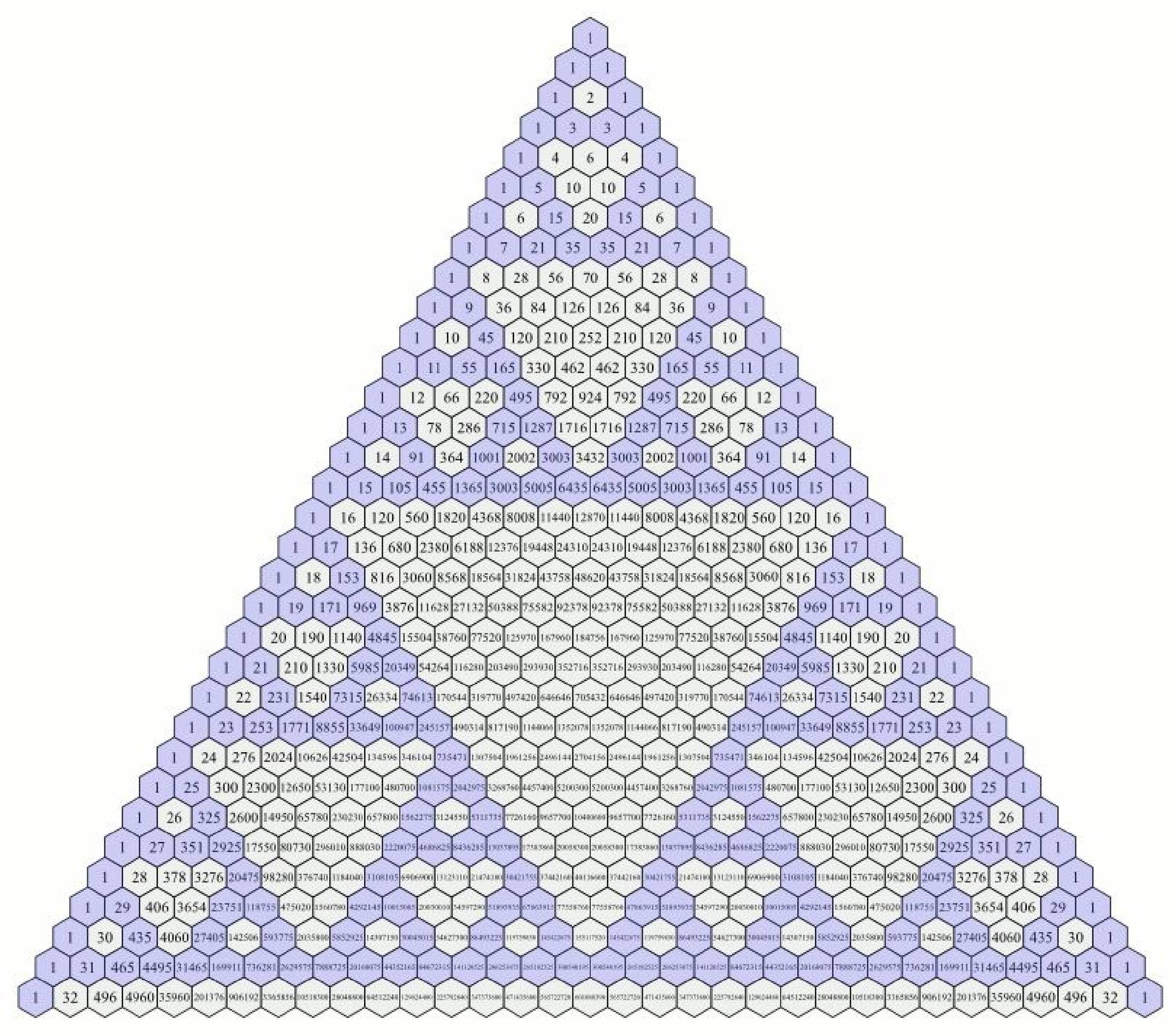
Trójkąt Sierpińskiego to taki trójkąt równoboczny poddawany następującym zmianom: łączymy środki boków, dzieląc trójkąt na 4 przystające i podobne do wyjściowego. Środkowy usuwamy i powtarzamy tą czynność na pozostałych.

