Andrzej Ubik

klasa V, Szkoła Podstawowa nr 41 im. Jana Kochanowskiego w Krakowie

Słowo o teorii strategii zwycięstw i porażek

Kraków, styczeń 2016

Spis treści

I. Wstęp
II. Co to jest strategia wygrywająca?
III. Gry znane w literaturze
IV. Moje uogólnienia
V. Startegie przegrywające
VI. Dodatek

Wstęp

Niniejsza praca dotyczy pewnego zagadnienia z teorii gier, a mianowicie istnienia strategii wygrywającej. Strategia wygrywająca to szereg reguł, dzięki którym bez względu na to, co zrobi nasz przeciwnik, wygramy. Postanowiłem napisać pracę na ten temat, gdyż lubię wygrywać.

Na początku pracy przedstawiam zasady klasycznych gier dwuosobowych. Opisy tych gier dostępne są w literaturze (np. w [1]), ale samodzielne znalezienie właściwych dla nich strategii wygrywających potraktowałem jako ćwiczenie i rozgrzewkę. W dalszej części pracy opisuję moje uogólnienia gier z poprzedniego rozdziału. Dla nich również znajduję strategie wygrywające.
W ostatniej części pracy skupiam się na strategiach przegrywających .

Czytelnikowi życzę miłego zagłębiania się w lekturę!

I. Co to jest strategia wygrywająca?

Strategia wygrywająca to algorytm, dzięki któremu za każdym razem wygramy w danej grze, bez względu na ruchy przeciwnika. Pojęcie strategii wygrywającej często jest mylone ze sposobem gry, który da nam szanse wygrane większe niż przeciwnikowi. Żeby to zobrazować przyjrzyjmy się następującemu przykładowi. W filmie *Oszukać System* Brian Brushwood pokazuje sposób, jak grać w Papier-Kamień-Nożyce. Okazuje się, że ludzie, którzy wygrają daną rundę, najczęściej powtarzają ruch w kolejnej, podczas gdy ci, którzy rundę przegrają, zmieniają wybór w określonej kolejności: kamień na papier, papier na nożyce, nożyce na kamień. Dzięki tej informacji iluzjoniście udało się wygrać ze wszystkimi osobami biorącymi udział w eksperymencie. Ten sposób jest ciekawy, ale z punktu widzenia matematyki **nie** jest strategią wygrywającą, ponieważ on tylko zwiększa prawdopodobieństwo wygranej, a nie ją zapewnia.

II. Gry znane w literaturze

1. Gra w „-1, -2”

Opis gry

Na stole leży dziesięć żołnierzyków: pięć jednego gracza i pięć drugiego gracza. W grze bierze udział dwóch graczy. W każdym ruchu gracz zabiera ze stołu jednego lub dwa żołnierzyki. Wygrywa ten, kto zabierze ze stołu ostatniego żołnierzyka.

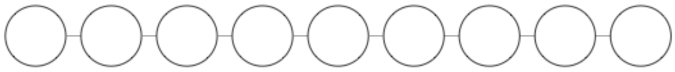
Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą ma gracz pierwszy. W pierwszym ruchu powinien on zabrać jednego żołnierzyka a następnie odwracać ruchy przeciwnika, to znaczy brać jednego żołnierzyka, gdy on bierze dwa i brać dwa, kiedy on bierze jednego. W ten sposób po ruchach gracza pierwszego na stole będzie odpowiednio: dziewięć, sześć, trzy i zero żołnierzyków. Zauważmy ponadto, że liczba żołnierzyków bezpośrednio po ruchu drugiego gracza nigdy nie będzie liczbą podzielną przez trzy, a więc nie może on dojść do zera jako pierwszy.

2. Grim

Opis gry

Mamy dziewięć koralików nawiniętych na sznur, tak jak na poniższym rysunku.
Ruch polega na na zebraniu koralika ze stołu. Nie wolno jednak zabierać koralika, który nie jest połączony z żadnym innym. Przegrywa ten, który jako pierwszy nie może wykonać ruchu.



