



Zespół Szkół nr 5 w Krakowie
Samorządowe Przedszkole nr 30
Szkoła Podstawowa nr 109 im. Kornela Makuszyńskiego
Gimnazjum nr 13 im. Adama Chmielowskiego- św. Brata Alberta

Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Nauk i Sztuk
Centrum Młodzieży im. dr Henryka Jordana

KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH

Temat:

„O kątach w wielokątach i nie tylko”

Autorzy:

Mateusz Rajs

Aleksandra Bieniek

Opiekun:

Ewa Malicka

Kraków 2016

Z lekcji wiemy, że można obliczać sumę miar kątów wewnętrznych np. trójkąta, czworokąta, pięciokąta ..., która wynosi odpowiednio 180° , 360° , 540° ...

Dla dowolnego n -kąta ($n \geq 3$) możemy korzystać z następującego wzoru:
 $(n - 2) \times 180^\circ$

Każdy wielokąt ma również kąty zewnętrzne.

Zaciekawiło nas, ile wynosi suma miar kątów zewnętrznych w trójkącie, czworokącie, pięciokącie, n -kącie?

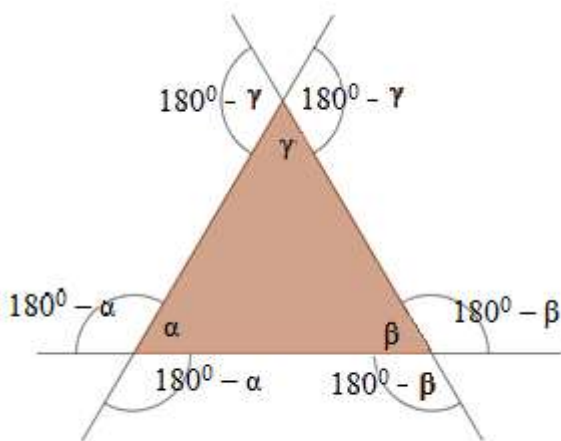
Definicja kąta zewnętrznego.

Kąt zewnętrzny to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta.

Kąty przyległe, to kąty wypukłe, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe dopełniają się do prostej.



W trójkącie jest sześć kątów zewnętrznych, parami równych, jako kąty wierzchołkowe.



Skoro kąt zewnętrzny jest zawsze przyległy do kąta wewnętrznego oznacza to, że suma miar obydwu tych kątów jest równa 180° .

Wynika z tego, że miara dowolnego kąta zewnętrznego = 180° – miara kąta wewnętrznego.

KĄTY ZEWNĘTRZNE

Suma miar kątów zewnętrznych w trójkącie.

Aby obliczyć sumę miar kątów zewnętrznych w trójkącie należy kilkakrotnie dodać tę różnicę. Każdy kąt wewnętrzny posiada parę kątów zewnętrznych i właśnie dlatego jest ich zawsze dwa razy więcej niż kątów wielokąta. Suma miar kątów zewnętrznych wynosi:

$$2(180^\circ - \alpha) + 2(180^\circ - \beta) + 2(180^\circ - \gamma) = 2 \times 180^\circ - 2\alpha + 2 \times 180^\circ - 2\beta + 2 \times 180^\circ - 2\gamma = 6 \times 180^\circ - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 1080^\circ - 2 \times 180^\circ = 720^\circ$$

Suma miar kątów zewnętrznych w dowolnym trójkącie wynosi 720° .

Suma miar kątów zewnętrznych w czworokącie wypukłym.

- **Suma kątów zewnętrznych w czworokącie foremnym – kwadracie**

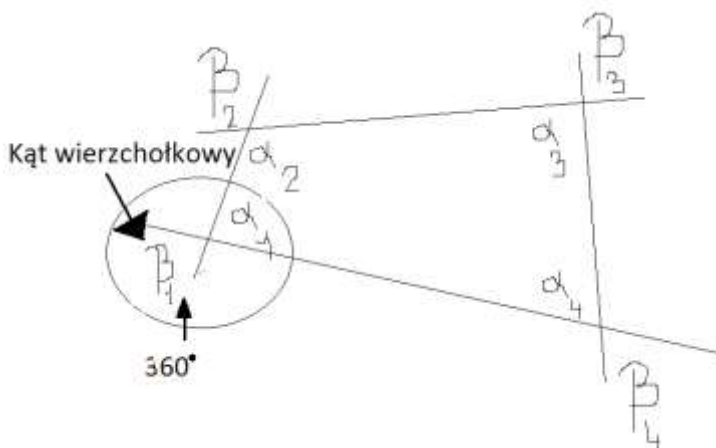


Kąty zewnętrzne i wewnętrzne w kwadracie to kąty proste.

