Liczby geometryczne

Radosław Żak
Katolickie Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu

Kraków 2016

Opieka: dr Jacek Dymel

Spis treści:

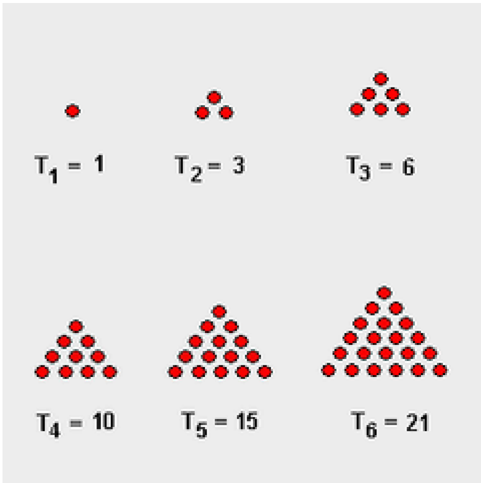
Wstęp

Liczby powstałe przez ułożenia kropek w figurach geometrycznych były badane już w starożytnej Grecji. Od tamtego czasu wiedza na ten temat znacząco się poszerzyła. Ponieważ nie jest to tematyka poruszana zbyt często w szkołach, postanowiłem zająć się nią w niniejszej pracy.

Przedstawię w niej najprostsze liczby geometryczne w drugim i trzecim, a nawet w wyższych wymiarach.

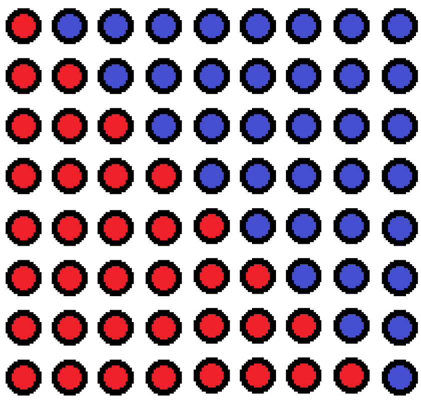
Liczby wielokątne

Zastanówmy się, jaka jest liczba kropek w kolejnych trójkątnych wzorach:



Rysunek 1: Liczby trójkątne

Liczbę tą oznaczmy przez T_n.
Ustawmy obok siebie dwie liczby trójkątne, z tym że drugą odwróćmy. Otrzymamy wtedy prostokąt o wymiarach n x (n+1)



Rysunek 2: Dwie liczby trójkątne uzupełniają się do prostokąta

Zatem liczba kropek w trójkącie o boku n wynosi n(n+1)/2.
Pierwsze liczby w tym ciągu to:

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

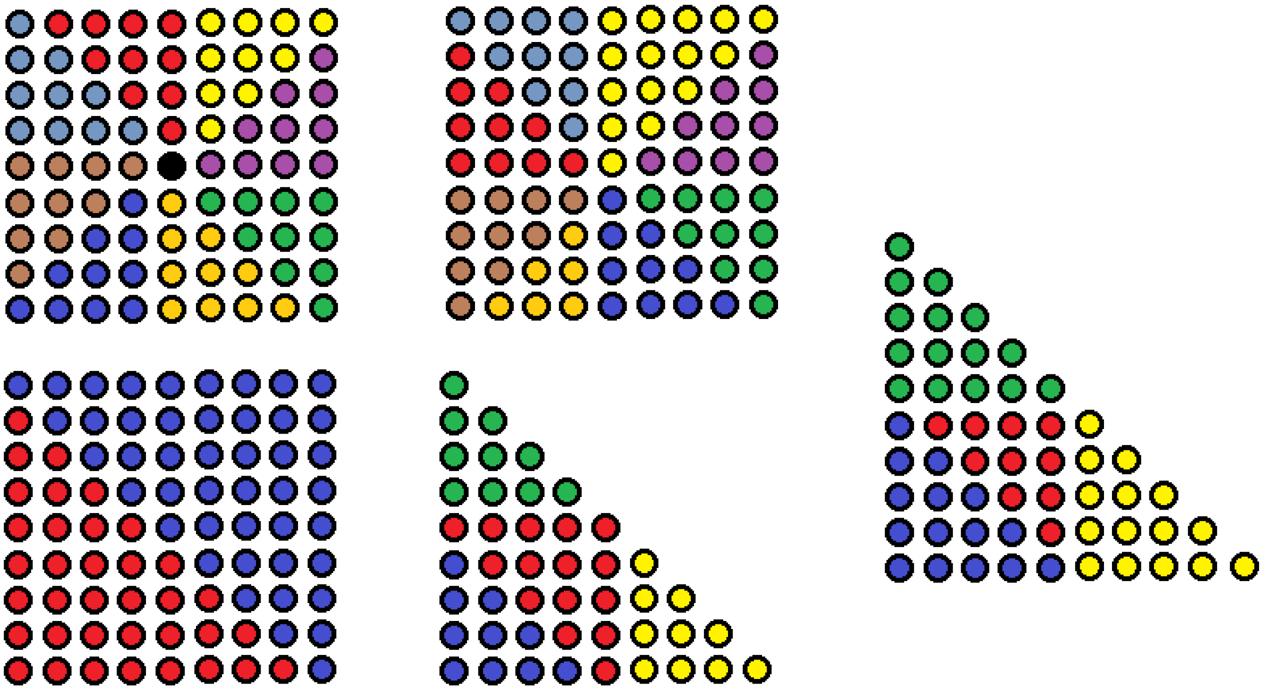
Jest to ciąg A217 z On-line Encyclopedia of Integer Sequences, encyclopedii ciągów zawierającej ich ponad 250000.
Oto kilka wzorów z liczbami trójkątnymi i ich geometryczne uzasadnienia:

