SOFIZMATY

Piotr Kubaty

Sofizmaty to fałszywe „dowody”, pozornie poprawne, ale w istocie zawierające ukryte błędy, najczęściej logiczne. Słowo sofizmat oznacza dosłownie wybieg lub wykręt.

Sofistami, czyli nauczycielami mądrości, nazywano w starożytnej Grecji uczonych zawodowo trudniących się nauczaniem rozmaitych sztuk i nauk: gramatyki, retoryki, matematyki, fizyki i wielu jeszcze innych. Wybitni sofiści działający w V w. p.n.e. Protagoras, Hippiasz, Gorgiasz i Prodikos byli wybitnymi myślicielami, którzy między innymi zwracali baczną uwagę na rolę słów w procesie dyskusji i argumentacji. O Protagorasie współcześni mu mawiali, że jest człowiekiem, który umie poprawnie używać słów. Prodikos z kolei zasłynął jako badacz synonimów i homonimów. Ich późniejsi naśladowcy nie poszli jednak ich śladami i w miejsce rzetelnych badań nad językiem zaczęli się zajmować sztuką żonglowania słowami, mającą na celu przekonanie, za wszelką cenę, nawet kosztem logiki i zdrowego rozsądku, słuszności bronionej, często absurdalnej, tezy. Stąd właśnie wzięło się negatywne określenie sofistyki jako posługiwania się fałszywymi argumentami celem udowodnienia nieprawdy, podczas gdy w pierwotnym znaczeniu wyraz ten oznaczał wielki, krytyczny wobec uznanych wartości religijno-moralnych, humanistyczny ruch o nastawieniu demokratycznym, występujący przeciwko ustalonemu porządkowi społecznemu Aten. To negatywne określenie sofistyki pociągnęło za sobą stosowanie nazwy "sofizmat" dla określenia pozornie poprawnego argumentu, zawierającego świadomie zatajone błędy logiczne lub wyrażając to krócej, dla określenia: świadomego dowodzenia fałszywej tezy.

W swojej pracy zaprezentuję kilka sofizmatów wyszukanych w literaturze polskiej i zagranicznej oraz przedstawię dowody na ich niepoprawność.

1.Sofizmaty algebraiczne

Sofizmat 1:

Jeżeli a>b, to również $a > 2b$, dla $a, b > 0$

Prezentowany Dowód:

$a > b$ / $\cdot b$

$ab > b^2$ / $- a^2$

$ab - a^2 > b^2 - a^2$

$a(b - a) > (b - a)(b + a)$ / $:(b - a)$

$a > a + b$ / $+(a > b)$

$2a > 2b + a$ / $- a$

$a > 2b$

Rozwiązanie:

W czwartej linijce dowodu pokazane jest dzielenie nierówności przez (b - a).

Przekształcając warunek $a > b$ z założenia otrzymujemy $b - a < 0$.

Dzieląc więc obie strony przez $b - a$ musimy zmienić znak nierówności czego nie wykonano w prezentowanym rozumowaniu.

Sofizmat 2:

Jeżeli $x – 1 = 2$, to $x = 5$

Prezentowany Dowód:

$x - 1 = 2$ / $* (x - 5)$

$x^2 - 6x + 5 = 2x - 10$ / $+ 7 - x$

$x^2 - 7x + 12 = x - 3$ / $:(x - 3)$

$x - 4 = 1$ / $+ 4$

$x = 5$

Rozwiązanie:

W trzeciej linijce dowodu zanotowano dzielenie przez $(x - 3)$.

W rzeczywistości jednak $x - 3 = 0$, co wynika z założenia $x - 1 = 2$, a przez 0 nie można dzielić. Na tym polega kolejne fałszerstwo.