Suma kątów zewnętrznych jest równa $8 \times 90^\circ = 720^\circ$

- **Suma miar kątów zewnętrznych w dowolnym czworokącie wypukłym :**

Uczeń 1



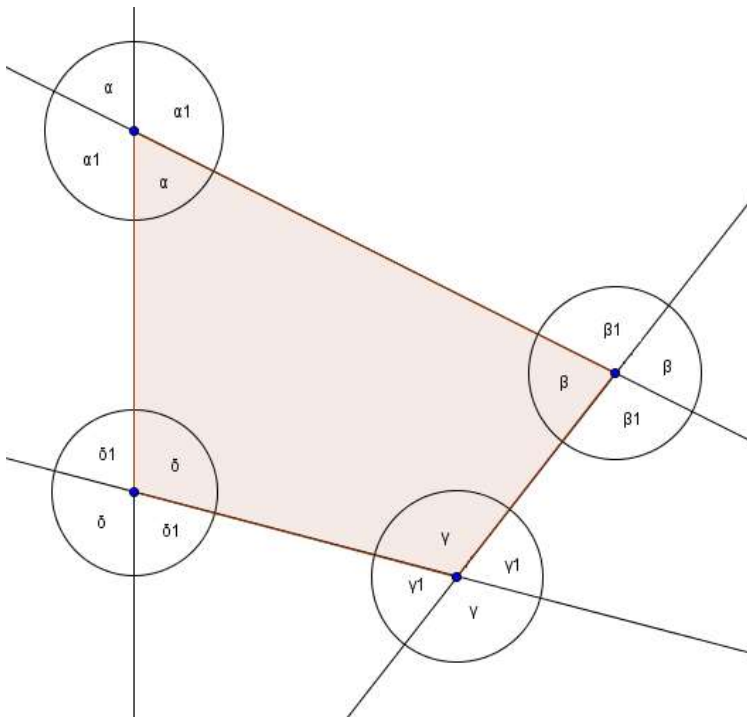
α_1 i β_1 ; α_2 i β_2 ; α_3 i β_3 ; α_4 i β_4 to kąty wierzchołkowe czyli mają równe miary.

α_1 ; α_2 ; α_3 ; α_4 to kąty wewnętrzne, suma ich miar wynosi 360° .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 360^\circ \end{array} \right\} 720^\circ$$

$$4 \times 360^\circ - 720^\circ = 1440^\circ - 720^\circ = 720^\circ$$

Uczeń 2



Kąty α , β , γ , δ , θ to kąty wewnętrzne, a kąty α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 to kąty zewnętrzne.
Ponieważ kąt zewnętrzny jest kątem przyległym do kąta wewnętrznego to:

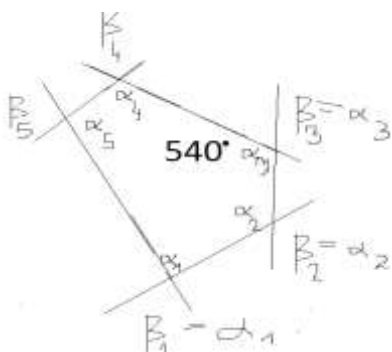
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 180^\circ - \alpha \\ \beta_1 &= 180^\circ - \beta \\ \gamma_1 &= 180^\circ - \gamma \\ \delta_1 &= 180^\circ - \delta \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 360^\circ\end{aligned}$$

Obliczamy sumę miar kątów zewnętrznych czworokąta:

$$\begin{aligned}2 * \alpha_1 + 2 * \beta_1 + 2 * \gamma_1 + 2 * \delta_1 &= \\ 2 * (180^\circ - \alpha) + 2 * (180^\circ - \beta) + 2 * (180^\circ - \gamma) + 2 * (180^\circ - \delta) &= \\ 360^\circ - 2 \alpha + 360^\circ - 2 \beta + 360^\circ - 2 \gamma + 360^\circ - 2 \delta &= \\ 4 * 360^\circ - 2 * (\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= 4 * 360^\circ - 2 * 360^\circ \\ 1440^\circ - 720^\circ &= \mathbf{720^\circ}\end{aligned}$$