Rys. 1 Koraliki do gry Grim

Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą posiada gracz pierwszy. Jeśli najpierw podzieli on sznur na dwie takie same części, zabierając środkowy koralik a następnie będzie on odbijał ruchy przeciwnika w symetrii względem środka korali, po każdym ruchu pierwszego gracza sytuacja będzie symetryczna względem środka. Zatem, dopóki gracz drugi jest w stanie wykonać ruch, gracz pierwszy może go odbić. Ponieważ liczba koralików zmniejsza się, gra musi się kiedyś skończyć. Jeśli gracz pierwszy będzie grał zgodnie z tą strategią, uniemożliwi wygraną graczowi drugiemu, zapewniając sobie zwycięstwo.

Zauważmy, że powyższa strategia wygrywająca działa, jeśli na początku na stole jest dowolna rożna od 1 nieparzysta liczba koralików. Przeglądając literaturę dowiedziałem się, że ten problem jest bardzo trudny (a nawet częściowo otwarty), jeśli na stole na początku jest parzysta liczba koralików (2).

Podobna strategia jest dobra w grze Monety na Stół.

3. **Monety na Stół**

Opis gry

Dwóch graczy na przemian kładzie na stole monety jednogroszowe w taki sposób, aby dokładana moneta w całości znajdowała się na stole oraz nie nachodziła na monety już tam położone. Wygrywa ten z graczy, który jako ostatni jest w stanie dołożyć monetę.

Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą ma gracz pierwszy. W pierwszym ruchu powinien on położyć monetę dokładnie na środku stołu, a później odbijać ruchy przeciwnika w symetrii względem środka stołu. W ten sposób, po każdym ruchu pierwszego gracza monety ułożone na stole będą tworzyć kształt symetryczny względem środka. Wynika stąd, że jeśli drugi gracz jest w stanie wykonać ruch, to pierwszy może rozpocząć następna kolejkę. Ponieważ na stole zmieści się tylko skończona liczba monet, gra musi się kiedyś zakończyć, a więc opisana strategia doprowadzi gracza pierwszego do wygranej.

4. **Zatruta Czekolada**

Opis gry

Dana jest tabliczka czekolady o wymiarach 8x5. Jedna kostka (w prawym górnym rogu) jest zatruta. Na początku jest dwóch graczy (później tylko jeden). Każdy z nich w swoim ruchu może wziąć dowolną ilość czekolady byle linia złamania była linią prostą. Przegrywa osoba, która zje zatrutą kostkę.

Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą posiada gracz pierwszy. Sprowadza on tabliczkę do tabliczki o wymiarach 5x5, czyli do kwadratu. W ten sposób po każdym ruchu gracza drugiego, tabliczka nie jest kwadratowa, a więc gracz pierwszy nie musi jeść zatrutej kostki. Czekolada musi się kiedyś skończyć, a więc któryś z graczy przegra. Nie będzie to gracz pierwszy, więc będzie to gracz drugi.

III. Moje uogólnienia

A. Uogólnienia gry „-1,-2”

1. „-1, -2 z wymuszeniem”

Opis gry

W grze bierze udział dwóch graczy. Początkowo na stole leży dziesięć monet. Gracze na przemian zabierają lub dokładają monety. Kto zabierze ostatnią monetę, wygrywa. W jednym ruchu można zabrać jedną lub dwie monety, albo dołożyć jedną monetę na stół. Jeśli przeciwnik doda monetę, to druga osoba musi w następnym ruchu zabrać dwie monety.

Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą ma gracz pierwszy. Na początku dodaje jedną monetę, a więc na stole będzie ich jedenaście. Drugi gracz musi zabrać dwie monety. W następnej kolejce gracz pierwszy znowu dodaje jedną monetę. Po jego drugim ruchu na stole jest dziesięć monet. Gracz pierwszy powinien grać w ten sposób (to znaczy cały czas dodawać monetę), aż na stole po ruchu gracza drugiego zostaną dwie monety. Wtedy gracz pierwszy powinien wziąć obie monety.

