# Problem przetwarzania ciągów binarnych

Piotr Sikorski

Problem, który przedstawię był moim wkładem do rozwiązania innego zagadnienia, nad którym zastanawiali się moi koledzy z koła matematycznego w naszej szkole.

W mojej pracy będę operował kodem binarnym, oraz posługiwał się takimi zwrotami:

**n** – ilość znaków w jednym wyrazie / całej grupie;$n \in N$

**Wyraz**– jeden ciąg zer i jedynek dla n znaków

**Grupa** – wszystkie możliwe różne wyrazy dla maksymalnej ilości n znaków. Ilość wyrazów w grupie wynosi $2^n$

**Wyraz symetryczny** – ciąg binarny, w którym kolejność znaków jest odwrócona; oznaczany przez dodanie ‘ przy znaku równości

**Wyraz przeciwny** - ciąg binarny, w którym każdy znak 0 jest zamieniany na 1 i odwrotnie; oznaczany jako $^{\partial}$ przy znaku równości

**Wyraz symetryczno-przeciwny** – wyraz symetryczny i przeciwny jednocześnie; oznaczany jako $‘^{\partial}$ przy znaku równości

Przykłady:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A = 01101 | A =’ 10110 | A=$^{\partial}$10010 | A =’$^{\partial}$01001 | dla n = 5 |
| B = 11001010 | B =’ 01010011 | B =$^{\partial}$ 00110101 | A =’$^{\partial}$11001010 = A | dla n = 8 |

Grupa dla n = 4

0000 0001
0010 0011
0100 0101
0110 0111
1000 1001
1010 1011
1100 1101
1110 1111

***Problem 1:***

*Ile należy skreślić wyrazów w jednej grupie liczb (oprócz połowy), aby wyeliminować wyrazy symetryczne, przeciwne i symetryczno-przeciwne?*

```
Grupa dla n = 4:

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
```

Rys. 1

Udało mi się ustalić, że istnieje pewien wzór za pomocą, którego można obliczyć ilość takich skreśleń dla dowolnego n. Na przykładzie grup dla n = 5 i n=6 pokażę zależności, które pozwalają ustalić torównanie. Grupy dla n < 3 są zbyt trywialne aby je rozważać, a grupa dla n = 4 swą prostotą nie przekonuje o prawdziwości wzoru.

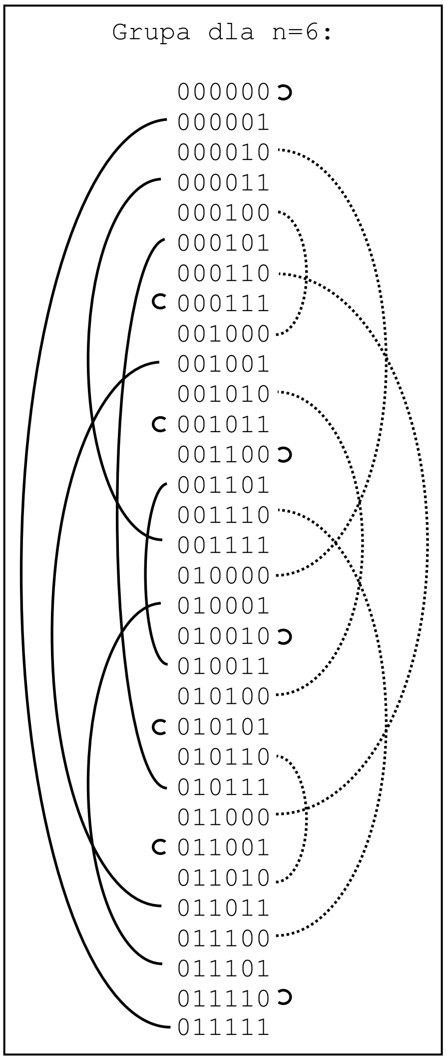
Zanim rozpocznę, wyjaśnię kwestię skreślania wyrazów *oprócz połowy grupy*. Jeżeli zrobimy przeciwieństwa pierwszej połowy wyrazów (zaczynającej się od 0) to zauważymy, że pokrywają się z drugą połową idealnie. Bez sensu jest więc wliczać to do końcowego wyniku oraz podawać te wyrazy w późniejszych rubrykach.

Problem 1należy rozpatrzyć dla n parzystych i nieparzystych osobno. Później wyjaśni się, dlaczego właśnie tak.