Suma miar kątów zewnętrznych w pięciokącie wypukłym

Uczeń 1

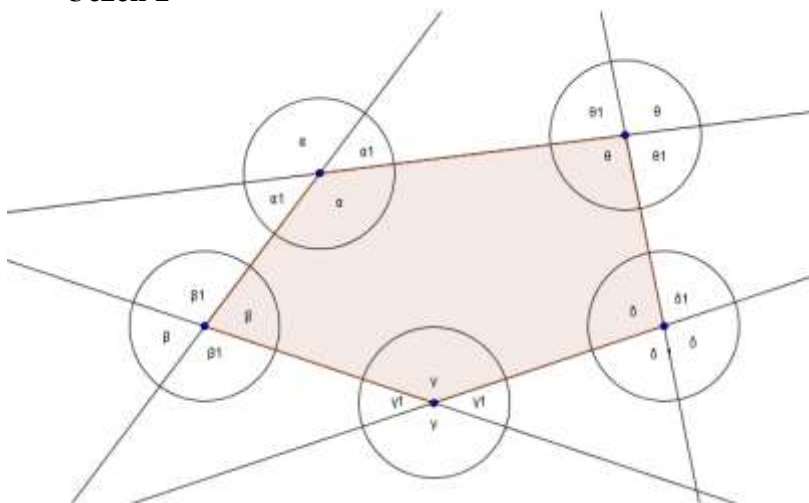


$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 540^\circ$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 540^\circ$$

$$5 * 360^\circ - (540^\circ * 2) = 1800^\circ - 1080^\circ = 720^\circ$$

Uczeń 2



Kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ to kąty wewnętrzne, a kąty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1$ to kąty zewnętrzne.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta = 540^\circ$$

Obliczamy sumę miar kątów zewnętrznych pięciokąta:

$$2 * \alpha_1 + 2 * \beta_1 + 2 * \gamma_1 + 2 * \delta_1 + 2 * \theta_1 =$$

$$2 * (180^\circ - \alpha) + 2 * (180^\circ - \beta) + 2 * (180^\circ - \gamma) + 2 * (180^\circ - \delta) + 2 * (180^\circ - \theta) =$$

$$360^\circ - 2\alpha + 360^\circ - 2\beta + 360^\circ - 2\gamma + 360^\circ - 2\delta + 360^\circ - 2\theta =$$

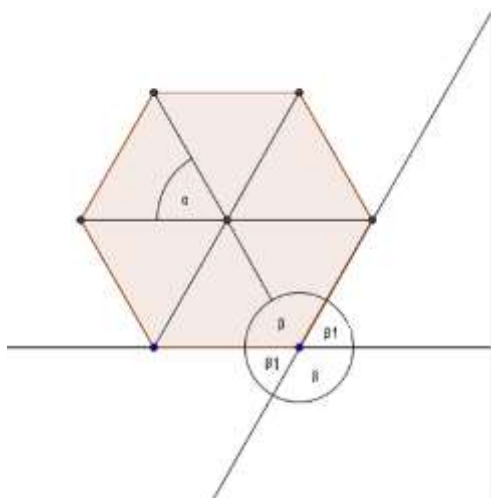
$$5 * 360^\circ - 2 * (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta) =$$

$$5 * 360^\circ - 2 * 540^\circ =$$

$$1800^\circ - 1080^\circ = 720^\circ$$

Suma miar kątów zewnętrznych w n-kącie wypukłym

- Obliczamy sumę miar kątów zewnętrznych n-kąta foremnego:



$$\alpha = 360^\circ / n$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \beta$$

$$\begin{aligned} \beta_1 * 2n &= \\ (180^\circ - \beta) * 2n &= \\ 360^\circ n - \beta * 2n &= \\ 360^\circ n - (180^\circ - \alpha) * 2n &= \\ 360^\circ n - (360^\circ n - \alpha * 2n) &= \\ 360^\circ n - 360^\circ n + \alpha * 2n &= \\ \alpha * 2n &= \\ 360^\circ / n * 2n &= 720^\circ \\ 20^\circ * n / n &= 720^\circ \end{aligned}$$