$T_n+T_{n-1}=n^2$

$3T_n+T_{n-1}=T_{2n}$

$T_n+3T_{n-1}=T_{2n-1}$

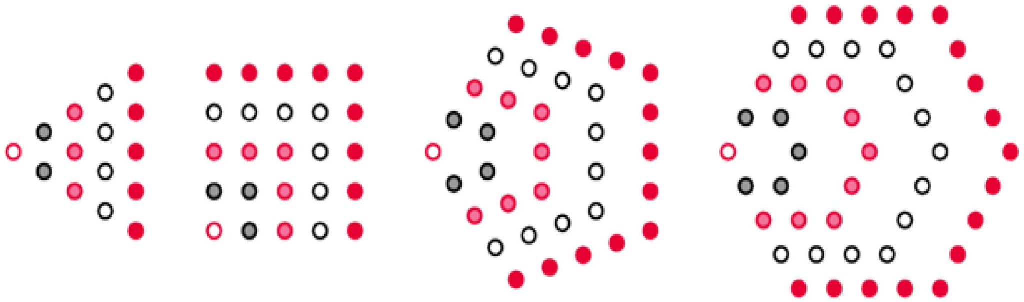
$(2n+1)^2=8T_n+1=T_{n-1}+6T_n+T_{n+1}$



Rysunek 3: Ilustracja tożsamości między liczbami trójkątnymi

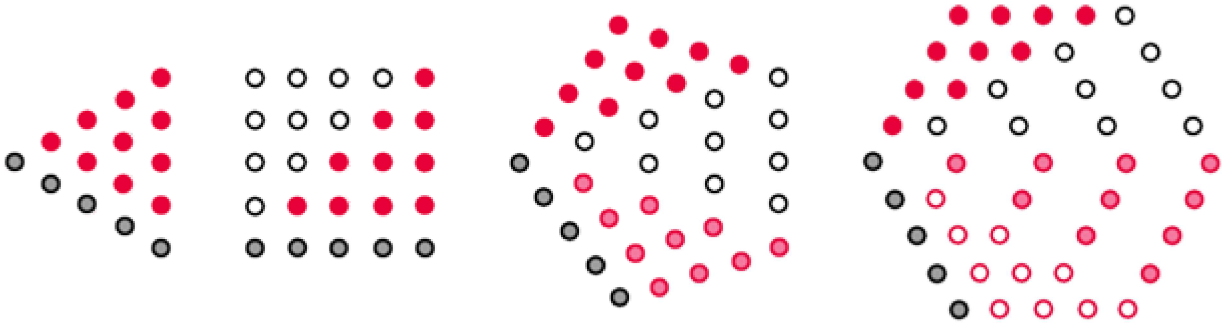
Ponadto, jak udowodnił Euklides, jeżeli $M_n=2^n-1$ jest liczbą pierwszą, to T_{M_n} jest liczbą doskonałą.