2. Gra bez strategii wygrywającej

Opis gry

Na stole jest dziesięć kartoników soczku. W grze bierze udział dwóch graczy. Próbują oni dojść do sytuacji, gdy na stole nie ma soczków, to znaczy wygrywa ten, który weźmie ostatni soczek. W jednym ruchu zabieramy dwa albo jeden soczek lub dodajemy jeden soczek. W przeciwieństwie do poprzedniej gry, dodanie soczku przez któregoś z graczy, nie powoduje zmian w możliwościach ruchów przeciwnika.

Ta gra nauczyła mnie jednej ważnej rzeczy: **nie we wszystkich grach któryś z graczy ma strategię wygrywającą!**
W tej grze strategii nie ma. Może się ona toczyć bez końca. Zauważmy, że jeśli na stole są cztery soczki, to po następnym ruchu może ich być pięć, a jeśli na stole jest pięć soczków, to po następnym ruchu może ich być cztery.
Dzięki możliwości dodawania soczku, każdy z graczy może zapewnić sobie, że po jego ruchu na stole są co najmniej cztery soczki lub nie ma ich w ogóle. Obaj gracze mają zatem strategię nieprzygrywającą, więc żaden nie ma strategii wygrywającej.

3. „-1,-2” raz jeszcze

Opis gry

Do gry „-1,-2” dodajmy następującą regułę: jeśli któryś z graczy w swoim ruchu ma przed sobą dokładnie trzy soczki, to może wziąć wszystkie trzy.

Strategia wygrywająca

Twierdzimy że strategię wygrywającą ma gracz drugi: jeśli przez dwie pierwsze kolejki będzie on wykonywał ruchy przeciwne do gracza pierwszego, to niezależnie od wyboru pierwszego gracza, gdy się one zakończą, to na stole zostaną cztery soczki. W tej sytuacji gracz pierwszy może wziąć albo jeden albo dwa soczki. W obu przypadkach gracz drugi wygrywa.

4. Zastanówmy się, ile żołnierzyków w klasycznej grze „-2, -1” musi leżeć na stole, aby strategię wygrywającą miał gracz drugi.

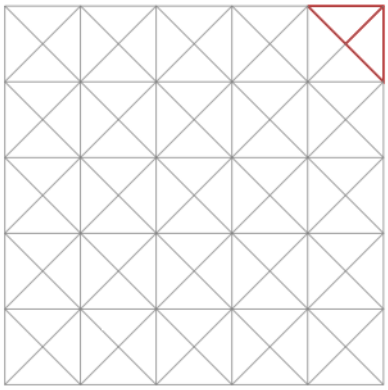
Zauważmy, że jeśli początkowo na stole leży podzielna przez trzy liczba żołnierzyków, to wygra gracz drugi. Niezależnie od ruchu gracza pierwszego, gracz drugi bezpośrednio przed swoim ruchem będzie miał przed sobą liczbę żołnierzyków niepodzielną przez trzy. Zatem będzie ona dawała z dzielenia przez trzy resztę 1 lub 2. W pierwszym przypadku gracz drugi musi odjąć 1, a w drugim 2. W ten sposób otrzyma liczbę podzielna przez trzy i ponownie uniemożliwi otrzymanie takiej liczby graczowi pierwszemu. Ponieważ 0 jest podzielne przez trzy, gracz pierwszy nie może go osiągnąć. Zauważmy ponadto, że liczba żołnierzyków na stole zmniejsza się przy każdym ruchu, więc gra kiedyś się zakończy. Zatem ktoś musi wygrać i nie może to być gracz pierwszy, więc musi to być gracz drugi.

B. Uogólnienia do gry w Zatrutą Czekoladę

1. Czekolada z ukośnymi łamaniami

Opis gry

Zasady gry są podobne do zwykłej gry w czekoladę, jednak w każdym ruchu można łamać po liniach pionowych poziomych lub ukośnych, takich jak na poniższym rysunku. Zatrute są tym razem dwie trójkątne kostki oznaczone niżej kolorem czerwonym.