- Obliczamy sumę miar kątów zewnętrznych w dowolnym n-kącie wypukłym:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ – kąty wewnętrzne

$$\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \alpha_2$$

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + \dots + 2\beta_n =$$

$$2(180^\circ - \alpha_1) + 2(180^\circ - \alpha_2) + \dots + 2(180^\circ - \alpha_n) =$$

$$2 \times 180^\circ \times n - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) =$$

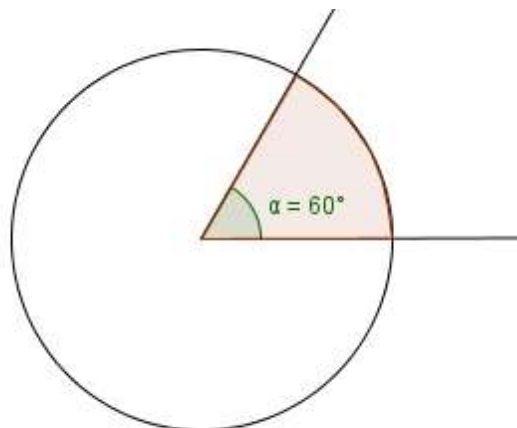
$$2 \times 180^\circ \times n - 2(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ n - 360^\circ(n-2) =$$

$$n \times 360^\circ - (n-2) \times 360^\circ = n \times 360^\circ - n \times 360^\circ + 720^\circ = 720^\circ$$

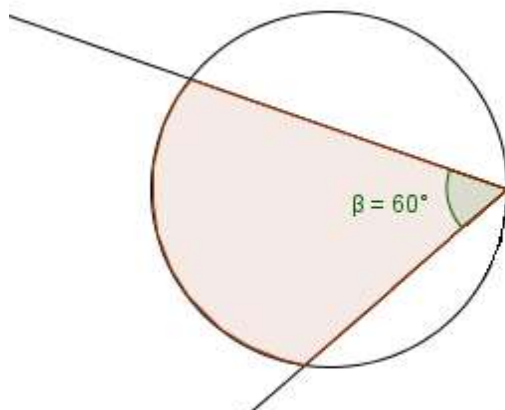
W dowolnym wielokącie wypukłym suma wszystkich kątów zewnętrznych jest stała wynosi 720° .

Kąty znajdują się nie tylko w wielokątach ale także w kole.

Jednym z nich jest **kąt środkowy** czyli taki, którego wierzchołek znajduje się w środku koła, a jego ramiona są półprostymi zawierającymi promienie koła.



Innym jest **kąt wpisany**. Jego wierzchołek znajduje się w dowolnym punkcie okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego koła.



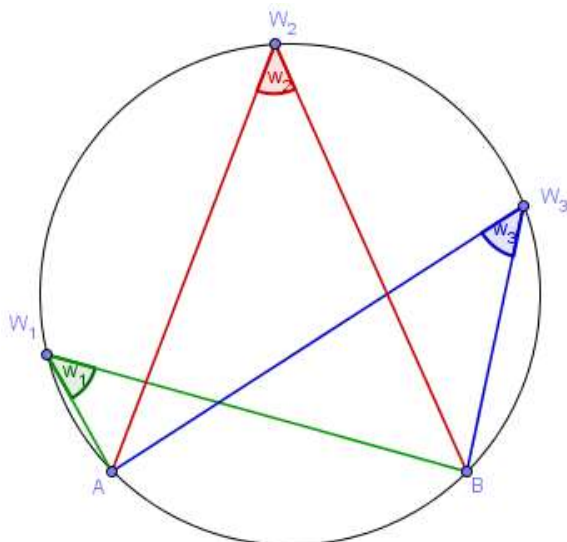
Kąt wypukły – kąt którego miara jest mniejsza bądź równa mierze kąta półpełnego.

Kąt wklęsły – kąt, który nie jest wypukły, miara takiego kąta jest większa niż 180° , lecz mniejsza niż 360°

Po zapoznaniu się z pojęciami, przystąpiliśmy do zadań interaktywnych w GoGebrze, aby lepiej to zrozumieć.

KĄTY WPISANE I KĄTY ŚRODKOWE

Na okręgu wybraliśmy punkty A i B, narysowaliśmy kąt wpisany oparty na łuku AB, zmienialiśmy położenie wierzchołka kąta na łuku.