Dodatkowo połowa grupy dzieli się na jeszcze mniejsze części:

> Jeżeli na końcu wyrazu znajduje się 1, to wyraz do niego symetryczny będzie zaczynał się od 1, a te wyrazy zostały już skreślone; z tego względu nie mają one wyrazu do pary.
> To jest pierwsza podgrupa.
>
> Jeżeli na końcu wyrazu znajduje się 0, to wyraz do niego symetryczno-przeciwny będzie zaczynał się od 1;z tego względu nie mają one wyrazu do pary. To jest druga podgrupa.
>
> Każda podgrupa zawiera po $2^{n-2} = 16$ wyrazów.

<u>*Od teraz grupą będą nazwane tylko wyrazy zaczynające się od zera.*</u>




Rys. 2

***Dla n=6 (parzystych)***

Po lewej stronie rysunkunr. 2 pokazano pary wyrazów, które są do siebie symetryczno-przeciwne (tworzą drugą podgrupę). Z nich należy usunąć po jednym z każdej pary (oprócz tych, które są same do siebie symetryczno-przeciwne, oznaczone przez C). Dodatkowo pierwsza i ostatnia cyfra wyrazu jest stała, zmienia się tylko środek, a więc ilość par jest zależna od tych cyfr;

Popatrzmy na wyrazy samo-symetryczno-przeciwne*, a dokładniej na ich „środki". Połowa jednego „środka" decyduje, jaka powinna być druga połowa, aby wyraz był symetryczno-przeciwny sam do siebie.Ich ilość to wszystkie kombinacje dla dwóch liczb, czyli $2^{\frac{n-2}{2}} = 4$. Wyrazów w podgrupie jest $2^{n-2} = 16$. Natomiast my potrzebujemy ilość par liczb, które są symetryczno-przeciwne nawzajem. Uzyskujemy to odejmując od ilości wyrazów w podgrupie ilość wyrazówsamo-symetryczno-przeciwnych oraz dzieląc tą wartość przez 2, gdyż potrzebujemy tylko po jednym wyrazie z każdej pary. Daje nam to wzór:

$$\frac{2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}}{2} = 2^{n-3} - 2^{\frac{n-4}{2}}.$$

*wyraz <u>samo</u>-symetryczno-przeciwny to wyraz, któryjest symetryczno-przeciwny sam do siebie

Co ciekawe, z wyrazami symetrycznymi jest dokładnie tak samo, jak w przypadku wyrazów symetryczno-przeciwnych. Całkowity wzór wygląda więc tak: $2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}$.

***Dla n=5 (nieparzystych)***

Jeżeli chodzi o wyrazy samo-symetryczno-przeciwne, to ich nie ma, ponieważ środkowa cyfra zawsze się zmieni niezależnie od reszty wyrazu. Tak więc ich ilość wynosi $2^{n-3} = 4$.

Inaczej sprawa wygląda z podgrupą wyrazów symetrycznych. Tak jak poprzednio, ilość ich zależy od „środka”. Różnicą jest to, że liczba na samym środku zwiększa dwukrotnie ilość wyrazów samo-symetrycznych w porównaniu do jego braku.

Zatem ta część wzoru jest taka: $\frac{2^{n-2} - 2 * 2^{\frac{n-3}{2}}}{2} = 2^{n-3} - 2^{\frac{n-3}{2}}$

Cały wzór: $2^{n-3} + 2^{n-3} - 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}}$

```
Grupa dla n=5:

00000
00001
00010
00011
00100
00101
00110
00111
01000
01001
01010
01011
01100
01101
01110
01111
```

Rys. 3

Powyższe dwa wzory dla n parzystych i nieparzystych można zamienić w jeden:

Pierwszy wzór: $2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}$

Drugi wzór: $2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2} - \frac{1}{2}} = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} * \sqrt{2}$

Obydwa wzory różnia się tylko $\sqrt{2}$. Właśnie dzięki temu da się z tych dwóch wzorów zrobić jeden:

$$\mathbf{2^{n-2} - \frac{2^{\frac{n-2}{2}} * \sqrt{2}}{mod_2(n+1) * \sqrt{2} + mod_2(n)}}$$

$mod_2(n)$ oznacza operację modulo** o podstawie 2 z liczby n.

Znalezienie tej zależności nie zajęło mi dużo czasu. Oprócz pomocy w rozwiązaniu bardziej skomplikowanego problemu kolegów nie wydaje mi się aby ten wzór miał jakieś szersze zastosowanie.Niemniej jednak jest on częścią mojej naukowej twórczości ☺.

**modulo – operacja wyznaczania reszty z dzielenia, $mod_2(n) => \frac{n}{2} = [reszta]$