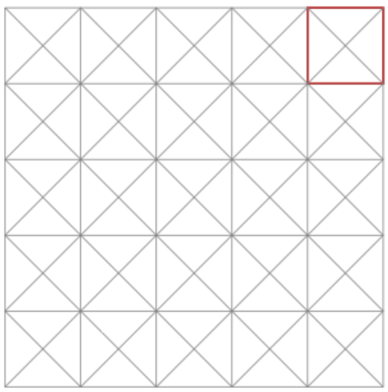
Rys. 2 Zmodyfikowana tabliczka czekolady

Strategia wygrywająca

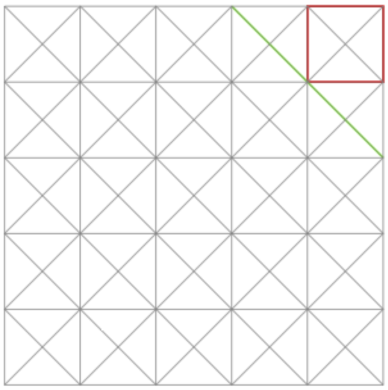
Strategię wygrywającą ma gracz pierwszy, ponieważ może on zabrać wszystko poza zatrutą częścią.

2. Czekolada z ukośnymi łamaniami II

Zajmijmy się zatem ciekawszym przypadkiem. Tym razem zatrute są cztery kostki w prawym górnym rogu, tak jak na Rys. 3.



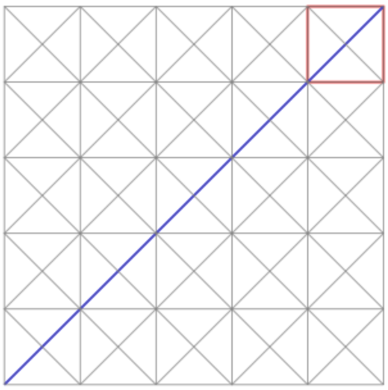
Rys. 3 Kolejna zmodyfikowana tabliczka czekolady.



Rys. 4 Pierwsze łamanie pierwszego gracza przy założeniu, że gra on zgodnie ze strategią wygrywającą.

Strategia wygrywająca

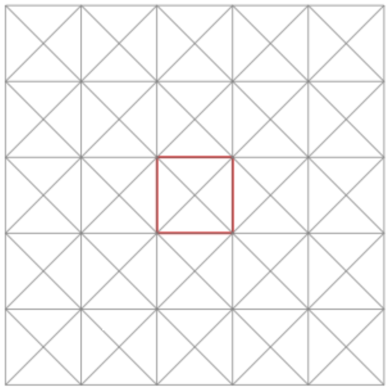
Strategię wygrywającą posiada również gracz pierwszy. Pierwsze łamanie powinien on wykonać wzdłuż linii zaznaczonej na Rys. 4 kolorem zielonym a następnie powinien odbijać ruchy przeciwnika w symetrii względem osi zaznaczonej na Rys. 5 kolorem niebieskim.



Rys. 5 Oś, względem której powinien odbijać ruchy gracz pierwszy w drugim ruchu.

Opis gry

Tym razem zatrute są kostki zaznaczone na poniższym rysunku.



Rys. 6 Kolejna zmodyfikowana tabliczka czekolady.

Strategia wygrywająca

Strategię wygrywającą ma gracz drugi. Polega ona na odbijaniu ruchów gracza pierwszego w symetrii względem środka czekolady.

IV. Strategie przegrywające

Wyobraźmy sobie, że gramy z małym dzieckiem, które chce za wszelką cenę wygrać. Niestety nie jest mu łatwo, ponieważ nie ma wprawy. Dlatego musimy znaleźć algorytm, który zapewni nam przegraną niezależnie od tego, jakie ruchy wykona nasz przeciwnik. Znalezienie strategii przegrywającej w niektórych przypadkach jest łatwe a w niektórych nawet trudniejsze od znalezienia strategii wygrywającej.

Do gier, w których ta strategia sama się nasuwa należą wszystkie opisane wyżej gry w Czekoladę. Aby przegrać wystarczy zjeść od razu całą czekoladę. **Zauważmy że jest to jedyna strategia przegrywająca w tej grze.** Jeśli dopuścimy do tego, żeby przeciwnik mógł wykonać ruch, może on zjeść całą pozostałą część czekolady (w tym zatrute kawałki), niwecząc naszą przegraną.

Teraz zajmiemy się przypadkiem kiedy znalezienie strategii przegrywającej jest trudniejsze.