Dla innych wielokątów także da się stworzyć odpowiednie liczby.



Rysunek 4: Liczby wielokątne

Zauważmy, że każda n-ta liczba k-kątna składa się z (k-2) (n-1)-szych liczb trójkątnych oraz dodatkowych n kropek.



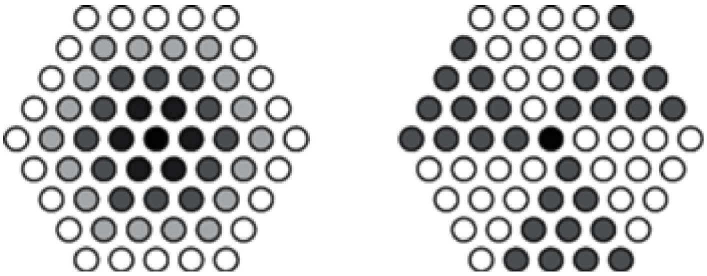
Rysunek 5: Jak obliczać liczby wielokątne.

Zatem n-ta liczba k-kątna jest równa n(n-1)(k-2)/2+n.
Otrzymujemy w ten sposób nowe ciągi:

0,1,4,9,16,25,36,... - liczby kwadratowe (A290)
0,1,5,12,22,35,51,... - liczby pięciokątne (A326)
0,1,6,15,28,45,66,... - liczby sześciokątne (A384)

Zauważmy, że co druga liczba trójkątna jest również liczbą sześciokątną. Istotnie, n-ta liczba sześciokątna to T_n+3T_{n-1} , zaś ta jest równa T_{2n-1} .

Liczbami sześciokątnymi są też zwane inne liczby, które ja dla odróżnienia nazwę liczbami szóstkowymi (jako pierwszy nazwał je tak Martin Gardner).

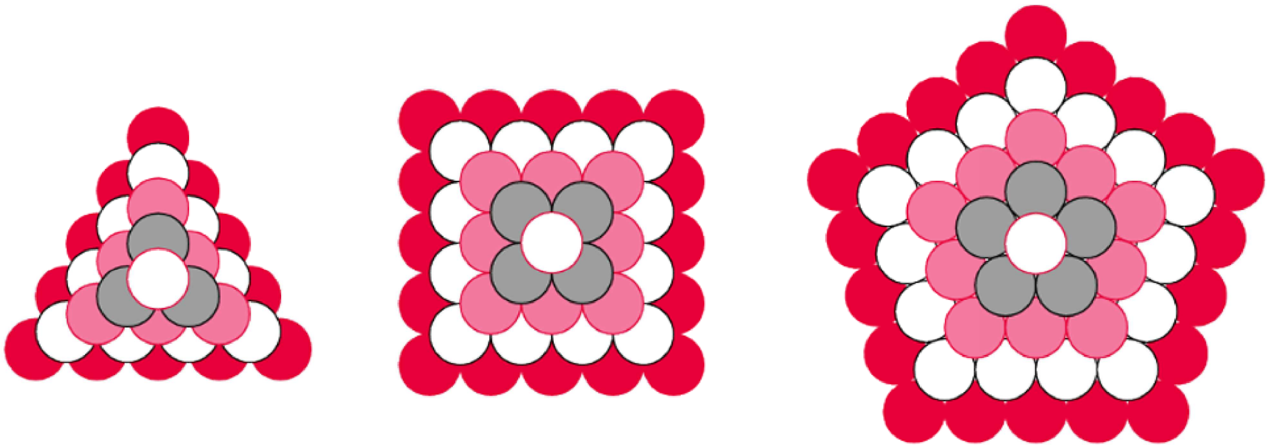


Rysunek 6: Liczby szóstkowe

Zauważmy, że n-ta liczba szóstkowa jest równa $6T_n+1=3n^2+3n+1$.

Trzeci wymiar

W wyższych wymiarach odpowiednikami liczb wielokątnych są liczby piramidalne.