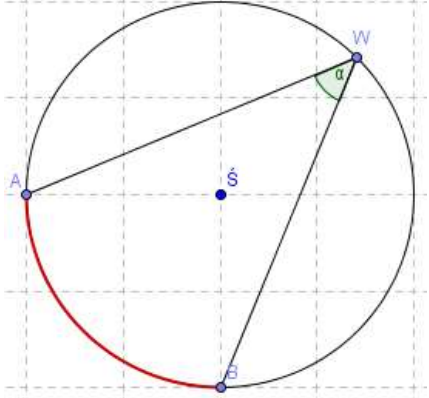
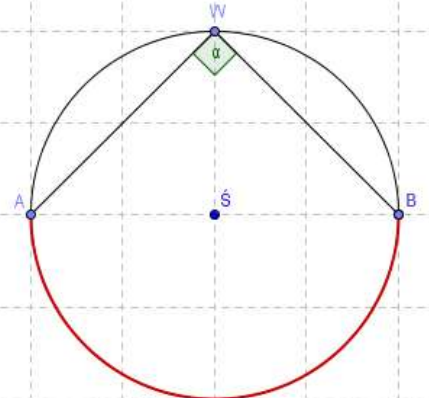
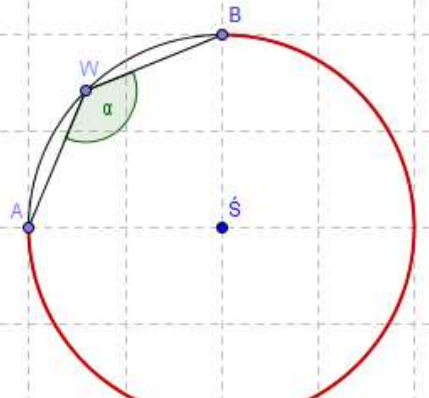
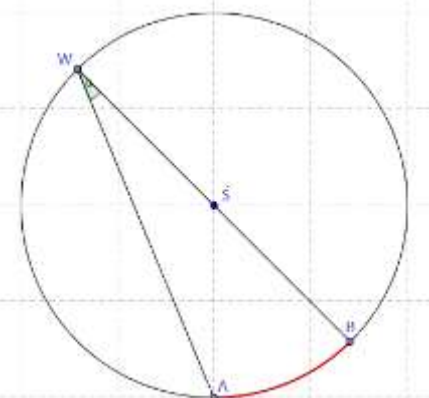


W_1, W_2, W_3 – wierzchołki

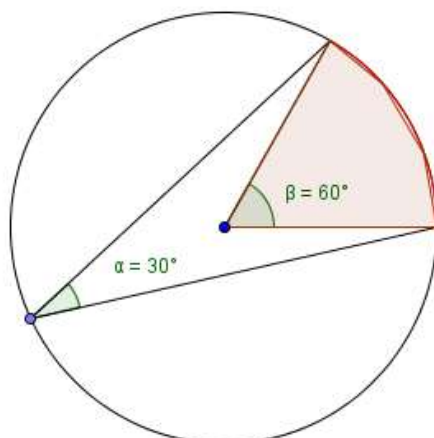
Zauważyliśmy, że (zał. animacja na CD)

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają te same miary.

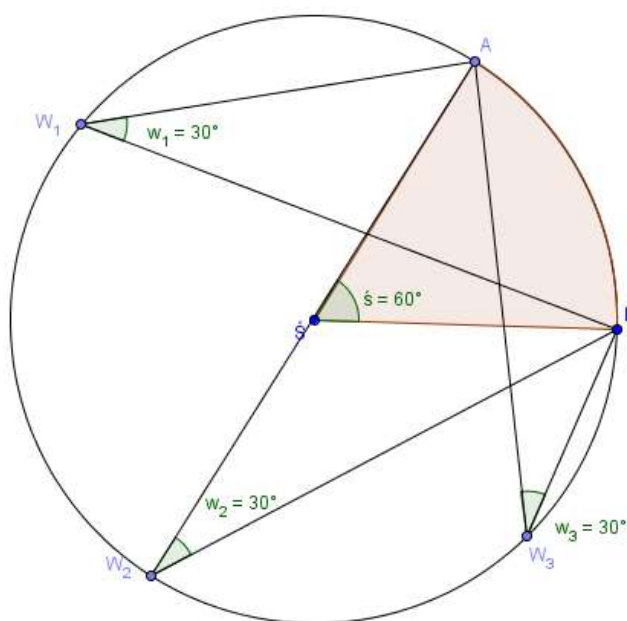
Zmienialiśmy również, długość łuku i obserwowaliśmy miary kąta wpisanego.