Strategia przegrywająca do gry w „-1, -2”.

Strategię przegrywającą ma gracz drugi. Powinien on wykonywać ruchy przeciwne do ruchów gracza pierwszego, to znaczy, gdy on odejmuje 1, powinien odjąć 2 a gdy on odejmuje 2, powinien odjąć 1. Dzięki takiej strategii po zakończeniu trzech tur na stole pozostanie jeden żołnierzyk i nasz przeciwnik wygra.

Strategia przegrywająca do gry w Monety na Stół.

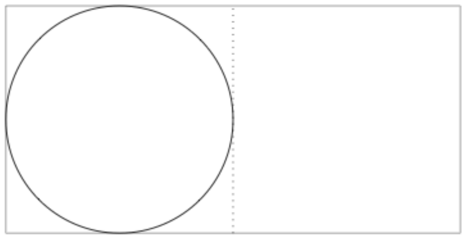
Znalezienie strategii przegrywającej w grze w Stół w ogólnym przypadku nie jest proste. Rozważmy więc kilka szczególnych przypadków, co doprowadzi nas do pewnych wniosków.

A. Załóżmy, że wszystkie boki stołu są krótsze niż 1 a moneta ma średnicę 1.

Oczywiście strategię przegrywającą ma gracz pierwszy, ponieważ gra nie może się rozpocząć. Jest to w pewnym sensie zdegenerowany przypadek. Przyjrzyjmy się ciekawszym.

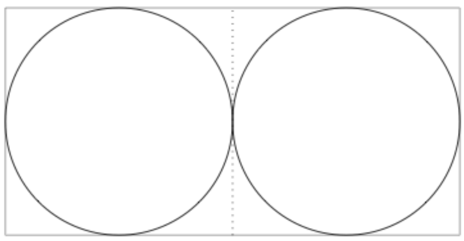
B. Załóżmy, że stół ma wymiary 2x1 a moneta ma średnicę 1.

Strategię przegrywającą ma gracz 1 wystarczy, że położy on monetę tak, aby przylegała do krawędzi stołu, tak jak na Rys. 7.



Rys. 7 Pierwszy ruch pierwszego gracza w przypadku stołu o wymiarach 2x1 i monety o średnicy 1, przy założeniu, że gra on zgodnie ze strategią przegrywającą.

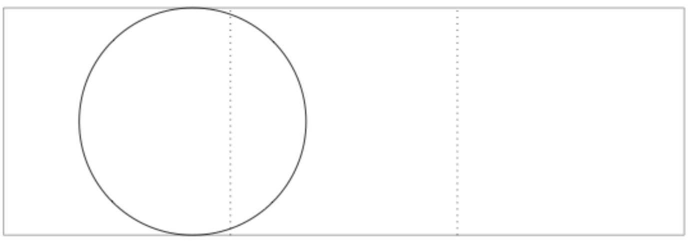
Gdy tak postąpi, umożliwi graczowi drugiemu wykonanie ruchu (obrazuje to Rys. 8), ale sam już następnego ruchu nie wykona. Wymuszony przez gracza pierwszego ruch gracza drugiego mu to uniemożliwi.



Rys. 8 Wymuszony przez gracza pierwszego pierwszy ruch gracza drugiego, przy założeniu, że pierwszy gracz gra zgodnie ze strategią przegrywającą.

C. Stół ma wymiary 3x1 a średnica monety to 1

W tym przypadku także gracz pierwszy ma strategię przegrywającą. Jego pierwszy ruch powinien wyglądać tak, jak zaprezentowano to na Rys. 9.



Rys. 9 Pierwszy ruch gracza pierwszego w przypadku stołu o wymiarach 3x1 i monety o średnicy 1, przy założeniu, że pierwszy gracz gra zgodnie ze strategią wygrywającą.

Po takim ruchu pierwszego gracza, gracz drugi musi położyć monetę po prawej stronie monety gracza pierwszego. Łatwo zauważyć, że niezależnie od tego, jak to zrobi, gracz pierwszy nie będzie mógł wykonać kolejnego ruchu.