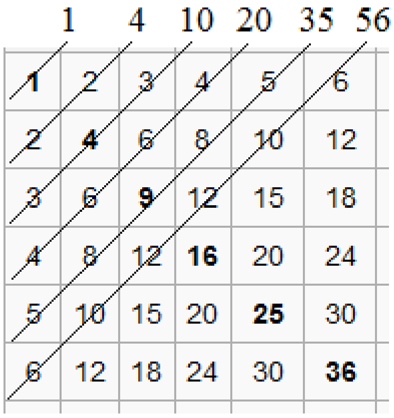
Rysunek 7: Liczby piramidalne

Dodając trzy identyczne liczby czworościenne otrzymujemy wielokrotność liczby trójkątnej.

1		5		1		7
1 2		4 4		2 1		7 7
1 2 3	+	3 3 3	+	3 2 1	=	7 7 7
1 2 3 4		2 2 2 2		4 3 2 1		7 7 7 7
1 2 3 4 5		1 1 1 1 1		5 4 3 2 1		7 7 7 7 7

Rysunek 8: Trzy liczby czworościenne dają liczbę trójkątną

Oznaczając n-tą liczbę czworościenną przez S_n dostajemy
$S_n=(n+2)T_n/3=n(n+1)(n+2)/6$
Zauważmy, że $S_n=1*n+2*(n-1)+...+(n-1)*2+n*1$, ponieważ w środkowej piramidzie na obrazku mamy rząd jedynek długości n, rząd dwójek długości n-1, itd. Zatem liczby czworościenne można otrzymywać z tabliczki mnożenia.



Rysunek 9: Liczby czworościenne w tabliczce mnożenia

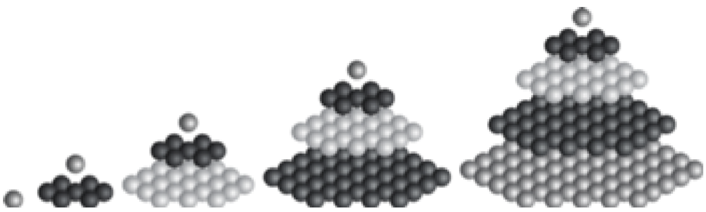
Piramidy kwadratowe składają się z n pierwszych kwadratów, które składają się z dwóch kolejnych liczb trójkątnych, zatem
$1+2^2+3^2+...+n^2=T_0+T_1+T_1+T_2+T_2+T_3+...+T_{n-1}+T_n=$
$=0+2T_1+2T_2+2T_3+...+2T_{n-1}+T_n=S_{n-1}+S_n=n(n+1)(2n+1)/6$

Liczbę tą oznaczmy przez P_n .

Ogólny wzór na n-tą liczbę piramidalną k-kątną to

$$\frac{n(n+1)\cdot((k-2)(n-1)+3)}{6}.$$

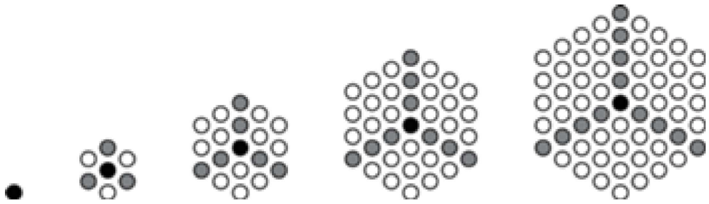
Piramidy możemy układać także z liczb szóstkowych.



Rysunek 10: Piramidy z liczby szóstkowych

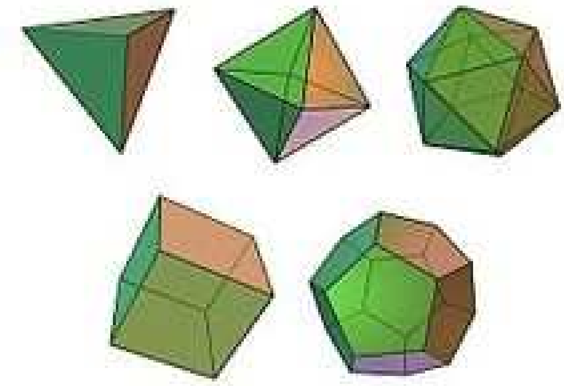
Kiedy obliczymy pierwsze wyrazy tego ciągu, otrzymamy: 1,8,27,64,125,...
Można na tej podstawie wysunąć przypuszczenie, iż n-ty wyraz tego ciągu jest równy n^3. Istotnie, liczby szóstkowe można wygiąć w różnicę między kolejnymi sześcianami, zatem ich suma da

sześciany.