Jak widać nasz trójkąt jest coraz bardziej „dziurawy”. Jednocześnie każdy element trójkąta jest samopodobny do figury wyjściowej. Taką figurę nazywany fraktalem.



***Związek 3** z Trójkątem Pascala*

Jeżeli pomalujemy liczby parzyste na jasno a nieparzyste na ciemno fioletowo w trójkącie Pascala to otrzymamy układ podobny do fraktala trójkąta Sierpińskiego.



Ciąg Fibonacciego

Leonardo Fibonacci z Pizy (1175 – 1250) włoski matematyk. Jako syn kupca Bonacciego, dużo podróżował najpierw razem z ojcem, później samodzielnie, odwiedzając i kształcąc się w takich miejscach jak Egipt, Syria, Prowansja, Grecja, Sycylia.

Definicja

Ciąg liczb naturalnych 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55… określony rekurencyjnie w następujący sposób:
-pierwszy wyraz jest równy 0, drugi 1,
-kolejny to suma 2 poprzednich.

Ciekawostka

Jeżeli obliczylibyśmy ilorazy dwóch kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego to okazuje się, że im większe weźmiemy wyrazy tego ciągu tym dokładniejsze otrzymamy przybliżenie liczby ϕ (*czytamy phi*) zwanej złotą liczbą.

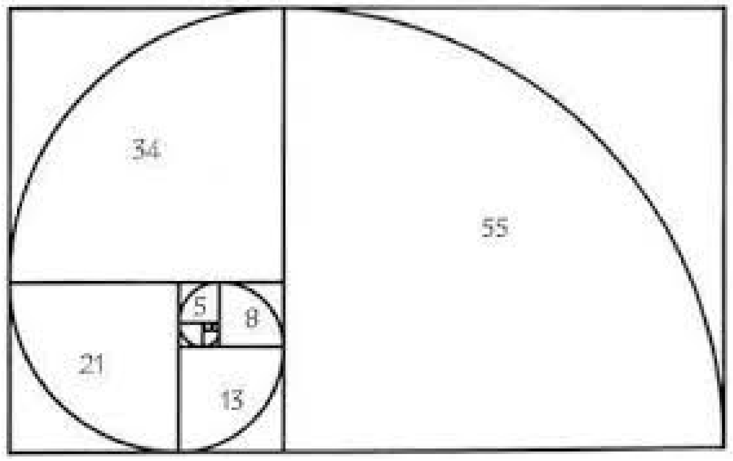
$$\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1.6180339887498948482045868 34...$$

Złota liczba związana jest ze złotym podziałem odcinka. Liczby a i b są w złotym stosunku jeśli spełnione jest równanie:

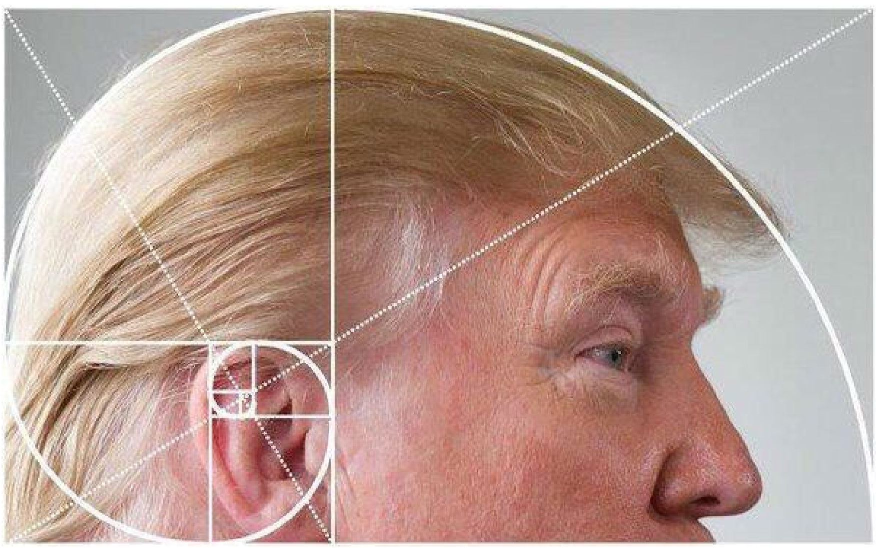
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Jeżeli przyjmiemy, że b=1 wtedy dodatnim rozwiązaniem powyższego równania będzie właśnie liczba $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$.