Długość łuku	Miara kąta wpisanego	Rysunek (zał. animacja na CD)
1/4 okręgu	45°	
1/2 okręgu	90°	
3/4 okręgu	135°	
1/8 okręgu	22,5°	

Zainteresowaliśmy się, czy jest związek między kątem wpisanym i kątem środkowym opartym na tym samym łuku?
Narysowaliśmy kąt środkowy o mierze 60° . Jaką miarę będzie miał kąt wpisany?



Kolejny rysunek przedstawia kąt środkowy oraz trzy kąty wpisane, których wierzchołki znajdują się w różnych punktach okręgu, a ramiona oparte są na tym samym łuku.



Z obserwacji wynika, że dowolny

kąt wpisany ma miarę 30° czyli połowę kąta środkowego.

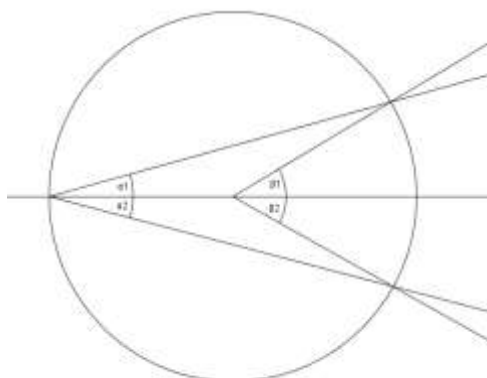
Jak widać kąt wpisany ma zawsze taką samą miarę: 30° . Dlaczego?

Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.

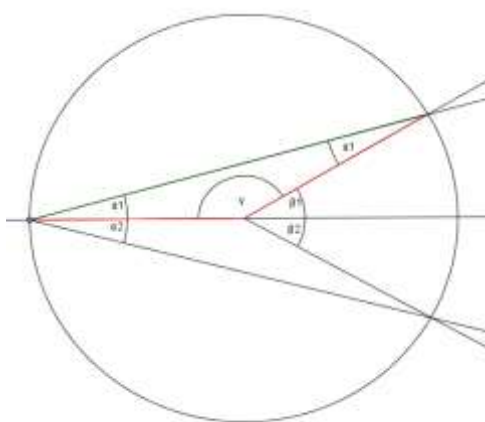
Wyjaśnienie tej sytuacji przedstawimy w „trzech odsłonach”:

Pierwszy przypadek : Średnica dzieli kąt środkowy oraz wpisany na dwa kąty (wersja 1)

Wiadomo, że: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + \beta_2$



Na czerwono zaznaczone są dwa promienie koła, które tworzą ramiona trójkąta równoramiennego. Jego podstawą jest cięciwa – oznaczona kolorem zielonym. Kąt α_1 jest kątem przy podstawie, co oznacza, że drugi kąt przy tej samej podstawie też jest kątem α_1 .



Trzeci kąt tego trójkąta możemy obliczyć na dwa sposoby.

Kąt γ jest przyległy do β_1 więc $\gamma = 180^\circ - \beta_1$.

Wiemy, że: suma kątów w trójkącie wynosi 180° oraz, że suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest równa mierze kąta zewnętrznego przyległego do trzeciego kąta.

Znamy dwa kąty tego trójkąta więc obliczenie trzeciego nie będzie trudne.

$$\gamma = 180^\circ - 2 * \alpha_1.$$

Z tego wynika, że:

$$\gamma = 180^\circ - \beta_1$$

$$\gamma = 180^\circ - 2 * \alpha_1$$

$$180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 2 * \alpha_1$$

$$-\beta_1 = -2 * \alpha_1 \quad \text{czyli} \quad \beta_1 = 2 * \alpha_1$$

Skoro α_1 jest dwa razy mniejsze od β_1 to α też będzie dwa razy mniejsze od β .