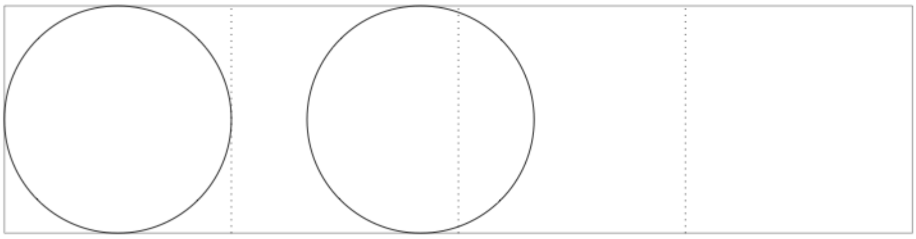
D. Stół ma wymiary 4x1 a średnica monety jest równa 1

Okazuje się, że w tym przypadku strategię przegrywającą ma gracz drugi. Aby to uzasadnić, podzielimy wszystkie możliwe pierwsze ruchy gracza pierwszego na kilka przypadków.

a. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu kładzie monetę tak, aby przylegała do lewej krawędzi stołu (pokazuje to Rys. 10).

Rys. 10 Pierwszy ruch gracza pierwszego przy wymiarach stołu 4x1 i średnicy monety 1 - przypadek pierwszy.

Wówczas gracz drugi może położyć monetę tak, jak obrazuje Rys. 11



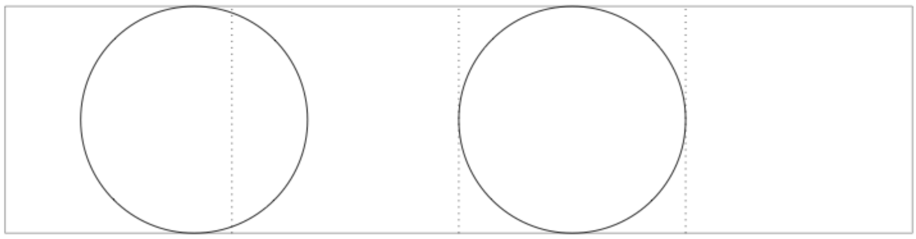
Rys. 11 Odpowiedź gracza drugiego na pierwszy ruch gracza pierwszego z przypadku a., przy założeniu, że gracz drugi gra zgodnie ze strategią przegrywającą.

Zauważmy, że w takiej sytuacji, gracz pierwszy musi położyć monetę po prawej stronie od monety gracza drugiego, ale niezależnie od tego, jak to uczyni, na drugą monetę gracza drugiego nie starczy miejsca.

b. Pierwszy gracz w pierwszym ruchu kładzie monetę pomiędzy pierwszą a drugą ćwiartką stołu, tak jak na Rys. 12.

Rys. 12 Pierwszy ruch gracza pierwszego – przypadek b.

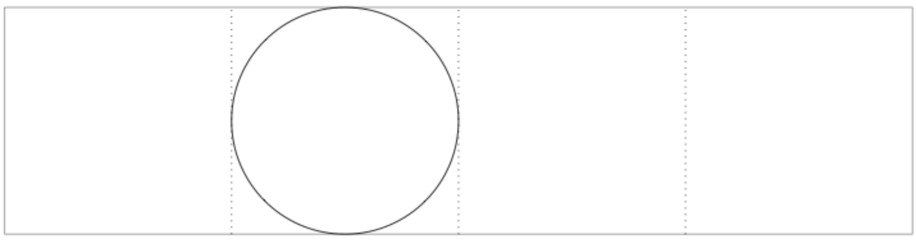
W tym przypadku gracz drugi może położyć monetę na przykład dokładnie w trzeciej ćwiartce, tak jak na Rys. 13.



Rys. 13 Odpowiedź gracza drugiego na pierwszy ruch gracza pierwszego – przypadek b.