A oto złoty prostokąt, na którym zaznaczono kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Rysując odpowiednio łuki w prostokącie otrzymamy również złotą spiralę.

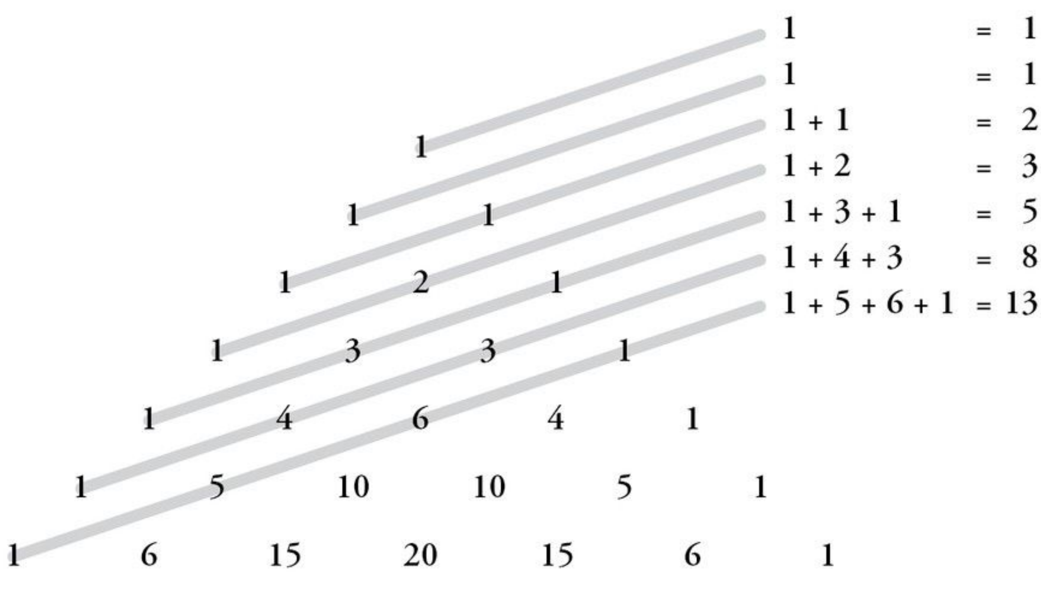


Czy Donald Trump ma coś wspólnego ze złotym podziałem to się okaże :)



Związek 4 *z Trójkątem Pascala*

Jeśli zsumujemy liczby występujące po skosach w trójkącie Pascala to otrzymamy kolejne liczby ciągu Fibonacciego



Związek 5 *z Trójkątem Pascala*

W trójkącie Pascala możemy zauważyć również, że sumy liczb w wierszach są kolejnymi potęgami liczby 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & =1=2^0= S_0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & =2=2^1=S_1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & =4=2^2=S_2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & =8=2^3=S_3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & =16=2^4=S_4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & =32=2^5=S_5
\end{array}
$$

Co oznacza, że każda następna suma będzie dwa razy większa od poprzedniej.

$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

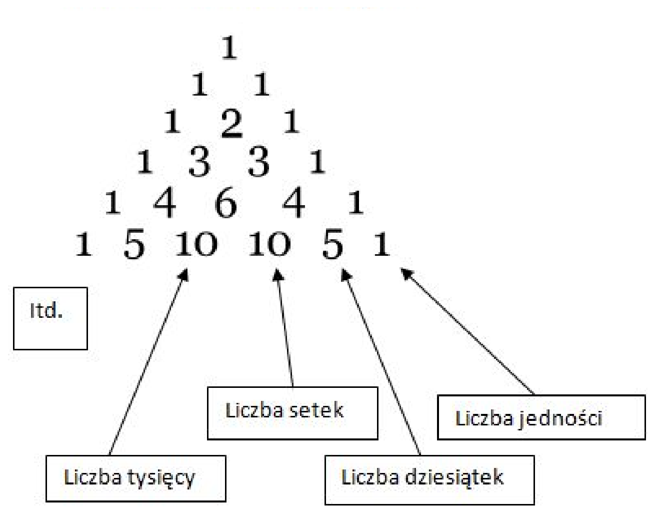
a więc

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2S_n$$

Spostrzeżenie 2

Gdybyśmy czytali liczby w wierszach trójkąta Pascala jako liczbę w systemie pozycyjnym to następne “wierszoliczby” są 11 razy większe od poprzedniej “wierszoliczby”.