2.Sofizmat z jednostką

Sofizmat 3:

$$6kg = 6000kg$$

Prezentowany Dowód:

$$2kg = 2000g,$$

$$3kg = 3000g$$

Mnożymy stronami:

$$2\ kg \cdot 3\ kg = 2000\ g \cdot 3000\ g$$

$$6\ kg = 6\ 000\ 000\ g$$

$$6\ kg = 6000\ kg$$

Rozwiązanie:

W rzeczywistości $2kg \cdot 3kg = 6kg^2$, a $2000g \cdot 3000g = 6000000g^2$,czyli

$6\ kg^2 = 6\ 000\ 000\ g^2$, a więc znowu oszustwo.

3.Sofizmat arytmetyczny

Sofizmat 4:

$4 = 5$

Prezentowany Dowód:

$-20 = -20$

$16 - 36 = 25 - 45$

$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$

$(4 - 4\frac{1}{2})^2 = (5 - 4\frac{1}{2})^2$

$4 - 4\frac{1}{2} = 5 - 4\frac{1}{2}$

$4 = 5$

Rozwiązanie:

To, że $(4 - 4\frac{1}{2})^2 = (5 - 4\frac{1}{2})^2$ nie oznacza, że $4 - 4\frac{1}{2} = 5 - 4\frac{1}{2}$, ponieważ

$4 - 4\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, a $5 - 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

choć ich kwadraty są sobie równe.

4.Sofizmaty tekstowe

Sofizmat 5:

Pan X wchodzi do sklepu i kupuje obraz za 150 zł. Na drugi dzień przychodzi powtórnie z zamiarem zamiany obrazu. Wybiera inny obraz za 300 zł i nie płacąc wychodzi. Właściciel sklepu zatrzymuje go, lecz Pan X oświadcza: Jesteśmy kwita. Wczoraj zostawiłem Panu 150 zł, a dziś obraz wartości 150 zł. Razem 300 zł.

Rozwiązanie:

Pan X pierwszego dnia dał 150 zł, a następnego dnia oddał obraz za 150 zł, co daje razem 300zł. Pierwszego dnia wziął obraz za 150 zł, drugiego za 300, co daje 450zł. Zapłacił więc za mało 150 złotych.

Sofizmat 6:

Pan X przyszedł do sklepu i kupił czekoladki za 6 zł, płacąc banknotem 10 zł. Sprzedawca nie miał reszty, więc poszedł do sąsiada, który rozmienił mu banknot 10 zł. Sprzedawca wydał 4 zł reszty Panu X i zamknął sklep. Następnego dnia sąsiad odniósł banknot, ponieważ okazał się podrobiony. Sprzedawca, który dał już 4 zł prawdziwe Panu X, musiał wypłacić sąsiadowi 10 zł prawdziwe. Ile stracił?

Rozwiązanie:

Sprzedawca stracił 6 zł, za czekoladki, gdyż „ kupił je” pan X oraz 4zł, gdyż tyle mu wydał. Dostał od niego 10zł, które było fałszywe i dostał 10 zł prawdziwe, potem dał 10 prawdziwe i wziął 10 fałszywe, czyli razem stracił 4 + 6 = 10

Sofizmat 7 (francuski):

Dans l'emmental, il y a des trous.

Plus il y a d'emmental, plus il y a de trous.

Plus il y a de trous, moins il y a d'emmental.

Donc plus il y a d'emmental, moins il y a d'emmental (figure de sens, syllogisme)