$$\text{Podobnie: } \beta_2 = 2 * \alpha_2$$

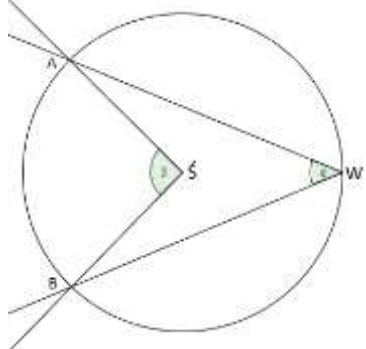
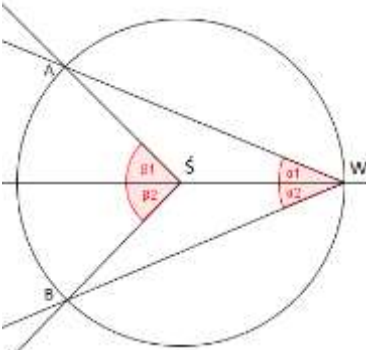
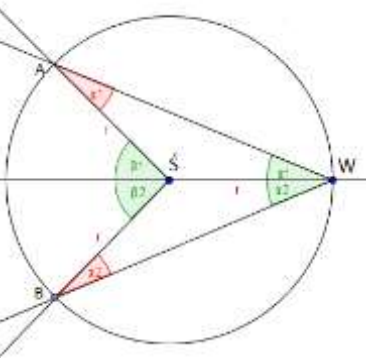
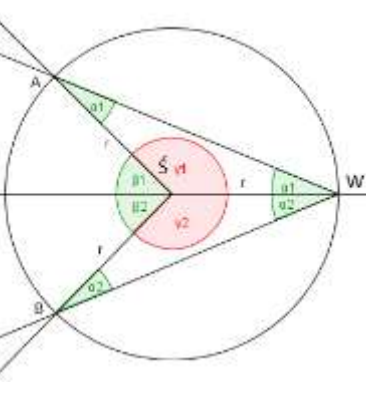
$$\beta_1 = 2 * \alpha_1$$

$$\beta_2 = 2 * \alpha_2$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 2 (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\beta = 2 * \alpha$$

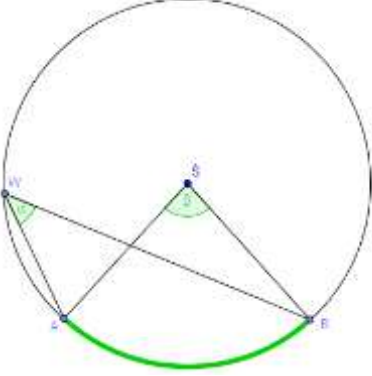
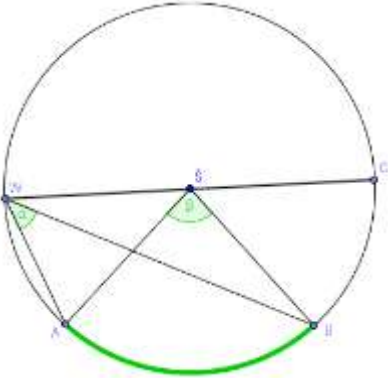
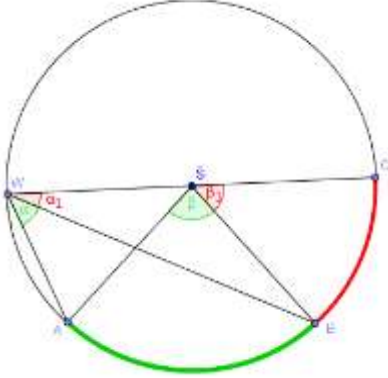
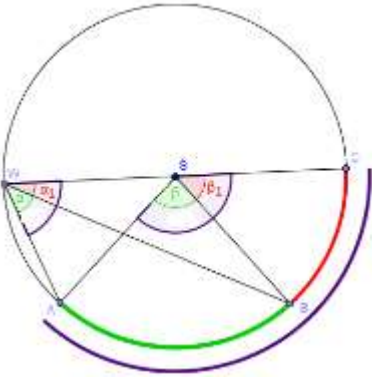
Pierwszy przypadek: Średnica dzieli kąt środkowy oraz wpisany na dwa kąty (wersja2)