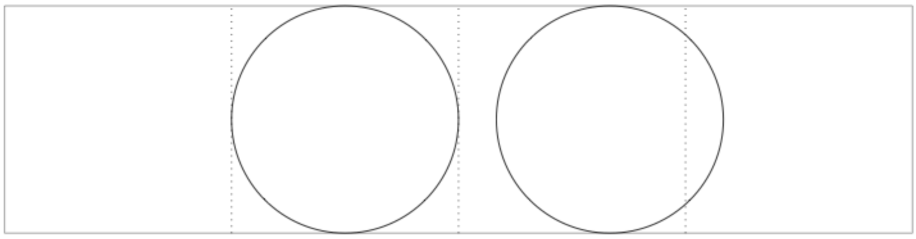
Kolej na ruch gracza pierwszego. Musi on położyć monetę bezpośrednio przy prawej krawędzi stołu. W ten sposób gracz drugi przegra.

c. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu kładzie monetę dokładnie w drugiej ćwiartce, tak jak na Rys. 14.



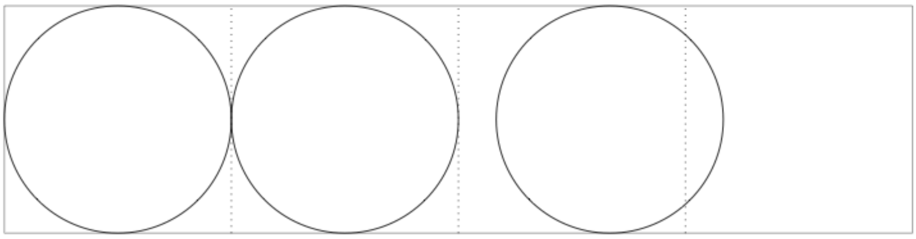
Rys. 14 Pierwszy ruch gracza pierwszego – przypadek c.

Wówczas gracz drugi może położyć monetę pomiędzy trzecią a czwartą ćwiartką, tak jak na Rys. 15.



Rys. 15 Odpowiedź gracza drugiego na pierwszy ruch gracza pierwszego – przypadek c.

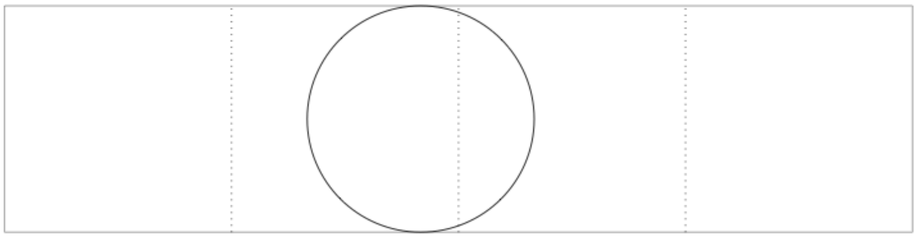
Gracz pierwszy może wówczas wykonać kolejny ruch tylko na jeden sposób. Przedstawia go Rys. 16. Wymuszony przez gracza drugiego drugi ruch gracza pierwszego.



Rys. 16

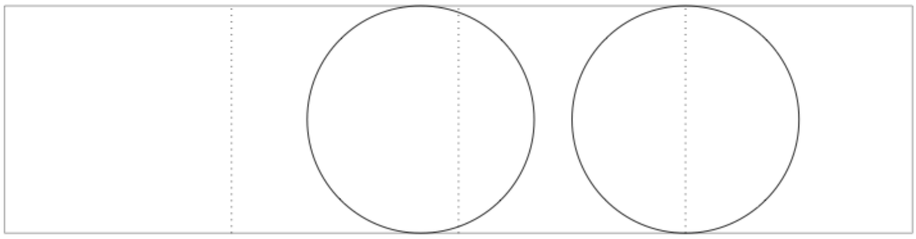
W tym przypadku znowu gracz drugi przegrywa.

d. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu kładzie monetę pomiędzy drugą a trzecią ćwiartką, tak jak na Rys. 17.



Rys. 17 Pierwszy ruch gracza pierwszego – przypadek d

Gracz drugi, aby przegrać, może postawić monetę na przykład tak, jak na Rys. 18.



Rys. 18 Odpowiedź gracza drugiego na pierwszy ruch gracza pierwszego w przypadku c.

W takiej sytuacji gracz pierwszy musi postawić monetę po lewej stronie swojej pierwszej monety. Gdy to zrobi gracz drugi przegra.

e. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu kładzie monetę po prawej stronie od środka.