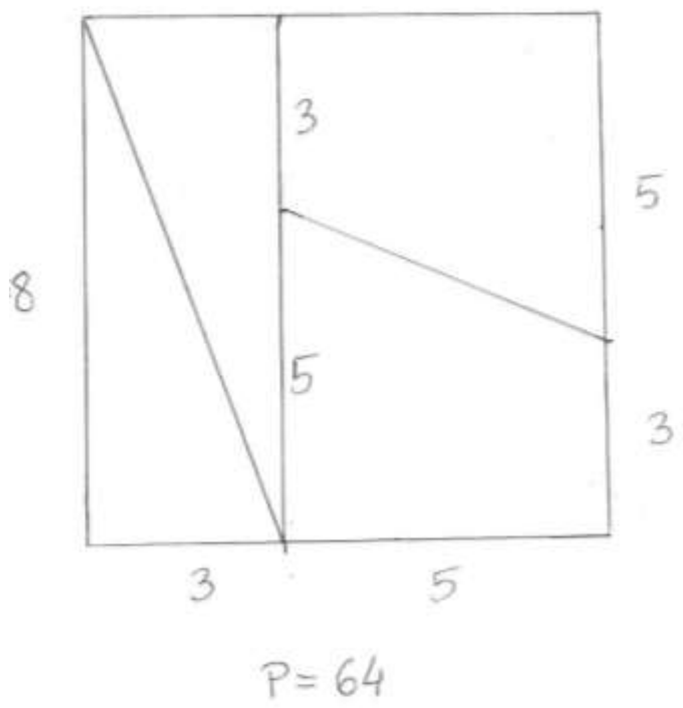
W Ementalerze znajdują się otwory. Im więcej mamy Ementalera, tym więcej dziur. Im więcej mamy dziur, tym mniej Ementalera. A więc im więcej Ementalera, tym jest go mniej.

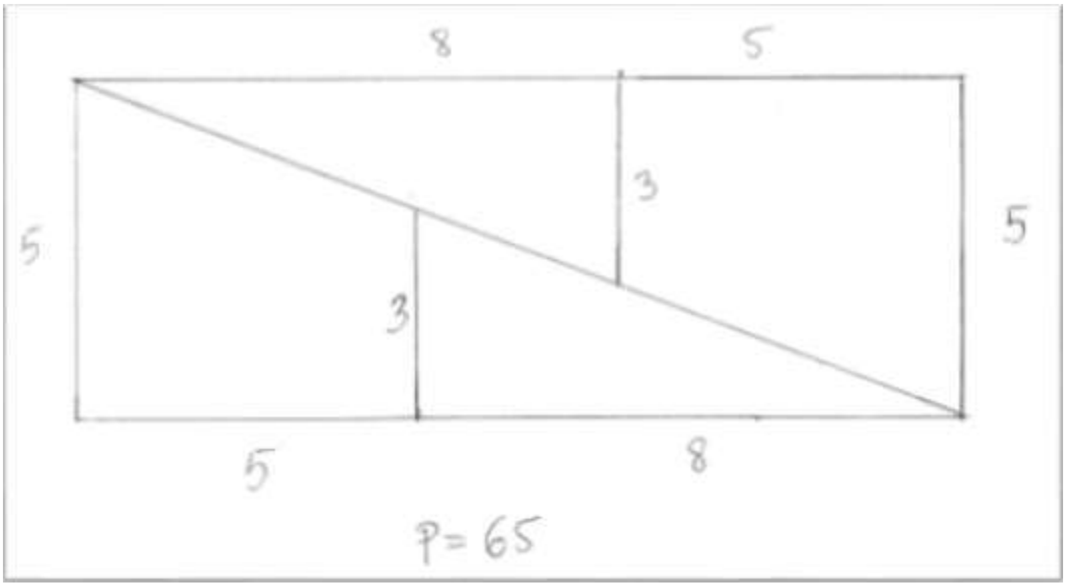
Rozwiązanie:

Istotnie możemy kupić 1 litr produktu zawierającego 0,9 litrów sera, następnie dokupić drugie tyle i wyciąć 1 litr sera posiadając ostatecznie 0,8 kg. Wykonamy wtedy zalecenia drugiego i trzeciego zdania treści zadania. Zauważmy, że pierwsze zdanie odnosi się do jednego typu ementalera. Drugie zdanie odnosi się do procentowego udziału dziur w produkcie. Im więcej dziur, tym mniej sera. Jednak ser, w którym dziury stanowią 10% objętości jest innego typu, niż ten, w którym dziury stanowią aż 30% objętości. Działanie drugiego zdania treści zadania nie musi występować równocześnie, co trzecie. Na tym polega kolejny błąd.