Co zauważamy	Komentarz
	<p>α – kąt wpisany β – kąt środkowy</p>
	<p>Narysowaliśmy średnicę, która dzieli α na α_1 i α_2 oraz β na β_1 i β_2. Wiadomo, że:</p> <p>$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ $\beta_1 + \beta_2 = \beta$</p>
	<p>α_1 jest kątem w trójkącie równoramiennym AŚW utworzonym przez dwa promienie i cięciwę. A skoro α_1 jest kątem przy podstawie drugi kąt też jest równy α_1. Podobnie dzieje się z kątem α_2.</p>
	<p>Skoro suma kątów w trójkącie jest równa 180° to: $\gamma_1 = 180^\circ - 2 * \alpha_1$ $\gamma_2 = 180^\circ - 2 * \alpha_2$ kąty przyległe wynoszą 180° więc $\gamma_1 = 180^\circ - \beta_1$ $\gamma_2 = 180^\circ - \beta_2$</p> <p>$180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 2 * \alpha_1$ $\beta_1 = 2 * \alpha_1$</p> <p>$180^\circ - \beta_2 = 180^\circ - 2 * \alpha_2$ $\beta_2 = 2 * \alpha_2$ $\beta_2 + \beta_1 = 2 * (\alpha_2 + \alpha_1) \quad \beta = 2\alpha$</p>

Drugi przypadek : Średnica zawiera ramiona kąta wpisanego i środkowego

Co zauważamy	Komentarz
	<p>Ramię kąta α pokrywa się z ramieniem kąta β, WB jest średnicą.</p>
	<p>Trójkąt WSA jest równoramienny – kąty: $\widehat{SWA} = \widehat{SAW} = \beta$ (są tej samej miary).</p>
	<p>Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie to 180°, czyli</p> $\gamma = 180^\circ - 2\beta$
	$\delta =$ $\alpha + \gamma = 180^\circ$ $\alpha + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$ $\alpha + 180^\circ = 2\beta + 180^\circ$ $\alpha = 2\beta$

Trzeci przypadek: średnica nie zawiera się w żadnym z kątów

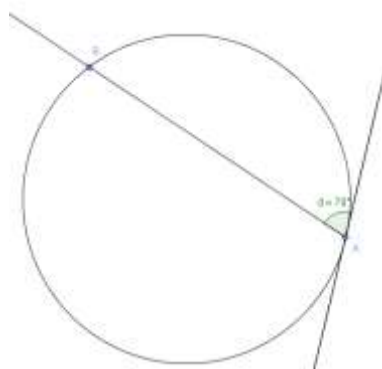
	<p>α – kąt wpisany β – kąt środkowy</p> <p>kąty α i β są oparte na łuku AB.</p>
	<p>Dorysowuję średnicę WC, zawierającą wierzchołki kątów α i β.</p>
	<p>Utworzone kąty α_1 i β_1 są oparte na tym samym łuku BC, a średnica zawiera ramiona kątów (jak w przypadku drugim). czyli kąt β_1 jest równy $2\alpha_1$</p>
	<p>Kąt AWC jest wpisany Kąt ASC jest środkowy Oparte są na tym samym łuku ABC</p> $2(\alpha + \alpha_1) = \beta + \beta_1$ $2\alpha + 2\alpha_1 = \beta + 2\alpha_1$ <p>czyli</p> $2\alpha = \beta$

Ciekawym wnioskiem jest zauważenie, że

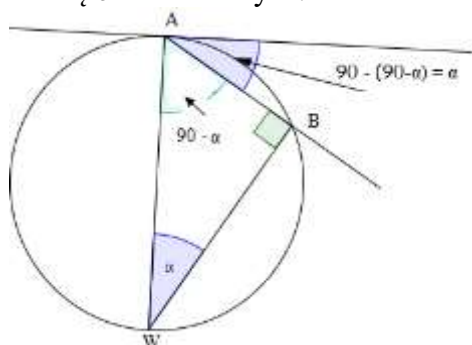
Kąt wpisany, który jest oparty na półokręgu jest kątem prostym.

KĄT DOPISANY

Kąt dopisany do okręgu w punkcie A należącym do okręgu, to kąt wypukły wyznaczony przez styczną do okręgu w punkcie A oraz półprostą, zawierającą cięciwę o końcu w punkcie A .



Zainteresowaliśmy się, czy jest związek między kątem dopisanym, a kątem wpisanym czy kątem środkowym?



AW – średnica, AB - cięciwa, α – kąt wpisany

Kąt ABW jest prosty, bo jest oparty na średnicy (na półokręgu), a kąt WAB jest równy $90^\circ - \alpha$ bo suma kątów w trójkącie wynosi 180°

Kąt między styczną a średnicą wychodzącą z punktu styczności A jest prosty, więc kąt BAS jest miarą danego kąta dopisanego i jest równy $90^\circ - (90^\circ - \alpha)$.

Kąty wpisane i dopisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Literatura:

Podręcznik: Matematyka 2001

Wikipedia- encyklopedia

GeoGebra