Rysunek 11: Wygięte liczby szóstkowe

Na płaszczyźnie istnieje nieskończenie wiele wielokątów foremnych, ale w przestrzeni foremnych jest tylko pięć rodzajów wielościanów foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.



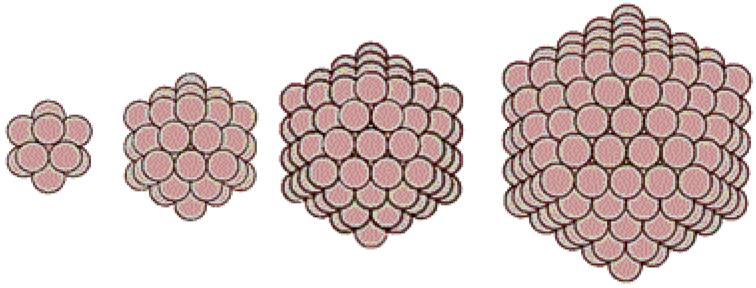
Rysunek 12: Pięć wielościanów foremnych

Dla pierwszych dwóch stworzyliśmy już odpowiednie liczby, zatem stwórzmy także dla pozostałych trzech.

Ośmiościan powstaje z dwóch połączonych piramid, zatem n-ta liczba ośmiościenna jest równa P_n+P_{n-1} ,czyli $n(2n^2+1)/3$.

Rysunek 13: Ośmiościan z kulek magnetycznych

Liczby dwunastościenne i dwudziestościenne trudno sobie wyobrazić ze względu na zaawansowanie tych brył i trudność w upakowaniu kul we wnętrzach tych brył. Powierzchnie zaś są łatwe do wyobrażenia – składają się z odpowiedniej ilości wielokątów foremnych.



Rysunek 14: Liczby dwudziestościenne

N-ta liczba dwunastościenna to $n(9n^2-9n+2)/2$, zaś n-ta liczba dwudziestościenna to $n(5n^2-5n+2)/2$.

Czwarty i wyższe wymiary

Kierując się analogiami, można przedstawić wielowymiarowe odpowiedniki liczb przedstawionych w poprzednich rozdziałach.

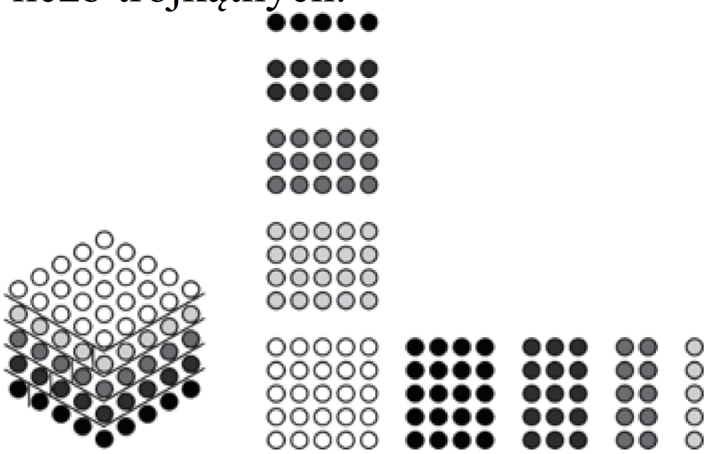
Liczby piramidalne otrzymywaliśmy sumując liczby wielokątne, zatem zsumujmy liczby piramidalne. Ogólnie n-tą liczbą k-kątną w-wymiarową nazwiemy sumę n pierwszych k-kątnych liczb (w-1)-wymiarowych. Można sprawdzić, że liczba ta wynosi

$$\binom{n+w-1}{w} \cdot \frac{(k-2)\cdot(n-1)+w}{n+w-1} = \binom{n+w-2}{n-1} \cdot \frac{(k-2)\cdot(n-1)+w}{w}.$$

gdzie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Piramidy można ustawiać także z (w-1)-wymiarowych kostek. Dla w=4 (czyli sum sześcianów) otrzymujemy ciąg
1,9,36,100,225,...
Są to kwadraty liczb trójkątnych.



Rysunek 15

Na obrazku po prawej stronie kropki tego samego koloru należą do tej samej warstwy sześcianu. Dorysowując analogiczne wzory dla mniejszych sześcianów otrzymamy kwadrat o boku 1+2+...+ +n=T_n ,czyli łącznie T_n^2 kółek.