5.Sofizmaty geometryczne

Sofizmat 8





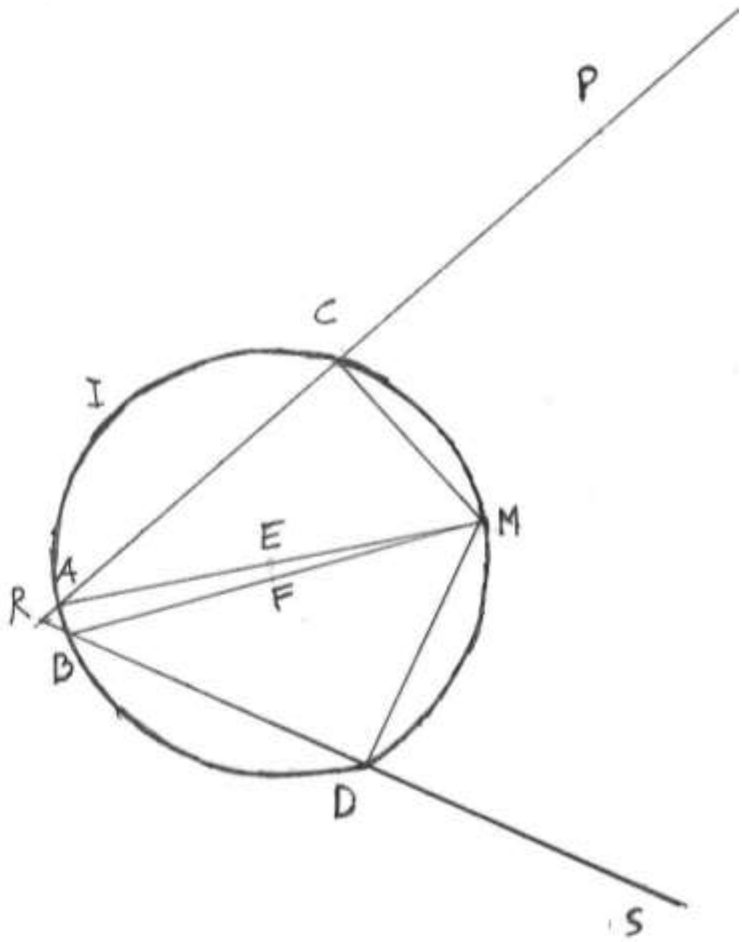
Błąd polega na tym, że trójkąty o przyprostokątnych 3 na 8 i 5 na 13 nie są podobne. Wynika to z tego, że stosunki przyprostokątnych są różne, gdyż wynoszą odpowiednio $\frac{39}{104}$ i $\frac{40}{104}$ .Dlatego utworzony duży prostokąt ma tak naprawdę dziurę w środku co tłumaczy nierówność pól.

Sofizmat 9:

Obieramy dowolny kąt PRS i dwa dowolne punkty C i D na ramionach tego kąta. Prowadzimy prostopadłą DM do SR. Te dwie prostopadłe przecinają się w punkcie M. przez punkty C, M i D wykreślamy okrąg I . Okrąg ten przecina ramiona PR i SR kąta PRS w dwóch punktach, które nazwiemy odpowiednio A i B. Punkty A i B łączymy z punktem M. Kąty ACM i BDM są proste, wpisane w okrąg i opierają się odpowiednio na średnicach AM i BM. Stąd wynika, że okrąg przeprowadzony przez punkty C, D, i M ma dwa środki – E i F (przy czym E i F są odpowiednio środkami odcinków AM i BM)

Rozwiązanie:

Kąty RDM i RCM sumują się do 180º, czyli na czworokącie RDMC możemy opisać okrąg, co razem z tym, że punkty C, D, i M leżą na okręgu I oznacza, ze i punkt R należy do tego okręgu, a punkty A, B i R są jednym punktem, co ostatecznie prowadzi do tego, że punkty E i F są jednym punktem.