$R_0 = 1$
$R_1 = 1 \times 11 = 11$
$R_2 = 11 \times 11 = 121$
$R_3 = 121 \times 11 = 1331$
$R_4 = 1331 \times 11 = 14641$
$R_5 = 14641 \times 11 = 161051$



$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{10^n}{10^k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} 10^j$$

W tym i kolejnych przypadkach iloczyn będzie liczbą budowaną w sposób pokazany na powyższym rysunku

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{10^{n+1}}{10^k} = 11 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{10^n}{10^k} = 11\, R_n$$

Trójkąty Jasia

Utwórzmy nieco zmieniony trójkąt. Wyrazy poniżej również są sumą wyrazów powyżej. Niech czytelnik odgadnie regułę tworzenia kolejnych wierszy.

	Suma:	Liczby utworzone:
1	**=1**	**1**
1 1 1	**=3**	**111**
1 2 3 2 1	**=9**	**12321**
1 3 6 7 6 3 1	**=27**	**1367631**
1 4 10 16 19 16 10 4 1	**=81**	**151807041**
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1	**=243**	
	Itd.	

Spostrzeżenie 4

Można zauważyć, że suma liczb w kolejnych wierszach jest potęgą liczby 3. Taki trójkąt nazwaliśmy L=3 a Trójkąt Pascala jest więc trójkątem typu L=2.

Podobnie jak w ***Spostrzeżeniu 2*** dla trójkąta L=2, w trójkącie L=3 możemy stwierdzić, że cyfry z każdego kolejnego wiersza układają się w "wierszo-liczby" 111 razy większe od poprzedniej "wierszoliczby".

$1 \times 111 = 111$

$111 \times 111 = 12321$ itd.

1 =1

1 1 1 1 =4

1 2 3 4 3 2 1 =16

3 6 10 12 12 10 6 3 1

Kolejnym Trójkątem Jasia trójkąt L=4, w którym sumy liczb w kolejnych wierszach to potęgi 4. Również tutaj poprawny jest wzór: $S_n = L^n$, gdzie S_n oznacza sumę liczb w wierszu.
W tych trójkątach także występują liczby wielokątne.
Natomiast liczby utworzone z cyfr w kolejnych wierszach tworzą liczby 1111 razy większe.
Własność ta powtarza się w każdym tak zbudowanym trójkącie o L naturalnym.

$$R_{L,n+1} = R_{L,n} \times \sum_{t=0}^{L} 10^t$$

$R_{L,n}$ - liczba utworzona przez cyfry w n-tym wierszu

Zakończenie

I czas na zakończenie. Cały czas pracujemy nad swoim projektem szukając innych ciekawych własności i związków Trójkąta Pascala z kolejnymi zagadnieniami matematycznymi.

Jak do tej pory poszerzyliśmy znacznie swoją wiedzę o tematy wykraczające poza szkolną matematykę (silnie, słabnie, dwumiany Newtona, złota liczba, ciągi i granice, fraktale, liczby wielokątne i wielościenne). Staraliśmy się spisywać własne spostrzeżenia. I to jest najbardziej fascynujące. Dodatkowo nauczyliśmy się zapisywać skomplikowane wzory, które teraz są dla nas czytelne i na swój sposób ładne. Wykonaliśmy stosowne rysunki. I przekopaliśmy niemal cały Internet :)

Zatem ciąg dalszy nastąpi.

Bibliografia

www.wikipedia.pl
www.delta.edu.pl
"Księga liczb", J.H.Conway, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1999
Magazyn Miłośników Matematyki 2004, nr 3