W ogólności zachodzi wzór Faulhabera:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1} \cdot \left[n^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 n^k + \binom{k+1}{2} B_2 n^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} B_k n \right]$$

gdzie symbol z lewej strony oznacza sumę od j=1 do j=n, zaś B_n to n-ta liczba Bernoulliego. Liczby Bernoulliego można prosto obliczać rekurencyjnie. Oznaczmy n-tą liczbę Bernoulliego przez B^n tak, jakby była potęgą pewnej liczby (oczywiście nie jest tak w rzeczywistości). Wtedy dla każdego n>1 mamy $(B-1)^n=B^n$, np.

$(B-1)^2=B^2-2B^1+1=B^2$, czyli $B^1=1/2$

$(B-1)^3=B^3-3B^2+3B^1-1=B^3$, zatem $B^2=1/6$,

itd.

W ten sposób otrzymujemy pierwsze wartości tych liczb:
$B^1=1/2$; $B^2=1/6$; $B^3=B^5=B^7=...=0$; $B^4=B^8= -1/30$; $B^6=1/42$; …

Wzór Faulhabera można teraz zapisać w skrócie jako
$1^k+2^k+...+n^k=$(„$(n+B)^{k+1}-B^{k+1}$”)/k,
gdzie wyrażenia ujęte w cudzysłowy powinny być zapisane jako suma, w której każdy składnik jest potęgą B pomnożoną przez pewną liczbe, a potęgi B należy traktować jako liczby Bernoulliego.
W czwartym wymiarze mamy sześć hiperwielościanów foremnych, zaś w każdym wyższym wymiarze jest ich 3. Dla nich także można skonstruować odpowiednie liczby. Odpowiednikami liczb czworościennych są liczby sympleksoidalne. N-ta liczba sympleksoidalna k-wymiarowa to

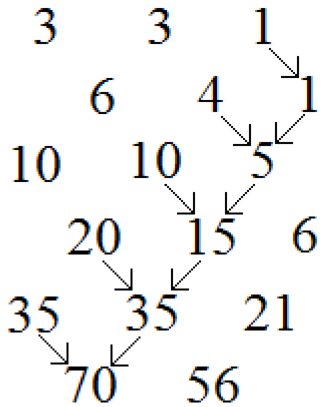
$$\binom{n+k-1}{k}$$

Można tego dowieść analizując kolejne sumy w tzw. trójkącie Pascala, w którym każda liczba jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1
\end{array}
$$

Rysunek 16: Trójkąt Pascala

Liczby sympleksoidalne k-wymiarowe znajdują się na k-tej przekątnej tego trójkąta. Dodając liczby sympleksoidalne (k-1)-wymiarowe do siebie otrzymujemy liczby sympleksoidalne k-wymiarowe.



Rysunek 17: Sumując liczby czworościenne otrzymujemy liczby sympleksoidalne czterowymiarowe

N-ta liczba leżąca na k-tej przekątnej trójkąta Pascala to właśnie

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Po większą liczbę ciekawych liczb geometrycznych odsyłam do bibliografii.

Bibliografia:
John H.Conway, Richard K. Guy ,,Księga liczb”
Grzegorz Kosacki ,,Geometryczne liczby” (Delta 09.2011)
Urszula Pastwa ,,Liczby geometryczne” (Delta 12.2013)
Hyun Kwang Kim ,,On regular polytope numbers”

Źródła obrazków:
Rysunek 1: pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_trójkątne
Rysunki 2, 3, 8, 17: praca własna
Rysunki 4, 7:
http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2011/08/30/Geometryczne_liczby/
Rysunek 5: Rys.4 zmieniony na użytek pracy.
Rysunki 6, 10, 11, 15:
http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2013/11/29/Liczby_geometryczne/
Rysunek 9: pl.wikipedia.org/wiki/Tabliczka_mnożenia (zmieniony na użytek pracy)
Rysunek 12: pl.wikipedia.org/wiki/Wielościany_foremne
Rysunek 13: en.wikipedia.org/wiki/Octahedral_numbers
Rysunek 14: chemistry.uoregon.edu
Rysunek 16:
https://www.matematyka.wroc.pl/ligazadaniowa/styczen-2016-permutacje-i-kombinacje