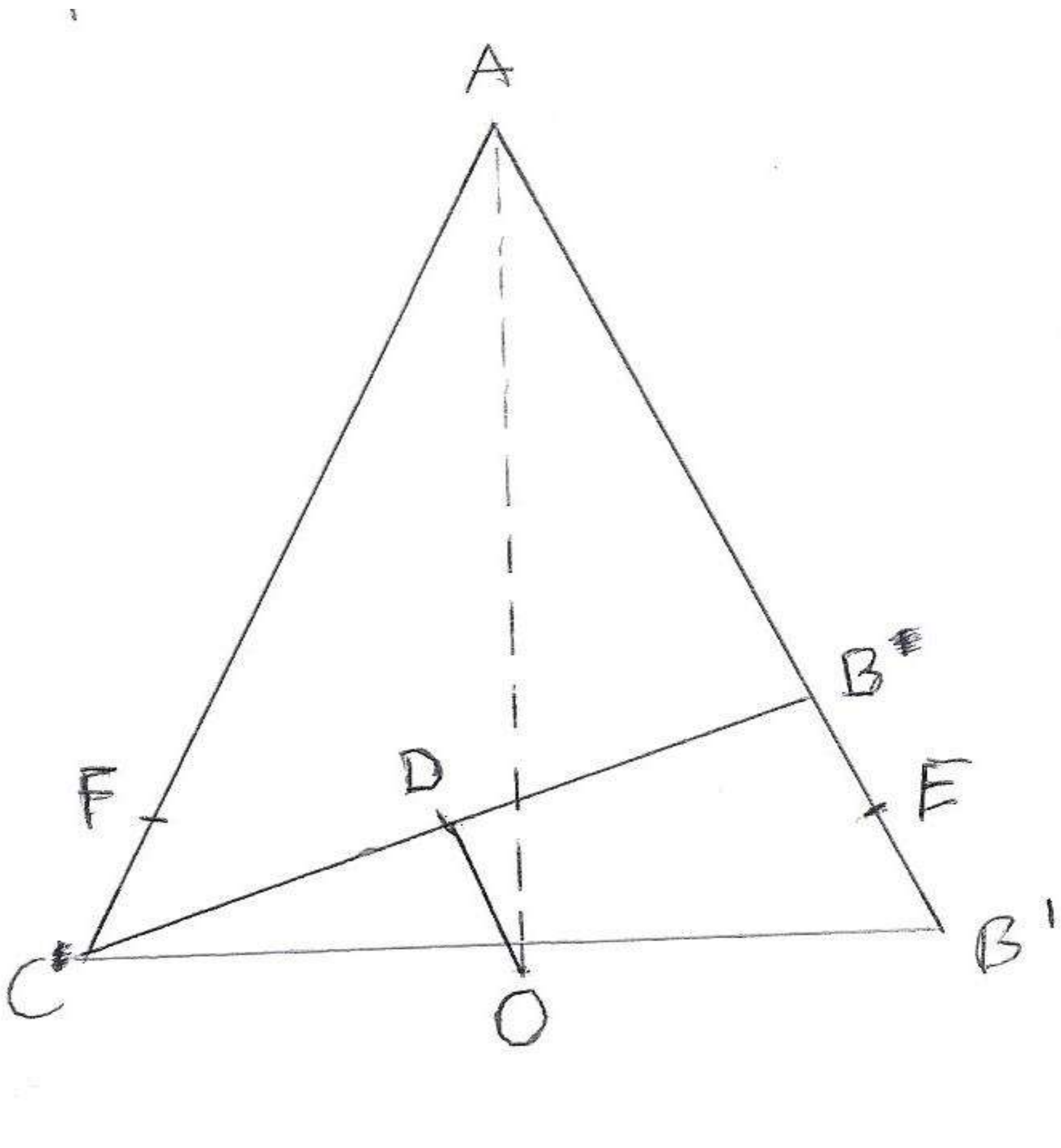


Sofizmat 10:

Rysujemy trójkąt ABC, którego wszystkie boki są różne. W trójkącie tym prowadzimy dwusieczną kąta BAC. Ze środka boku BC (punkt D) wystawiamy prostopadłą (symetralną boku BC). Dwusieczna kąta i symetralna boku BC przecinają się w punkcie O. Niech punkt E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu O na prostą AB, zaś punkt F spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu O na prostą AC. Wobec tego punkt O jest równo odległy od ramion kąta BAC (dwusieczna kąta BAC, OE = OF) i od wierzchołków B i C (symetralna odcinka BC, OB = OC). Stąd wynika, że trójkąty AFO i AOE są przystające podobnie jak i trójkąty OBD i OCD. Z przystawania pierwszej pary trójkątów mamy AF = AE; z przystawania drugiej pary wynika przystawanie trójkątów BOE i COF. Skąd AF + BF = AE + CE , czyli AC = AB. Dowiedliśmy więc, że dowolny trójkąt jest równoramienny.

Rozwiązanie:

Dany jest trójkąt równoramienny AB`C oraz punkt O leżący na dwusiecznej kąta BAC`. Dany jest także punkt B na boku AB`. Leży O wybieramy tak, by leżał on na symetralnej odcinka BC. Wtedy punkt O leży na symetralnej odcinka B`C, na dwusiecznej kąta CAB` oraz symetralnej boku BC, przy czym AB = AC - B`E – EB < AC.



6.Sofizmat trygonometryczny

Sofizmat 11: (angielski)

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos x = (1 - \sin^2 x)^{1/2}$

$1 + \cos x = 1 + (1 - \sin^2 x)^{1/2}$

$(1 + \cos x)^2 = (1 + (1 - \sin^2 x)^{1/2})^2$

for $x = \pi$ *(pi = 3,14159265…), we have,*

$(1 - 1)^2 = (1 + (1 - 0)^{1/2})^2$

$0 = (1 + 1)^2$

$0 = 4$ *//interesting ?!*

Czyli

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos x = (1 - \sin^2 x)^{1/2}$

$1 + \cos x = 1 + (1 - \sin^2 x)^{1/2}$

$(1 + \cos x)^2 = (1 + (1 - \sin^2 x)^{1/2})^2$

dla $x = \pi$ (pi = 3,14159265…), otrzymujemy:

$(1 - 1)^2 = (1 + (1 - 0)^{1/2})^2$

$0 = (1 + 1)^2$

$0 = 4$

Rozwiązanie:

Dla $x=\pi$ $\cos x < 0$, więc pierwiastek z $\cos^2 x = -\cos x$, czyli trzecia linijka rozumowania powinna wyglądać tak: „$-\cos x = (1 - \sin^2 x)^{1/2}$” ,co później prowadzi do sprzeczności.

Interesuję się rozwiązywaniem zadań, w których należy przedstawić formalny dowód matematyczny. Inną trudnością jest przedstawić dowód jakiegoś twierdzenia a inną znaleźć błąd w rozumowaniu. Czasami błąd jest oczywisty na przykład dzielenie przez zero czy podnoszenie ujemnej i dodatniej liczby do kwadratu. Kiedy indziej fałszerstwo jest lepiej ukryte i polega na założeniu czegoś, czego nie ma lub pokazaniu tylko połowy prawdy. Im bardziej ukryta jest nieprawda, tym mniejsza szansa na szybkie wychwycenie błędu i w konsekwencji sofizmat jest trudniejszy i ciekawszy. Aby odnaleźć błąd należy szczegółowo analizować każdy krok rozumowania i nigdy nie można się poddawać. W swojej pracy udało mi się wyszukać aż 11 sofizmatów w tym dwa obcojęzyczne. Nadal będę szukał takiego rodzaju zadań.

Źródła:

sjp.pwn.pl

pl.wikipedia.org

https://fr.wikipedia.org/wiki/Sophisme

rey.edu.pl

elektronik.rzeszow.pl

„Przez rozrywkę do wiedzy – Rozmaitości matematyczne” S. Kowal

www.antimath.info/math/math-sophism-on-pythagorean-theorem/

matma4u.pl/forum/26-sofizmaty/

http://forum.swietageometria.info/index.php?topic=1052.0;wap2