Każde ułożenie monety po prawej stronie od środka ma swój symetryczny odpowiednik po lewej stronie od środka. Strategia przegrywająca gracza drugiego w tym przypadku będzie analogiczna do strategii z przypadków a, b, c i d.

Pokazaliśmy, że niezależnie od tego, jak będzie wyglądał ruch gracza pierwszego, gracz drugi znajdzie algorytm, który zapewni mu przegraną. Zatem gracz drugi ma strategię przegrywającą.

E. Stół ma wymiary 5x1 a średnica monety wynosi 1.

W tym przypadku strategię przegrywającą ma gracz pierwszy. Jeśli położy on monetę tak jak na Rys. 19, sprowadzi on grę do gry z podpunktu D., zamieniając jednocześnie rolami gracza pierwszego i gracza drugiego. Stanie się graczem drugim, który ma strategię przegrywającą, gdy stół ma wymiary 4x1.

Rys. 19 Pierwszy ruch gracza pierwszego, w przypadku gdy stół ma wymiary 5x1, średnica monety to 1 a gracz pierwszy gra zgodnie ze strategią przegrywającą.

Nasze rozumowanie dotyczące strategii przegrywającej dla gry w Monety na Stół podsumujemy w tabelce.

Wymiary stołu i monety	**Strategię przegrywającą posiada gracz**
Stół ma oba boki długości nie większej niż 1, moneta ma średnicę 1	Pierwszy
Stół ma wymiary 1x2, moneta ma średnicę 1	Pierwszy
Stół ma wymiary 1x3, moneta ma średnicę 1	Pierwszy
Stół ma wymiary 1x4, moneta ma średnicę 1	Drugi
Stół ma wymiary 1x5, moneta ma średnicę 1	Pierwszy

Tab. 1 Który gracz ma strategię przegrywającą w grze w Czekoladę?

Jako wniosek otrzymujemy, że w grze w Stół to, kto ma strategię przegrywającą, zależy od wymiarów stołu.

Przykład tej gry uczy nas, że czasem łatwiej jest wygrać, niż przegrać. Znalezienie strategii wygrywającej w przypadku gry w Stół było dużo mniej pracochłonne niż opisanie strategii przegrywającej dla tej zabawy.

Dodatek

Rysunki wykonałem za pomocą tikza. Jest on dodatkiem do LaTeXa, który ułatwia redagowanie tekstów matematycznych. LaTeXa niestety jeszcze nie umiem, ale dzięki pisaniu tej pracy nauczyłem się niektórych komend do tikza, które omawiam na przykładzie poniższego kodu.

```
\documentclass{article}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amssymb}
\usepackage{amsthm}
\usepackage{tikz}
\usepackage{verbatim}
\usepackage[active,tightpage]{preview}
\usetikzlibrary{arrows}
\PreviewEnvironment{tikzpicture}
\usetikzlibrary{matrix}
\usetikzlibrary{decorations.pathreplacing}

\begin{document}

\begin{tikzpicture}[scale=1] % zaczynam rysunek, skala 1:1

\draw [ help lines ] (0,0)--(12,0)--(12,3) -- (0,3) --(0,0); % rysuję prostokąt
o wierzchołkach w punktach (0,0), (12,0), (12,3), (0,0)

\draw [dotted] (3,0)--(3,3); % rysuję kropkowaną linię z punktu (3,0) do punktu
(3,3)
\draw [dotted] (6,0)--(6,3);
\draw [dotted] (9,0)--(9,3);

\draw (2.5,1.5) circle (1.5cm); % rysuję okrąg o środku w punkcie (2.5,1.5) i
promieniu 1.5 cm

\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Bibliografia

[1] Anna Burago, *Mathematical Circle Diaries, Year 1: Complete Curriculum for Grades 5 to 7* - Mathematical Circles Library, Tom: 11 2012 335

[2] M. Łącka, M. Łącki, *Gra Grim i twierdzenie Sprague'a-Grundy'ego,* Magazyn Matematyczno-Fizyczno-Informatyczno-Astronomiczny *Delta*, czerwiec 2014